ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. LIII, Disp. 1a, 1917-1918.

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 3.
1918

DISTRIBUZIONE DELLE SEDUTE

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

nell'anno 1917-918

divise per Classi

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali	Classe di Scienze morali, storiche e filologiche
1917 - 18 Novembre	1917 - 25 Novembre
» - 2 Dicembre	» - 9 Dicembre
» - 16 »	» - 23 »
» - 30 »	1918 - 6 Gennaio
1918 - 13 Gennaio	» - 20 »
» - 27 »	» - 3 Febbraio
» - 10 Febbraio	» - 17 »
» - 24 »	» - 3 Marzo
» - 10 Marzo	» - 17 »
» - 24 »	» - 7 Aprile
» - 14 Aprile	» - 21 »
» - 28 »	» - 5 Maggio
» - 12 Maggio	» - 19 »
» - 26 »	» - 9 Giugno
» - 16 Giugno	» - 23 »

PRESIDENTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO

dalla sua fondazione.

ELEZIONE	PRESIDENTI PERPETUI (*)
1783, 25 luglio	**Saluzzo di Monesiglio** (conte Giuseppe Angelo). Offrì le dimissioni dalla carica e furono accettate (7 settembre 1788) conferendogli il titolo di *Presidente emerito.*
" "	**La Grange Tournier** (Giuseppe Luigi), *Onorario.*
1788, 30 novembre	**Morozzo di Bianzé** (conte Carlo Lodovico).
1801, 24 gennaio (4 piovoso a. IX)	**Saluzzo** (cittad. Angelo Giuseppe) ex-conte di Monesiglio.
1801, 15 febbraio	Col Regolamento del 26 piovoso anno IX (15 febbr. 1801) essendosi stabilito che l'ACCADEMIA NAZIONALE rinnovata col *Decreto della Commissione esecutiva del Piemonte* del 22 nevoso anno IX (17 gennaio 1801) non avesse più che due presidenti di classe; cessarono queste funzioni del SALUZZO.
1804, 25 febbraio (5 ventoso a. XII)	**Bonaparte** (Napoleone) primo console della Repubblica Francese, *Onorario.*
1815, 25 novembre	**Balbo di Vinadio** (conte Prospero).
1837, 26 "	**Lascaris di Ventimiglia** (marchese Agostino).
1838, 18 "	**Saluzzo di Monesiglio** (conte Alessandro).
1851, 18 dicembre	**Plana** (barone Giovanni).
1864, 1° maggio	**Sclopis di Salerano** (conte Federigo).

(*) Dal volume *Il primo secolo della R. Accademia delle Scienze di Torino. Notizie storiche e bibliografiche (1783-1883).* Torino, 1883, pag. 141.

ELEZIONE	PRESIDENTI TRIENNALI (*)
1879, 9 marzo	**Ricotti** (Ercole).
1882, 12 febbraio	**Ricotti** (Ercole) rieletto.
1883, 6 maggio	**Fabretti** (Ariodante).
1885, 12 aprile	**Genocchi** (Angelo).
1888, 8 „	**Genocchi** (Angelo) rieletto.
1889, 28 „	**Lessona** (Michele) termina il 2° triennio iniziato dal Genocchi.
1891, 24 maggio	**Lessona** (Michele).
1894, 24 giugno	**Lessona** (Michele) rieletto, † 20 luglio 1894.
1895, 13 gennaio	**Carle** (Giuseppe).
1898, 9 „	**Carle** (Giuseppe) rieletto.
1901, 13 „	**Cossa** (Alfonso) † 23 ottobre 1902.
1902, 14 dicembre	**D'Ovidio** (Enrico) termina il triennio iniziato dal Cossa.
1904, 21 febbraio	**D'Ovidio** (Enrico).
1907, 17 marzo	**D'Ovidio** (Enrico) rieletto.
1910, 24 aprile	**Boselli** (Paolo).
1913, 18 maggio	**Boselli** (Paolo) rieletto.
1916, 28 „	**Camerano** (Lorenzo) † 22 novembre 1917.

(*) A norma dell'art. 3 dello *Statuto della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, approvato con R. Decreto 2 febbraio 1882, il Presidente dura in carica un triennio e può essere rieletto per un altro triennio.

ELENCO

DEGLI

ACCADEMICI RESIDENTI, NAZIONALI NON RESIDENTI STRANIERI E CORRISPONDENTI

AL 31 DICEMBRE 1917.

NB. — *Negli elenchi degli Accademici la prima data è quella dell'elezione, la seconda quella del R. Decreto che approva l'elezione.*

PRESIDENTE

N. N.

VICE-PRESIDENTE

Chironi (Dott. Giampietro), Senatore del Regno, Professore ordinario di Diritto Civile nella R. Università di Torino, Dottore aggregato alla Facoltà di Giurisprudenza nella R. Università di Cagliari, Socio della R. Accademia delle Scienze di Napoli, della R. Accademia Peloritana di Messina, Socio corrispondente dell'Accademia di Legislazione di Tolosa (Francia), dell'Associazione internazionale di Berlino per lo studio del Diritto comparato, dell'Accademia Americana di Scienze sociali e politiche di Filadelfia, della Società di studi legislativi di Parigi, Membro della Commissione Reale per l'ordinamento dell'istruzione superiore, Comm. ✻, Grand'Uff. ▭. — *Torino, Via Monte di Pietà, 26.*

Eletto alla carica il 28 maggio 1916 per il triennio dal 20 aprile 1916 al 19 aprile 1919.

Tesoriere

Einaudi (Luigi), Dottore in Giurisprudenza, Professore di Scienza delle finanze e Diritto finanziario nella R. Università di Torino ed incaricato di Economia e Legislazione industriale nel R. Politecnico di Torino, Membro della Regia Deputazione sovra gli Studi di Storia patria per le Antiche Provincie e la Lombardia, Socio corrispondente della R. Accademia dei Lincei e di quella dei Georgofili, Socio onorario del *Cobden Club* di Londra, Membro del Comitato centrale e della Commissione esecutiva del Consorzio nazionale. — *Torino, Piazza Statuto, 16.*

Rieletto alla carica il 19 novembre 1916 per il triennio dal 1° luglio 1916 al 30 giugno 1919.

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Direttore

D'Ovidio (Enrico), Senatore del Regno, Dottore in Matematica, Professore ordinario di Algebra e Geometria analitica nella R. Università di Torino, incaricato di Geometria analitica e proiettiva e Direttore del R. Politecnico di Torino, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio ordinario non residente della R. Accademia delle Scienze di Napoli, Corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere e dell'Ateneo di Brescia, onorario della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, Socio dell'Accademia Pontaniana, delle Società matematiche di Parigi e Praga, Comm. ❋, e ▭. — *Torino, Via Sebastiano Valfrè, 14.*

Rieletto alla carica l'11 marzo 1917 per il triennio dal 9 febbraio 1917 all'8 febbraio 1920.

Segretario

Parona (Nob. Carlo Fabrizio), Dottore in Scienze naturali, Professore di Geologia e Direttore del Museo di Geologia e di Paleontologia della R. Università di Torino, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio residente della R. Accademia di Agricoltura di Torino, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, della R. Accademia delle Scienze di Napoli, dell'Ateneo di Brescia e dell'Accademia degli Agiati in Rovereto, Socio onorario dell'Accademia di Verona, Membro del R. Comitato Geologico, ecc., Comm. ❋, ▭. — *Torino, Palazzo Carignano.*

Eletto alla carica il 19 novembre 1916 per il triennio dal 16 novembre 1916 al 15 novembre 1919.

ACCADEMICI RESIDENTI

Salvadori (Conte Tommaso), Dottore in Medicina e Chirurgia, Vice-Direttore del Museo Zoologico della R. Università di Torino, Socio della R. Accademia di Agricoltura di Torino, della Società Italiana di Scienze naturali, dell'Accademia Gioenia di Catania, Membro della Società Zoologica di Londra, dell'Accademia delle Scienze di Nuova York, della Società dei Naturalisti in Modena, della Società Reale delle Scienze di Liegi, della Reale Società delle Scienze naturali delle Indie Neerlandesi e del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Membro effettivo della Società Imperiale dei Naturalisti di Mosca, Socio straniero della *British Ornithological Union*, Socio straniero onorario del *Nuttall Ornithological Club*, Socio straniero dell'*American Ornithologists' Union*, e Membro onorario della Società Ornitologica di Vienna, Membro ordinario della Società Ornitologica tedesca, Comm. ♛, Cav. dell'O. di S. Giacomo del merito scientifico, letterario ed artistico (Portogallo). — *Torino, Via Principe Tommaso, 17.*

29 gennaio 1871 - 9 febbraio 1871. — Pensionato 21 marzo 1878.

D'Ovidio (Enrico), *predetto.*

29 dicembre 1878 - 16 gennaio 1879. — Pensionato 28 novembre 1889.

Naccari (Andrea), Dottore in Matematica, Professore emerito di Fisica sperimentale nella R. Università di Torino, uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio corrispondente del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, dell'Accademia Gioenia di Scienze naturali di Catania e dell'Accademia Pontaniana, Comm. ❋ e ♛. — *Torino, Via Sant'Anselmo, 6.*

5 dicembre 1880 - 23 dicembre 1880. — Pensionato 8 giugno 1893.

Segre (Corrado), Dottore in Matematica, Professore di Geometria superiore nella R. Università di Torino, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei e della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL), Membro onorario della Società Filosofica di Cambridge e delle Società Matematiche di Londra e di Calcutta, Socio straniero dell'Accademia delle Scienze del Belgio e di quella di Danimarca, Socio corrispondente della Società Fisico-Medica di Erlangen, dell'Accademia delle Scienze di Bologna, del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere e del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, ❋ e Comm. ♛. — *Torino, Corso Vittorio Emanuele, 85.*

10 febbraio 1889 - 21 febbraio 1889. — Pensionato 8 ottobre 1898.

Peano (Giuseppe), Dottore in Matematica, Professore di Calcolo infinitesimale nella R. Università di Torino, Socio della *Sociedad Cientifica* del Messico, Socio del Circolo matematico di Palermo, della Società ma-

tematica di Kasan, della Società filosofica di Ginevra, corrispondente della R. Accademia dei Lincei, ✠ e ♔. — *Torino, Via Barbaroux, 4.*

25 gennaio 1891 - 5 febbraio 1891. — Pensionato 22 giugno 1899.

Jadanza (Nicodemo), Dottore in Matematica, Professore di Geodesia teoretica nella R. Università di Torino e di Geometria pratica nel R. Politecnico, Socio dell'Accademia Pontaniana di Napoli, del Circolo matematico di Palermo, dell'Accademia Dafnica di Acireale e della Società degli Ingegneri Civili di Lisbona, Membro effettivo della R. Commissione Geodetica italiana, Comm. ♔. — *Torino, Via Madama Cristina, 11.*

3 febbraio 1895 - 17 febbraio 1895. — Pensionato 17 ottobre 1902.

Foà (Pio), Senatore del Regno, Dottore in Medicina e Chirurgia, Professore di Anatomia Patologica nella R. Università di Torino, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere e del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Presidente della Giunta di Vigilanza dell'Istituto di Magistero per l'educazione fisica, Membro dell'Opera Nazionale per gl'invalidi della guerra in Roma, ecc., ecc., Comm. ✠ ♔. — *Torino, Corso Valentino, 40.*

3 febbraio 1895 - 17 febbraio 1895. — Pensionato 9 novembre 1902.

Guareschi (Icilio), Dottore in Scienze naturali, Professore ordinario e Direttore dell'Istituto di Chimica Farmaceutica e Tossicologica ed incaricato di Chimica bromatologica nella R. Università di Torino, Direttore della Scuola di Farmacia, Socio corrispondente della R. Accademia dei Lincei, Socio della R. Accademia di Medicina e Vice-Presidente della R. Accademia di Agricoltura di Torino, Socio della R. Accademia dei Fisiocritici di Siena, Socio onorario della Società di Farmacia di Torino, già Membro anziano del Consiglio Sanitario Provinciale, Cittadino onorario di Crespellano (Bologna), Socio onorario dell'Associazione chimico-farm. toscana, Membro corrispondente dell'Accademia di Medicina di Parigi, Membro corrispondente della Società di Farmacia di Parigi, Membro d'onore della R. Accademia delle Scienze di Romenia (Bucarest); Membro onorario della *Verein Chemiker-Coloristen*; Membro onorario della Società chimica portoghese; Socio onorario dell'Associazione Chimica Industriale di Torino; Socio della *Deutsche Gesellschaft f. Geschichte d. Medizin und Naturwissenschaften*, Membro della Società Chimica di Berlino, della *Berliner Gesellschaft f. Gesch. d. Naturwiss.*, ecc., Comm. ♔, ✂. — *Torino, Corso Valentino, 11.*

12 gennaio 1896 - 2 febbraio 1896. — Pensionato 28 maggio 1903.

Guidi (Camillo), Ingegnere, Professore ordinario di Statica grafica e Scienza delle costruzioni e Direttore dell'annesso Laboratorio sperimentale dei materiali da costruzione nel R. Politecnico in Torino, Corrispondente della Reale Accademia dei Lincei, Uff. ✠, Comm. ♔. — *Torino, Corso Valentino, 7.*

31 maggio 1896 - 11 giugno 1896. — Pensionato 11 giugno 1903.

Parona (Nob. Carlo Fabrizio), *predetto.*

15 gennaio 1899 - 22 gennaio 1899. — Pensionato 21 gennaio 1909.

Mattirolo (Oreste), Dottore in Medicina, Chirurgia e Scienze naturali, Professore ordinario di Botanica e Direttore dell'Istituto botanico della R. Università di Torino, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio della R. Accademia di Medicina, Presidente della R. Accademia di Agricoltura di Torino e della Società botanica italiana, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, dell'Accademia delle Scienze del R. Istituto di Bologna, della Società di Scienze naturali di Mosca, della *Royal Botanical Society* di Edinburgh, della Società Veneto-Trentina, della Società Antonio Alzate di Mexico, ecc., Comm. ♔, *Officier du mérite agricole. — Torino, Orto Botanico della R. Università (al Valentino).*

10 marzo 1901 - 16 marzo 1901. — Pensionato 15 dicembre 1910.

Grassi (Guido), Professore ordinario di Elettrotecnica e Direttore della scuola Galileo Ferraris nel R. Politecnico di Torino, Socio ordinario della R. Accademia di Scienze fisiche e matematiche di Napoli, dell'Accademia Pontaniana e del R. Istituto d'incoraggiamento di Napoli, Corrispondente della R. Accademia dei Lincei, Membro della Commissione superiore metrica al Ministero di Agricoltura, Industr. e Comm., Membro del Consiglio Superiore dei servizi elettrici al Ministero delle Poste e Telegrafi, Consigliere comunale, Uff. ✻, Comm. ♔. — *Torino, Via Cernaia, 40.*

9 febbraio 1902 - 23 febbraio 1902. — Pensionato 30 novembre 1911.

Somigliana (nob. Carlo), Dottore in Matematiche, Professore ordinario di Fisica matematica e incaricato di Meccanica razionale nella R. Università di Torino, rappresentante dell'Accademia nel Consiglio amministrativo del R. Politecnico di Torino, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio nazionale della Società italiana delle Scienze (detta dei XL) e corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, ✻, Comm. ♔. — *Corso Vinzaglio, 10.*

5 marzo 1905 - 27 aprile 1905. — Pensionato 20 luglio 1913.

Fusari (Romeo), Dottore in Medicina e Chirurgia, Professore ordinario di Anatomia umana, descrittiva e topografica e Direttore dell' Istituto anatomico della R. Università di Torino, Socio dell'Accademia di Medicina di Torino, Corrispondente della R. Accademia dei Lincei, Fondatore della Società medico-chirurgica di Pavia, Onorario dell'Accademia delle Scienze mediche e naturali di Ferrara, Uff. ✻ e Comm. ♔. — *Via Baretti, 45.*

5 marzo 1905 - 27 aprile 1905. — Pensionato 17 gennaio 1915.

Panetti (Modesto), Dottore in Matematica, Ingegnere, Professore di meccanica applicata alle macchine e di Costruzioni Aeronautiche nel R. Politecnico di Torino, Comm. ♔. — *Via S. Francesco da Paola, 36.*

24 gennaio 1915 – 14 febbraio 1915.

ACCADEMICI NAZIONALI NON RESIDENTI

Volterra (Vito), Senatore del Regno, Capitano del Genio, Dottore in Fisica, Dottore onorario in Matematiche della Università Fridericiana di Christiania, Dottore onorario in Scienze della Università di Cambridge, Dottore onorario in Filosofia della Università di Stockholm, Dottore onorario in Fisica della *Clark University* di Worcester (Mass.), Professore di Fisica matematica, incaricato di Meccanica superiore, Direttore del Seminario Matematico e Preside della Facoltà di Scienze fisiche, matematiche e naturali nella R. Università di Roma, Capo dell'Ufficio Invenzioni al Ministero delle Armi e Munizioni, Professore d'analisi all'Università di Stockholm (1906), *Professeur agréé à la Sorbonne* (1912), *Louis Clark Vanuxem lecturer* (1912) all'Università di Princeton N. J., uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Accademico corrispondente della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Socio corrispondente della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, Socio onorario dell'Accademia Gioenia di Scienze naturali di Catania, Membro nazionale della Società degli Spettroscopisti italiani, Membro straniero della Società Reale di Londra, Socio corrispondente nella Sezione di Geometria dell'Accademia delle Scienze di Parigi, Membro straniero nella Classe di Matematica pura della Reale Accademia Svedese delle scienze, Membro onorario straniero della Società Reale di Edimburgo, Membro straniero dell'Accademia nazionale delle Scienze (Stati Uniti d'America, Washington), Membro straniero della *American Philosophical Society for Promoting Useful Knowledge* di Philadelphia (Pa), Membro ordinario della Società Reale delle Scienze di Upsala, Membro corrispondente dell'Accademia Imperiale delle Scienze di Pietrogrado, Membro onorario dell'Accademia Rumena di Bucarest, Membre du Bureau della Società matematica di Francia, Membro onorario della Società Matematica di Londra, Membro onorario della Società matematica di Kharkow, Membro onorario della Società matematica di Calcutta, *Membre du Bureau* della Società fisica di Francia, Membro onorario della Società di Scienze fisiche e naturali di Bordeaux, Membro corrispondente della Società Scientifica di Buenos Aires, Membro onorario dell'*Harvard Mathematical Club* in Cambridge (Mass.), Vice-Presidente del R. Comitato Talassografico italiano, Presidente della R. Commissione tecnica per gl'Istituti di Previdenza, Presidente dell'Associazione Italiana per l'Intesa intellettuale fra i paesi alleati ed amici, ecc., ⚜, ✠, ☸. — *Roma, Via in Lucina, 17.*
3 febbraio 1895 - 11 febbraio 1895.

Bianchi (Luigi), Professore di Geometria analitica nella R. Università di Pisa, Socio ordinario della R. Accademia dei Lincei e della Società Italiana delle Scienze, detta dei XL; Socio corrispondente dell'Accademia

delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli, dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna e del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere in Milano, ❋, ▬, ✠. — *Pisa, Via Manzoni, 3.*
13 febbraio 1898 - 24 febbraio 1898.

Dini (Ulisse), Senatore del Regno, Professore di Analisi superiore nella R. Università di Pisa e incaricato di Analisi infinitesimale, Direttore della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Socio della R. Accademia dei Lincei e Presidente della Società Italiana detta dei XL, Corrispondente dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna e del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere e del R. Istituto Veneto di Scienze, lettere ed arti, Socio ordinario non residente dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche della Società Reale di Napoli nella Sezione di Scienze matematiche, Socio onorario della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, dell'Accademia Gioenia di Scienze naturali di Catania e della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti degli Zelanti di Acireale, Membro del Consiglio Direttivo del Circolo matematico di Palermo, Socio della Società italiana per il progresso delle Scienze (Roma), della R. Società delle Scienze di Gottinga, Membro straniero della *London mathemat. Society*, Dottore onorario delle Università di Christiania e di Glasgow, Comm. ❋, Gr. Uff. ▬, ✠. — *Via S. Martino, 32. Pisa.*
13 febbraio 1898 - 24 febbraio 1898.

Golgi (Camillo), Senatore del Regno, Membro del Consiglio Superiore di Sanità, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei di Roma, Dottore in Scienze *ad honorem* dell'Università di Cambridge, Membro onorario dell'Università Imperiale di Charkoff, uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Membro della Società per la Medicina interna di Berlino, Membro onorario della Imp. Accademia Medica di Pietroburgo, della Società di Psichiatria e Neurologia di Vienna, Socio corrispondente onorario della *Neurological Society* di Londra, Membro corrispondente della *Société de Biologie* di Parigi, Membro dell'*Academia Caesarea Leopoldino-Carolina*, Socio della R. Società delle Scienze di Gottinga e delle Società Fisico-mediche di Würzburg, di Erlangen, di Gand, Membro della Società Anatomica, Socio nazionale della R. Accademia delle Scienze di Bologna, Socio corrispondente dell'Accademia di Medicina di Torino, Socio onorario della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Padova, Socio corrispondente dell'Accademia Medico-fisica Fiorentina, della R. Accademia delle Scienze mediche di Palermo, della Società Medico-chirurgica di Bologna, Socio onorario della R. Accademia Medica di Roma, Socio onorario della R. Accademia Medico-chirurgica di Genova, Socio corrispondente dell'Accademia Fisiocritica di Siena, dell'Accademia Medico-chirurgica di Perugia, della *Societas medicorum Svecana* di Stoccolma, Membro onorario dell'*American Neurological Association* di New-York, Socio onorario della *Royal Microscopical Society* di Londra, Membro corrispondente della R. Accademia di Medicina del Belgio, Membro onorario della Società Freniatrica italiana e dell'Asso-

ciazione Medico-Lombarda, Socio onorario del Comizio Agrario di Pavia, Professore ordinario di Patologia generale e di Istologia nella R. Università di Pavia, Membro effettivo della Società Italiana d'Igiene e dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Membro onorario dell'Università di Dublino, Socio corrispondente della Società Medica di Batavia, Membro straniero dell'Accademia di Medicina di Parigi, Membro onorario dell'Imperiale Società degli alienisti e neurologi di Kazan, Socio emerito della R. Accademia Medico-Chirurgica di Napoli, Socio corrispondente dell'Imp. Accademia delle Scienze di Vienna, Socio onorario della R. Società dei Medici in Vienna, Comm. ✱ ♔, Cav. ♱.

13 febbraio 1898 - 24 febbraio 1898.

Righi (Augusto), Senatore del Regno, Dottore, Professore ordinario di Fisica, Incaricato dell'insegnamento della Fisica per i Medici, Farmacisti e Veterinari nella R. Università di Bologna, Membro (Benedettino) della Accademia delle Scienze del R. Istituto di Bologna, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio corrispondente del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, dell'Accademia di Padova, della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, dell'Accademia di Scienze naturali ed economiche di Palermo, dell'Accademia Gioenia di Scienze naturali di Catania, Membro della Società degli Spettroscopisti Italiani, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Dottore in Filosofia *honoris causa* dell'Università di Gottinga, di Erlangen, Membro corrispondente dell'Accademia di Parigi, dell'Accademia delle Scienze di Petrogrado, di Lund, dell'Accademia Olandese di Haarlem e della Società Reale delle Scienze di Upsala, Membro onorario della *Philosophical Society* di Cambridge, della Società Reale di Edinburgo, della *Royal Institution* della Gran Bretagna, della Società Antonio Alzate del Messico, della Società di Scienze naturali di Mosca, della Società di Fisica di Ginevra, Uno dei 12 Soci onorari della Società Fisica di Londra, Membro straniero della R. Società delle Scienze di Gottinga, Comm. ✱, Gr. Uff. ♔, ♱. — *Bologna, Via Irnerio, 46.*

24 gennaio 1915 – 14 febbraio 1915.

Taramelli (Torquato), Dottore, Professore ordinario di Geologia e Incaricato di Paleontologia nella R. Università di Pavia, Membro del R. Comitato Geologico e del R. Consiglio di Meteorologia e Geodinamica, Socio ordinario del Comizio Agrario di Pavia, Membro effettivo del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Socio degli Atenei di Brescia e Bergamo, delle Accademie di Udine, di Verona e di Spoleto, della Società Agraria Istriana, della Società dei Naturalisti di Modena, della R. Accademia dei Georgofili di Firenze, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, dell'Accademia delle Scienze della Società Reale di Napoli, dell'Accademia delle Scienze del R. Istituto di Bologna, dell'I. R. Accademia delle Scienze di Rovereto, Socio onorario delle Società Alpine di Udine e di Trento, dell'I. R. Istituto geologico di Vienna, della Società Reale

delle Scienze del Belgio, della Società Elvetica di Scienze naturali, della Società di Scienze naturali di Filadelfia, Gr. Uff. ✠, ✳, Cav. ✠. — *Pavia, Via Volta, 24.*
24 gennaio 1915 - 14 febbraio 1915.

Bertini (Eugenio), Dottore, Professore ordinario di Geometria superiore nella R. Università di Pisa, Professore onorario dell'Università di Pavia, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Membro effettivo del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio corrispondente della R. Accademia delle Scienze di Lucca, ✳, ✠. — *Pisa, Lungarno Mediceo, Palazzo Schiff.*
24 gennaio 1915 - 14 febbraio 1915.

Pirotta (Romualdo), Dottore, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, uno dei XL della Società italiana delle Scienze, Socio corrispondente del Reale Istituto Lombardo di scienze e lettere e dell'Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti, Professore ordinario di Botanica e Direttore del R. Istituto e Orto Botanico dell'Università di Roma, Comm. ✠. — *Roma, Via Milano, Istituto Botanico.*
24 gennaio 1915 - 14 febbraio 1915.

Ròiti (Antonio), Dottore, Professore emerito del R. Istituto di Studi superiori in Firenze, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei. — *Roma, Lungotevere Farnesina, 2.*
24 gennaio 1915 - 14 febbraio 1915.

ACCADEMICI STRANIERI

Klein (Felice), Professore nell'Università di Gottinga. — 10 gennaio 1897 - 24 gennaio 1897.

Haeckel (Ernesto), Professore nella Università di Jena. — 13 febbraio 1898 - 24 febbraio 1898.

Noether (Massimiliano), Prof. nell'Università di Erlangen. — 15 maggio 1910 12 giugno 1910.

Baeyer (Adolfo v.), Professore nell'Università di München. — Id. id.

Thomson (John Joseph), Professore nell'Università di Cambridge. — Id. id.

CORRISPONDENTI

Sezione di Matematiche pure.

Cantor (Maurizio), Professore nell'Università di Heidelberg. — 25 giugno 1876.
Schwarz (Ermanno A.), Professore nella Università di Berlino. — 19 dicembre 1880.
Jordan (Camillo), Professore nel Collegio di Francia, Membro dell'Istituto di Francia (Parigi). — 12 gennaio 1896.
Mittag-Leffler (Gustavo), Professore all'Università di Stoccolma. — 12 gennaio 1896.
Picard (Emilio), Professore alla Sorbonne, Membro dell'Istituto di Francia (Parigi). — 10 gennaio 1897.
Castelnuovo (Guido), Prof. nella R. Università di Roma. — 17 aprile 1898.
Zeuthen (Gerolamo Giorgio), Professore nella Università di Copenhagen. — 14 giugno 1903.
Hilbert (Davide), Prof. nell'Università di Göttingen. — 14 giugno 1903.
Enriques (Federico), Prof. nell'Università di Bologna. — 15 maggio 1910.

Sezione di Matematiche applicate, Astronomia e Scienza dell'ingegnere civile e militare.

Ewing (Giovanni Alfredo), Professore nell' Università di Cambridge. — 27 maggio 1894.
Celoria (Giovanni), Senatore del Regno, Direttore dell'Osservatorio di Milano. — 12 gennaio 1896.
Pizzetti (Paolo), Professore nella R. Università di Pisa. — 14 giugno 1903.
Cerulli (Vincenzo), Direttore dell' Osservatorio Collurania, Teramo. — 15 maggio 1910.
Boussinesq (Valentino), Membro dell' Istituto di Francia, Professore nella Università di Parigi. — Id. id.
Levi-Civita (Tullio), Professore nella R. Università di Padova. — Id. id.

Sezione di Fisica generale e sperimentale.

Blaserna (Pietro), Senatore del Regno, Professore nella R. Università di Roma. — 30 novembre 1873.
Lippmann (Gabriele), dell'Istituto di Francia (Parigi). — 15 maggio 1892.
Rayleigh (Lord Giovanni Guglielmo), Professore nella *Royal Institution* di Londra. — 3 febbraio 1895.

Röntgen (Guglielmo Corrado), Professore nell'Università di München. — 14 giugno 1903.
Lorentz (Enrico), Professore dell'Università e Curatore del Laboratorio Teyler di Haarlem. — 14 giugno 1903.
Garbasso (Antonio), Professore nel R. Istituto di Studi superiori di Firenze. — Id. id.
Neumann (Carlo), Professore nell'Università di Lipsia. — Id. id.
Zeeman (P.), Professore nell'Università di Amsterdam. — Id. id.
Cantone (Michele), Professore nell'Università di Napoli. — Id. id.

Sezione di Chimica generale ed applicata.

Paternò (Emanuele), Senatore del Regno, Professore nella R. Università di Roma. — 2 gennaio 1881.
Körner (Guglielmo), Professore nella R. Scuola superiore d'Agricoltura in Milano. — 2 gennaio 1881.
Fischer (Emilio), Professore nell'Università di Berlino. — 24 gennaio 1897.
Dewar (Giacomo), Professore nell'Università di Cambridge. — 14 giugno 1903.
Ciamician (Giacomo), Senatore del Regno, Professore nell'Università di Bologna. — 14 giugno 1903.
Ostwald (Dr. Guglielmo), Gross Bothen (Sachsen). — 5 marzo 1905.
Arrhenius (Svante Augusto), Professore e Direttore dell'Istituto Fisico dell'Università di Stoccolma. — 5 marzo 1905.
Nernst (Walter), Professore nell'Università di Berlino. — 5 marzo 1905.
Haller (Albin), Membro dell'Istituto di Francia, Professore nell'Università di Parigi. — 15 maggio 1910.
Willstätter (Richard), Professore, Kaiser Wilhelm Institut, Berlin. — Id. id.
Engler (Carlo), Professore nella Scuola superiore tecnica di Karlsruhe. — Id. id.

Sezione di Mineralogia, Geologia e Paleontologia.

Capellini (Giovanni), Senatore del Regno, Professore nella R. Università di Bologna. — 12 marzo 1882.
Tschermak (Gustavo), Professore nell'Università di Vienna. — 8 febbraio 1885.
Groth (Paolo Enrico), Professore nell'Università di Monaco. — 13 febbraio 1898.
Liebisch (Teodoro), Professore nell'Università di Gottinga. — Id. id.
Issel (Arturo), Professore nella R. Università di Genova. — Id. id.
Goldschmidt (Viktor), Professore nell'Univ. di Heidelberg. — 5 marzo 1905.
Suess (Franc. Edoardo), Professore nella "Deutsche Technische Hochschule" di Praga. — 5 marzo 1905.
Haug (Emilio), Professore nell'Università di Parigi. — Id. id.
Lacroix (Alfredo), Membro dell'Istituto di Francia, Professore al Museo di Storia naturale di Parigi. — 15 maggio 1910.
Kilian (Carlo), Professore nell' Università di Grenoble. — Id. id.

Sezione di Botanica e Fisiologia vegetale.

Saccardo (Andrea), Professore nella R. Università di Padova. — 8 febbraio 1885.
Goebel (Carlo), Professore nell'Università di Monaco. — 13 febbraio 1898.
Penzig (Ottone), Professore nell'Università di Genova. — Id. id.
Schwendener (Simone), Professore nell'Univ. di Berlino. — Id. id.
Wiesner (Giulio), Professore nell'Univ. di Vienna. — 14 giugno 1903.
Klebs (Giorgio), Professore nell'Università di Halle. — Id. id.
Belli (Saverio), Professore, Torino. — Id. id.
Baccarini (Pasquale), Professore nell' Istituto di Studi superiori in Firenze. — 15 maggio 1910.
Mangin (Luigi), Membro dell' Istituto di Francia, Professore al Museo di Storia naturale di Parigi. — Id. id.

Sezione di Zoologia, Anatomia e Fisiologia comparata.

Waldeyer (Guglielmo), Professore nell' Università di Berlino. — 1° dicembre 1889.
Roux (Guglielmo), Professore nell'Università di Halle. — 13 febbraio 1898.
Boulenger (Giorgio Alberto), Assistente al Museo di Storia naturale di Londra. — Id. id.
Marchand (Felice), Professore nell'Università di Leipzig. — 14 giugno 1903.
Weismann (Augusto), Professore nell'Università di Freiburg i. Br. (Baden). — 5 marzo 1905.
Lankester (Edwin Ray), Direttore del *British Museum of Natural History*. — Id. id.
Ramôn y Cajal (Santiago), Professore nell' Università di Madrid. — 15 maggio 1910.
Kossel (Albrecht), Professore nell'Università di Heidelberg. — Id. id.

CLASSE DI SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Direttore.

Boselli (S. E. Paolo), Primo Segretario di S. M. per l'Ordine Mauriziano e Cancelliere dell'Ordine della Corona d'Italia, Dottore aggregato alla Facoltà di Giurisprudenza della R. Università di Genova, già Professore nella R. Università di Roma, Professore onorario della R. Università di Bologna, Presidente dell'Istituto Storico Italiano, Presidente del Consiglio degli Archivi, Socio corrispondente del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, della Classe di scienze morali della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, della R. Accademia delle Scienze di Modena, Presidente della R. Deputazione di Storia Patria per le Antiche Provincie e la Lombardia, Socio corrispondente dell'Accademia dei Georgofili, Presidente della Società di Storia Patria di Savona, Socio onorario della Società Ligure di Storia Patria, Socio onorario dell'Accademia di Massa, Socio della R. Accademia di Agricoltura, Corrispondente dell'Accademia Dafnica di Acireale, Presidente onorario della Società di Storia Patria degli Abruzzi in Aquila, Presidente del Consiglio Centrale della Società *Dante Alighieri*, Presidente del Consiglio di Amministrazione del R. Politecnico di Torino, Presidente del Consiglio Superiore della Marina Mercantile, Deputato al Parlamento nazionale, Presidente del Consiglio Provinciale di Torino, Presidente del Comitato Nazionale per la Storia del Risorgimento, Cav. O. S. SS. A., Gr. Cord. ✠ e ♔, Gr. Cord. dell'Aquila Rossa di Prussia, dell'Ordine di Alberto di Sassonia, dell'Ord. di Bertoldo I di Zähringen (Baden), e dell'Ordine del Sole Levante del Giappone, Gr. Uffiz. O. di Leopoldo del Belgio, Uffiz. della Cor. di Pr., Gr. Cr. della L. d'O. di Francia, e C. O. della Concezione del Portogallo. — *Torino, Piazza Maria Teresa, 3.*

Eletto alla carica il 28 maggio 1916 per il triennio dal 20 aprile 1916 al 19 aprile 1919.

Segretario.

Stampini (Ettore), Dottore in Lettere ed in Filosofia, Professore ordinario di Letteratura latina, Direttore della Biblioteca e già Preside della Facoltà di Filosofia e Lettere nella R. Università di Torino, Socio corrispondente del Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, della R. Accademia Peloritana di Messina, dell'Ateneo di Brescia, della R. Accademia Virgiliana di Scienze, Lettere ed Arti di Mantova, e della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Padova, Direttore della Rivista di Filologia e d'Istruzione classica, già Membro del Consiglio e della Giunta Superiore dell'Istruz. Pubblica, Decorato della Medaglia del Merito Civile di 1ª Classe della Repubblica di S. Marino, Uff. ✠, Comm. ♔. — *Piazza Vittorio Emanuele I, 10.*

Eletto alla carica il 28 maggio 1916 per il triennio dal 20 aprile 1916 al 19 aprile 1919.

ACCADEMICI RESIDENTI

Manno (Barone D. Antonio), Senatore del Regno, Membro e Segretario della R. Deputazione sovra gli Studi di Storia patria, Membro del Consiglio degli Archivi e dell'Istituto storico italiano, Commissario di S. M. presso la Consulta araldica, Bibliotecario e Conservatore del Medagliere di S. M. (Incaricato), Dottore *honoris causa* della R. Università di Tübingen, Gr. Uffiz. ❋ e Gr. Cord. ♔, Balì Gr. Cr. d'on. e devoz. del S. M. O. di Malta, decorato di Ordini stranieri. — *Torino, Via Ospedale, 19.*
17 giugno 1877 - 11 luglio 1877. — Pensionato 28 febbraio 1886.

Boselli (Paolo), *predetto.*
15 gennaio 1888 - 2 febbraio 1888. — Pensionato 13 ottobre 1897.

Pizzi (Nobile Italo), Dottore in Lettere, Professore di Persiano e Sanscrito nella R. Università di Torino, Socio corrispondente della Società Colombaria di Firenze, Dottore onorario dell'Università di Lovanio, Socio corrispondente dell'Ateneo Veneto, dell'Accademia Petrarchesca di Arezzo, dell'Accademia Dafnica di Acireale, dell'Accademia dell'Arcadia di Roma, dell'Accademia Reale di Napoli, dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, della R. Accademia Peloritana di Messina, ❋, ♔. — *Torino, Corso Vittorio Emanuele, 16.*
8 gennaio 1899 - 22 gennaio 1899. — Pensionato 16 giugno 1907.

Chironi (Dott. Giampietro, *predetto*).
20 maggio 1900 - 31 maggio 1900. — Pensionato 20 maggio 1907.

De Sanctis (Gaetano), Dottore in Lettere, Professore di Storia antica nella R. Università di Torino, Socio ordinario della Pontificia Accademia romana di Archeologia, ❋ e ♔. — *Torino, Corso Vittorio Emanuele, 44.*
21 giugno 1903 - 8 luglio 1903. - Pensionato 15 febbraio 1912.

Ruffini (Francesco), Senatore del Regno, Dottore in Giurisprudenza, Membro corrispondente del Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Professore di diritto ecclesiastico nella R. Univ. di Torino, Grand'Uff. ❋ e ♔. — *Torino, Via Principe Amedeo, 22.*
21 giugno 1903 - 8 luglio 1903. — Pensionato 19 giugno 1913.

Stampini (Ettore), *predetto.*
20 maggio 1906 - 9 giugno 1906. — Pensionato 24 gennaio 1915.

Brondi (Vittorio), Dottore in Giurisprudenza, Professore ordinario di Diritto amministrativo e Scienza dell'Amministrazione e Preside della Facoltà di Giurisprudenza nella R. Università di Torino, Membro del Consiglio superiore della Pubblica Istruzione e della Sezione della Giunta per

l'Istruzione primaria e popolare, Socio corrispondente onorario del Circolo di Studi sociali di Firenze, Membro della Società internazionale per lo studio delle questioni di assistenza (Parigi), Comm. ♕ e ✻. — *Torino, Via Montebello, 26*

17 febbraio 1907 - 19 aprile 1907. — Pensionato 4 febbraio 1917.

Sforza (Conte Giovanni), Accademico della Crusca, Vice-Presidente della R. Deputazione di Storia patria di Modena per la Sotto-Sezione di Massa e Carrara, Socio effettivo di quelle delle antiche Provincie e della Lombardia, di Parma e Piacenza, e della Toscana, Socio onorario della R. Deputazione Veneta di Storia patria, Corrispondente della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, dell'Ateneo di Brescia, della Società Ligure di Storia patria, della R. Accademia Lucchese, Socio onorario della R. Accademia di Belle Arti di Carrara, Membro d'onore dell'*Académie Chablaisienne* di Thonon-les-Bains, Membro aggregato dell'*Académie des Sciences, Belles Lettres et Arts de Savoie,* Socio della R. Commissione per i testi di lingua, Membro della Commissione Araldica Piemontese, della Società di Storia patria di Vignola, della Commissione municipale di Storia patria e belle arti della Mirandola, della Commissione Senese di Storia patria e della Società storica di Carpi, Corrispondente della R. Accademia Valdarnese del Poggio in Montevarchi, della Società Georgica di Treia, della Colombaria di Firenze, e del Comitato nazionale per la Storia del Risorgimento italiano, Socio effettivo della Società Piemontese di Archeologia e Belle Arti, Presidente onorario della R. Accademia dei Rinnovati di Massa, Soprintendente del R. Archivio di Stato di Torino, Gr. Uff. dell'Ordine del Medjidiè, Comm. ✻ e ♕. — *Via S. Dalmazzo, 24.*

17 febbraio 1907 - 19 aprile 1907. — Pensionato . . . . .

Einaudi (Luigi), *predetto.*

10 aprile 1910 - 1° maggio 1910. — Pensionato . . . . .

Baudi di Vesme (Alessandro dei conti), Dottore in Giurisprudenza, Soprintendente alle Gallerie ed ai Musei medioevali, ecc. del Piemonte e della Liguria, Direttore della R. Pinacoteca di Torino, Vice Presidente della R. Deputazione sovra gli Studi di Storia patria per le Antiche Provincie e la Lombardia. — *Via dei Mille, 54.*

10 aprile 1910 - 1° maggio 1910.

Schiaparelli (Ernesto), Dottore in Lettere, Professore incaricato di Egittologia nella R. Università di Torino, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Corrispondente del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Membro onorario dell'Istituto Khediviale egiziano e della Società Asiatica di Francia, della Società di Archeologia biblica di Londra, Direttore del R. Museo di Antichità di Torino, Soprintendente dei Musei e Scavi di antichità per il Piemonte e la Liguria, Uff. ✻, Comm. ♕.

10 aprile 1910 - 1° maggio 1910.

Patetta (Federico), Dottore in Giurisprudenza, Professore di Storia del Diritto italiano nella R. Università di Torino, Socio effettivo della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, Membro della R. Deputazione sovra gli Studi di Storia patria per le Antiche Provincie e la Lombardia, Socio corrispondente della R. Deputazione di Storia patria per l'Umbria e della R. Deputazione di Storia patria per le Provincie Modenesi, Socio fondatore della Commissione Senese di Storia patria, Socio effettivo della Società Piemontese di Archeologia e Belle Arti, Comm. — *Via S. Massimo, 44.*
3 maggio 1914 – 11 giugno 1914.

Vidari (Giovanni), Dottore in Lettere e Filosofia, Professore ordinario di Pedagogia e già Preside della Facoltà di Filosofia e Lettere, Rettore della R. Università di Torino, Membro del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Socio corrispondente della R. Accademia dei Lincei e dell'Ateneo di Brescia, Presidente della Società Filosofica italiana, Comm. — *Via Valeggio, 15.*
31 gennaio 1915 – 14 febbraio 1915.

Prato (Giuseppe), Dottore in Giurisprudenza, Professore ordinario di Economia politica e Scienza delle finanze nel R. Istituto superiore di Studi commerciali di Torino, Professore incaricato di Diritto industriale nella R. Università di Torino, Membro effettivo della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria per le Antiche Provincie e la Lombardia, Socio ordinario della R. Accademia di Agricoltura di Torino, Socio corrispondente della R. Accademia Economico-Agraria dei Georgofili in Firenze. — *Via Bertola, 37.*
31 gennaio 1915 – 14 febbraio 1915.

Cian (Vittorio), Dottore in Lettere, Socio corrispondente del R. Istituto Veneto, Membro effettivo della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria per le Antiche Provincie e la Lombardia e di quella di Venezia. — *Via G. Berchet, 2.*
20 maggio 1917 – 10 giugno 1917.

Pacchioni (Giovanni), Dottore in Giurisprudenza, Professore di diritto romano nella R. Università di Torino, già Professore ordinario di diritto romano nella Università di Innsbruch, Socio corrispondente della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena e dell'Accademia degli Agiati di Rovereto. — *Via Cibrario, 54.*
20 maggio 1917 – 10 giugno 1917.

Valmaggi (Luigi), Dottore in Lettere, Professore ordinario di Grammatica greca e latina e Preside della Facoltà di Filosofia e Lettere nella R. Università di Torino, Socio corrispondente dell'Accademia Properziana del Subasio in Assisi, della R. Accademia Virgiliana di Mantova, della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Padova, Comm. — *Via S. Secondo, 31.*
20 maggio 1917 – 10 giugno 1917.

ACCADEMICI NAZIONALI NON RESIDENTI

Comparetti (Domenico), Senatore del Regno, Professore emerito dell'Università di Pisa e del R. Istituto di Studi superiori, pratici e di perfezionamento in Firenze, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, della R. Accademia delle Scienze di Napoli, Socio corrispondente dell'Accademia della Crusca, del R. Istituto Lombardo e del R. Istituto Veneto, Membro della Società Reale pei testi di lingua, Socio straniero dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere) e corrispondente della R. Accademia delle Scienze di Monaco, di Vienna, di Copenhagen e di Pietroburgo, Dottore *ad honorem* delle Università di Oxford, di Cracovia e di Atene, Uff. ✻, Comm. ⊂⊃, Cav. ✠. — *Firenze, Via Lamarmora, 20.*
20 marzo 1892 - 26 marzo 1892.

Scialoja (Vittorio), Senatore del Regno, Dottore in Giurisprudenza, Professore ordinario di Diritto romano nella R. Università di Roma, Professore onorario della Università di Camerino, Socio corrispondente della R. Accademia dei Lincei e delle RR. Accademie di Napoli, di Bologna, di Modena e di Messina, Socio onorario della R. Accademia di Palermo, ecc., Gr. Uffiz. ✻, Gr. Cr. ⊂⊃. — *Roma, Piazza Grazioli, 5.*
29 marzo 1903 - 9 aprile 1903.

Rajna (Pio), Dottore in Lettere, Dottore *honoris causa* dell'Università di Giessen, Professore ordinario di Lingue e Letterature neo-latine nel R. Istituto di Studi superiori di Firenze, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Accademico residente della Crusca, Socio ordinario non residente della Società Reale di Napoli, Socio ordinario della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria per la Toscana, Socio Urbano della Società Colombaria, Socio onorario della R. Accademia di Padova, della Società Dantesca americana, della *New Language Association of America,* della *Société néophilologique* dell'Università di Pietrogrado, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, del R. Istituto Veneto, dell'Ateneo Veneto, della R. Accademia di Palermo, della R. Accademia delle Scienze di Berlino, della R. Società delle Scienze di Göttingen, dell'Istituto di Francia (Académie des Inscriptions et Belles-Lettres), della Società Reale di Scienze e Lettere di Göteborg, dell'Accademia R. Lucchese, ✠, Uff. ✻, Gr. Uff. ⊂⊃. — *Firenze, Piazza d'Azeglio, 13.*
29 marzo 1903 - 9 aprile 1903.

Guidi (Ignazio), Senatore del Regno, Professore ordinario di Ebraico e di Lingue semitiche comparate nella R. Università di Roma, Socio e Segretario della Classe di scienze morali, storiche e filologiche della R. Accademia dei Lincei, ✠, Uff. ❋, ♔, C. O. St. P. di Svezia. — *Roma, Botteghe Oscure, 24.*
12 aprile 1908 - 14 maggio 1908.

Pigorini (Luigi), Senatore del Regno, Direttore dei Musei Preistorico e Etnografico, Professore ordinario di Paleoetnologia nella R. Università di Roma, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei ✠, Comm. ❋, Gr. Uff. ♔. — *Roma, Via del Collegio Romano, 26.*
12 aprile 1908 - 14 maggio 1908.

D'Ovidio (Francesco), Senatore del Regno, Professore ordinario di Storia comparata delle letterature neo-latine nella R. Università di Napoli, Socio ordinario della Società Reale di Napoli, Socio nazionale e Presidente della R. Accademia dei Lincei, Accademico della Crusca, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, dell'Ateneo di Brescia, Socio straniero della *Dante Society* d'America, ✠, Comm. ❋ e ♔. — *Napoli, Largo Latilla, 6.*
31 gennaio 1915 - 14 febbraio 1915.

Fraccaroli (Giuseppe), Professore ordinario di Letteratura greca nella R. Università di Pavia, Socio corrispondente del Reale Istituto Lombardo di scienze e lettere, della R. Accademia Peloritana di Messina, della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Padova e dell'Accademia di Agricoltura, Scienze, ecc. di Verona, ♔. — *Pavia.*
31 gennaio 1915 - 14 febbraio 1915.

ACCADEMICI STRANIERI

Brugmann (Carlo), Professore nell'Università di Lipsia. — 31 gennaio 1897 - 14 febbraio 1897.

Wundt (Guglielmo), Professore nell'Università di Lipsia. — 29 marzo 1903 - 9 aprile 1903.

Duchesne (Luigi), Membro dell'Istituto di Francia, Direttore della Scuola Francese in Roma. — 12 aprile 1908 - 14 maggio 1908.

CORRISPONDENTI

Sezione di Scienze Filosofiche.

Pinloche (Augusto), Prof. nel Liceo Carlomagno di Parigi. — 15 marzo 1896.
Chiappelli (Alessandro), Senatore del Regno, Professore emerito della R. Università di Napoli. — 15 marzo 1896.
Masci (Filippo), Senatore del Regno, Professore nella R. Università di Napoli. — 14 giugno 1903.
Zuccante (Giuseppe), Professore nella R. Accademia scientifico-letteraria di Milano. — 31 maggio 1908.
Gentile (Giovanni). Prof. nella R. Università di Pisa. — 17 maggio 1914.
Martinetti (Pietro). Prof. nella R. Accademia scientifico-letteraria di Milano. — Id. id.
Bergson (Enrico Luigi), Membro dell'Istituto di Francia. — Id. id.

Sezione di Scienze Giuridiche e Sociali.

Schupfer (Francesco), Senatore del Regno, Professore nella R. Università di Roma. — 14 marzo 1886.
Gabba (Carlo Francesco), Senatore del Regno, Prof. nella R. Univ. di Pisa. — 3 marzo 1889.
Buonamici (Francesco). Senatore del Regno, Prof. nella R. Università di Pisa. — 16 marzo 1890.
Bonfante (Pietro), Prof. nella R. Università di Roma. — 21 giugno 1903.
Toniolo (Giuseppe), Prof. nella R. Università di Pisa. — 10 giugno 1906.
Brandileone (Francesco), Prof. nella R. Università di Bologna. — Id. id.
Brini (Giuseppe), Prof. nella R. Università di Bologna. — Id. id.
Fadda (Carlo), Senatore del Regno, Prof. nella R. Università di Napoli. — Id. id.
Filomusi-Guelfi (Francesco), Senatore del Regno, Prof. nella R. Università di Roma. — Id. id.
Polacco (Vittorio), Senatore del Regno, Prof. nella R. Università di Padova. — Id. id.
Stoppato (Alessandro), Prof. nella R. Università di Bologna. — Id. id.
Iannaccone (Pasquale), Prof. nella R. Univ. di Torino. — 17 maggio 1914.
Montalcini (Camillo), Prof., Segretario generale degli uffizi amministrativi della Camera dei Deputati. — Id. id.

Sezione di Scienze Storiche.

Birch (Walter de Gray), del Museo Britannico di Londra. — 14 marzo 1886.
Chevalier (Canonico Ulisse), Romans. — 26 febbraio 1893.
Bryce (Giacomo), Londra. — 15 marzo 1896.
Venturi (Adolfo), Professore nella R. Università di Roma. — 31 maggio 1908.
Luzio (Alessandro), Direttore del R. Archivio di Stato in Mantova. — 31 maggio 1908.
Meyer (Edoardo), Prof. nell'Università di Berlino. — Id. id.
Lippi (Silvio), Direttore dell'Archivio di Stato di Cagliari. — Id. id.

Sezione di Archeologia ed Etnografia.

Lattes (Elia), Membro del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Milano. — 14 marzo 1886.
Barnabei (Felice), Roma. — 28 aprile 1895.
Orsi (Paolo), Dirett. del Museo Archeologico di Siracusa. — 31 maggio 1908.
Patroni (Giovanni), Professore nella R. Università di Pavia. — Id. id.

Sezione di Geografia.

Dalla Vedova (Giuseppe), Senatore del Regno, Professore emerito nella R. Università di Roma. — 28 aprile 1895.
Bertacchi (Cosimo), Professore nella R. Univ. di Torino. — 21 giugno 1903.

Sezione di Linguistica e Filologia orientale.

Marre (Aristide), Vaucresson (Francia). — 1° febbraio 1885.
Salvioni (Carlo), Professore nella R. Accademia scientifico-letteraria di Milano. — 31 maggio 1908.
Parodi (Ernesto Giacomo), Professore nel R. Istituto di Studi superiori, pratici e di perfezionamento in Firenze. — Id. id.
Schiaparelli (Celestino), Professore nella R. Università di Roma. — Id. id.

Sezione di Filologia, Storia letteraria e Bibliografia.

Del Lungo (Isidoro), Senatore del Regno, Socio residente della R. Accademia della Crusca (Firenze). — 16 marzo 1890.
Rossi (Vittorio), Professore nella R. Università di Roma. — Id. id.
Boffito (Giuseppe), Professore nel Collegio delle Querce in Firenze. — Id. id.

Biadego (Giuseppe), Bibliotecario della Biblioteca Civica di Verona. — Id. id.

Vitelli (Gerolamo), Professore emerito nel R. Istituto di Studi superiori, pratici e di perfezionamento in Firenze. — 31 maggio 1908.

Flamini (Francesco), Professore nella R. Università di Pisa. — Id. id.

Gorra (Egidio), Professore nella R. Università di Torino. — Id. id.

Sabbadini (Remigio), Professore nella R. Accademia scientifico-letteraria di Milano. — Id. id.

Zuretti (Carlo Oreste), Professore nella R. Accademia scientifico-letteraria di Milano — Id. id.

MUTAZIONI

AVVENUTE

nel Corpo Accademico dal 31 Dicembre 1916
al 31 Dicembre 1917.

ELEZIONI

SOCI

Chironi (Giampietro).
Brondi (Vittorio) . . .
Einaudi (Luigi) . . . .
Prato (Giuseppe) . . .
Vidari (Giovanni) . . .
Stampini (Ettore). . .

Eletti nelle adunanze della Classe di scienze morali storiche e filologiche del 7 e 21 gennaio 1917

Mattirolo (Oreste) . .
Guareschi (Icilio). . .
Guidi (Camillo) . . . .
Foà (Pio). . . . .
Grassi (Guido). . . . .
Parona (Carlo Fabr.)

Eletti nelle adunanze della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali del 14 e 28 gennaio 1917

per comporre la Commissione per lo studio dei problemi connessi allo stato di guerra e del dopo guerra.

La Commissione è presieduta dal Presidente dell'Accademia.

Carle (Giuseppe) . . .
Sforza (Giovanni). . .

Nominati delegati della Classe di scienze morali, storiche e filologiche presso il Consiglio di Amministrazione dell'Accademia nell'adunanza del 4 marzo 1917.

D'Ovidio (Enrico), rieletto Direttore della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali nell'adunanza privata dell'11 marzo 1917, e approvata la elezione con Decreto Luogotenenziale del 12 aprile 1917.

Cian (Vittorio). . . . .
Pacchioni (Giovanni)
Valmaggi (Luigi) . . .

Professori della R. Università di Torino

eletti Soci nazionali residenti nell'adunanza del 20 maggio 1917 della Classe di scienze morali, storiche e filologiche, e approvata l'elezione con Decreto Luogotenenziale del 10 giugno 1917.

D'Ovidio (Enrico), eletto nell'adunanza del 27 maggio 1917 della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali, membro della Commissione per il premio Vallauri (Scienze fisiche, quadriennio 1915-1918) in sostituzione del compianto Socio Balbiano.

D'Ovidio (Enrico), nominato nell'adunanza delle Classi unite del 27 maggio 1917 rappresentante dell'Accademia nel Consiglio di Amministrazione del Consorzio Universitario.

Grassi (Guido). . . . . } della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali
Somigliana (Carlo). . }
Schiaparelli (Ernesto) } della Classe di scienze morali, storiche e filologiche
Patetta (Federico) . . }

eletti nell'adunanza a Classi unite del 10 giugno 1917 per integrare la Commissione del premio Bressa ai termini dell'art. 4 del Regolamento interno per il premio.

Cian (Vittorio). . . . . }
Stampini (Ettore) . . }
Sforza (Giovanni) . . }
Valmaggi (Luigi) . . . }

eletti nell'adunanza del 25 novembre 1917 della Classe di scienze morali, storiche e filologiche, per comporre, insieme col Presidente dell'Accademia, la Commissione per il premio Gautieri riservato alla Letteratura (triennio 1914-1916).

De Sanctis (Gaetano), eletto nell'adunanza del 25 novembre 1917 della Classe di scienze morali, storiche e filologiche membro del Consiglio di Amministrazione dell'Accademia in sostituzione del defunto Socio Senatore Giuseppe Carle.

MORTI

4 Gennaio 1917.

Chauveau (G. B. Augusto), Socio corrispondente della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di zoologia, anatomia e fisiologia comparata).

16 Gennaio 1917.

D'Ercole (Pasquale), Socio nazionale residente della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.

23 Febbraio 1917.

Darboux (Giovanni Gastone), Socio straniero della Classe di scienze fisiche' matematiche e naturali.

8 Marzo 1917.

Balbiano (Luigi), Socio nazionale residente della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

15 Giugno 1917.

Helmert (Federico Rōberto), Socio straniero della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali.

17 Luglio 1917.

Veronese (Giuseppe), Socio corrispondente della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di matematiche pure).

7 Settembre 1917.

Meyer (Paolo), Socio straniero della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.

10 Settembre 1917.

Simoncelli (Vincenzo), Socio corrispondente della Classe di scienze morali, storiche e filologiche (Sezione di scienze giuridiche e sociali).

17 Novembre 1917.

Carle (Giuseppe), Socio nazionale residente della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.

22 Novembre 1917.

Camerano (Lorenzo), Presidente dell'Accademia, Socio della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

7 Dicembre 1917.

Villari (Pasquale), Socio nazionale non residente della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.

. . . . . 1917.

Meyer (Ernesto), Socio corrispondente della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di chimica generale ed applicata).

. . . . . 1917.

Dastre (Alberto Giulio), Socio corrispondente della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di zoologia, anatomia e fisiologia comparata).

PUBBLICAZIONI PERIODICHE RICEVUTE DALL'ACCADEMIA

Dal 1° Gennaio al 31 Dicembre 1917.

NB. Le pubblicazioni notate con * si hanno in cambio;
quelle notate con ** si comprano; e le altre senza asterisco si ricevono in dono.

* **Acireale**. R. Accademia di scienze, lettere ed arti degli Zelanti. Rendiconti e Memorie. — Memorie della Classe di lettere, ser. 3ª, vol. IX, 1915-1916.

* **Amsterdam**. Société Mathématique. Index du Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques. 3me édition.

Barcelona. Junta de Ciencias Naturals. — Primavera de 1917. Cursos elemental de Geologia, Mineralogia, Botanica descriptiva, Zoologia i Estudis de la Naturalesa. Matricula gratuita. — Musei Barcinonensis Scientiarum Naturalium Opera. Ser. zoologica; I, III, V-VII, XI; Ser. botanica, I-II; Ser. biologica-oceanografica, I.

* — Real Academia de Ciencias y Artes. Nómina del Personal Académico. 1916-1917. — Memorias, 3ª época, vol. XIII, 1-18; Boletín, 3ª época, vol. IV, 1.

* **Basel**. Naturforschenden Gesellschaft Verhandlungen. Bd. XXVII.

Batavia. Observatorio, Java. Seismological Bulletin, 1916, April-May.

* **Bergen**. Bergens Museums. Aarbok, 1915-1916. — Naturvidenskabelig raekke. N. 3, 2 Hefte. — Historisk-Antikvarisk raekke, N. 1. — Aarsberetning for 1915–1916. — An Account of the Crustacea of Norway, vol. VI, Copepoda Cyclopoida Ps. XI & XII. — Clausidiidae Lichomolgidae (part).

* **Berkeley**. University of California. Chronicle and Official Record, vol. XVIII, 1–2. — Agricultural sciences, vol. I, 9-10. — American Archaeology and Ethnology, vol. XI, 5-7; XII, 1. — Botany, vol. VI, 9-12. — Economics, vol. IV, 2. — Geology, vol. IX, 5–18; X, 1. — Physiology, vol. V, 2. — Zoology, vol. XII, 13–16; XIII, 11–12; XVI, 6–15.

* **Berne**. Commission Géologique de la Société Helvétique des sciences naturelles: Matériaux pour la carte géologique de la Suisse; II Sér., Livrs. 20 III, 30 II, 46 I, II. — 1 Carte spéciale N° 66 avec planches et profil.

* **Bologna**. R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna. Classe di Scienze morali. Sezione di scienze storico-filologiche: Memorie, ser. 1ª,

T. X, fasc. unico. Sezione di scienze giuridiche: Memorie, ser. 1ª, T. X, fasc. unico. — Rendiconto: Ser. 1ª, vol. IX (1915-16), fasc. 2° ed ultimo.

* **Bologna**. Società Medico-Chirurgica. Bollettino delle scienze mediche. Serie 9ª, vol. IV, 11-12; V, 1-11.

* — Biblioteca Comunale. Bullettino, L'Archiginnasio. 1917, 1-4.

* **Bordeaux**. Annales de la Faculté des Lettres et des Universités du Midi. Sér. 4me: Bulletin Hispanique, t. XVIII, 4; XIX, 1-3. — Bulletin italien, t. XVI, 3-4; XVII, 1-2. — Revue des études anciennes, t. XIX, 1-3.

* **Brescia**. Ateneo di scienze, lettere ed arti. Commentari per l'anno 1916.

* **Brooklyn**. Museum of the Brooklyn Institute of Arts and Sciences. Sciences Bulletin, vol. II, 6.

Buenos-Aires. Ministerio de Agricultura de la Nación República Argentina. Oficina Meteorológica Nacional: Boletín mensual, Año I, N. 2-11, 1916.

* — Sociedad Química Argentina. Anales, t. IV, 15-16; V, 17, 18.

— Ciudad de Buenos-Aires. Boletín mensual de Estadística Municipal: Année XXXme, 1916, 9-12.

— Dirección general de Estadística de la Provincia. Año XVI, 181-183.

* **Cagliari**. R. Università. Istituto Economico giuridico. Studi economico-giuridici pubblicati per cura della Facoltà di Giur., An. VIII, 1915, P. 2ª.

* **Calcutta**. Geological Survey of India: Memoirs, vol. XLIII, P. 2. — Records, vol. XLVII, P. 3-4.

— Board of scientific Advice for India. Annual Report for the year 1915-1916.

* **Cambridge**. Cambridge Philosophical Society. Proceedings, vol. XIX, Parts 1-3. — Transactions, vol. XXII, 10, 11.

* **Cape-Town**. Royal Society of South-Africa. Transactions, vol. V, P. 6ª; VI, P. 1ª.

* **Catania**. Accademia Gioenia di scienze naturali. Atti, ser. 5ª, vol. IX (1916). - Bollettino delle Sedute, fasc. 40-42.

* — Società degli Spettroscopisti italiani. Memorie, Ser. 2ª, vol. V, N. 12, vol. VI, 1-10.

Chicago. John Crerar Library. Twenty-Second Annual Report for the Year 1916.

* — Field Museum of Natural History. Report Ser., vol. V, 1. — Anthropological Ser., vol. VI, 4. — Botanical Ser., vol. II, 11. — Geological Ser., vol. III, 10. — Ornithological Ser., vol. I, 10. — Zoological Ser., vol. X, 14.

* **Cincinnati**. Lloyd Library. Bibliographical Contribution, vol. II, 10-11.

Columbus. Ohio State University. Bulletin, vol. XXI, 11, 28.

* — Ohio Academy of Science and of the Ohio State University Scientific Society The Ohio Journal of Science, vol. XVII, N. 1-8.

* **Edinburgh**. Royal Society. Proceedings, vol. XXXVI, P. 3 and 4: XXXVII, P. 1-8. — Transactions, vol. LI, P. 1-4.

* **Firenze**. R. Accademia Economico-Agraria dei Georgofili. Atti, 5ª Ser., vol. XIV, disp. 1-4.

— Società " Leonardo da Vinci ". La tutela dei monumenti durante la guerra.

Formosa Government. Icones Plantarum ad Floram Formosanam by Bunzo Hayata, vol. VI.

* **Gap**. Société d'Études des Hautes-Alpes. Bulletin, 4e Série, 1915-1916, N. 14-16.

* **Genève**. Société de Physique et d'Histoire naturelle. Compte rendu des Séances, XXXIII, 1916.

* — Observatoire. Résumé météorologique de l'année 1915 pour Genève et le Grand Saint-Bernard; par R. Gautier. — Observations météorologiques faites aux fortifications de Saint-Maurice pendant l'année 1915; par Gautier et Rod. — Rapport sur le Concours de réglage de chronomètres de l'année 1916; par Gautier.

* **Genova**. Società Ligure di Storia patria. Atti, vol. XLVIII.

* — Società di letture e conversazioni scientifiche. Rivista ligure di scienze, lettere ed arti. Annali, XLIV, 1-3.

* — Regia Scuola Navale superiore. Relazione del Consiglio Direttivo sull'andamento della Scuola nell'anno accademico 1915-16.

* **Haarlem**. Société hollandaise des sciences. Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles; Sér. III, A (Sciences exactes), t. IV, livr. 1re; Sér. III, B. (sciences exactes), t. III, livr. 1re.

* **Hobart**. Royal Society of Tasmania. Papers and Proceedings, 1916.

Jowa City. University of Jowa Monographs: First ser. N. 3. Catalogue and price list 1888-1916.

* University of Jowa. Bulletins from the Laboratories of Natural History, vol. III, 3. — Bibliography of the publications of the University and its Members 1913-1914.

* **Kasan**. Société Physico-Mathématique. Bulletin, 2e sér., t. XX, XXI.

Kiōto. Scholae Medicinalis Universitatis Imperialis Acta, vol. I, fasc. 3-4; II, 1.

Kodaikánal. Kodaikánal Observatory. Bulletin, LIII-LIV.

Kyoto. Imperial University. College of Science. Memoirs, vol. I, N. 8-10; II, 1-2.

* **La Plata**. Universidad Nacional. Facultad de Ciencias físicas, matemáticas y astronómicas. — Contribución al Estudio de las ciencias físicas y matemáticas, N. 24-26.

Lima. Ministerio de Fomento. Cuerpo de Ingenieros de Minas del Perú. Boletín, N. 82, 83.

* **Lisboa**. Sociedades Portuguesa des Sciencias naturals. Memorias, I, II. — Bulletin, t. VII, 2.

Livorno. R. Accademia Navale. Pubblicazioni dell'Istituto elettrotecnico e radiotelegrafico della R. Marina. N. 1-3.

* **London**. Royal Society. Year Book, 1917. Proceedings, Ser. A, vol. *93*, N. 647-655; *94*, 656; Ser. B, vol. *89*, N. 618-622; *90*, 623. — Transactions, Ser. A, vol. *217*, N. 551-557; Ser. B, vol. *208*, N. 352-354.

** — Royal Society. Catalogue of Scientific Papers. 5a Ser., 1884-1900.

* — Royal Astronomical Society. Monthly Notices, vol. LXXVII, n. 1-9. — Memoirs, vol. LXI, LXII, P. 1a-2a.

* — Geological Society. List, September 1916. Quarterly Journal, vol. LXXI, P. 4; LXXII, P. 1-3.

* **London**. Linnean Society. List, 1917-1918; Proceedings, 129th Session. November 1916-June 1917: Journal: Botany, vol. XLIII, No. 292-294. — Zoology, vol. XXXIII, No. 223.
* — London Mathematical Society. Proceedings, vol. XV, P. 6; XVI, P. 1-4.
* — Royal Microscopical Society. Journal 1916, P. 6; 1917, P. 1-5.
* — Royal Society of Literature. Transaction, 2nd Ser., vol. XXXIV, XXXV.
* — British Association. Report for the Advancement of Science, Newcastle-on-Tyne Meeting, 1916.
* **Lyon**. Société d'Agriculture, Sciences et Industrie. Annales, 1914-1915.
* — Société Linnéenne. Annales 1916, N. Sér., t. LXI, LXII, LXIII.
* **Madison**. Wisconsin Academy of Sciences, Arts and Letters. Transactions, vol. VIII, P. 1.

Madras. Kodaikánal and Madras Observatories. Annual Report 1916.

* **Madrid**. Real Academia de la Historia. Boletín, t. LXIX, 6, 1916; LXX, 1-6, 1917; LXXI, 1-5.
* — Real Academia de Ciencias exactas, físicas y naturales. Anuario 1917, Revista, t. XIV, 12; XV, 1-5.
* — Sociedad Matemática Española. Revista, an. 5°, n. 50; 6°, 51-52. — Suplemento, cuaderno 1-3.
* — Laboratorio y Seminario Matemático. Publicationes: Tomo I-II. — Memoria 1-3.

Melbourne. Department of Agriculture. Bitter Pit investigation. The cause and control of Bitter Pit, with the results of experimental investigation. By D. Mc Alpine, ecc. Fifth report. 1915-16. 1 vol. 4°.

* **Messina**. R. Accademia Peloritana. Atti, vol. XXVII.

México. Observatorio Meteorológico Magnético Central. Boletín mensual 1914 Abril-Diciembre; An. 1915; 1916, n. 1-10.

* **Milano**. R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Rendiconti, Ser. II, vol. XLIX, fasc. 15-20; L, 1-13. — Memorie: Classe di scienze matematiche e naturali, vol. XXI, 11; XXII, 1, 2; Classe di scienze morali e storiche, vol. XXII, 9-11; XXIV, 1. — Fondazione scientifica Cagnola: Atti, vol. XXV, anni 1915-1916.
* — Società Italiana di Scienze naturali e Museo Civico di Storia naturale. Atti, vol. LV, fasc. 2-4; LVI, 1. — Memorie, vol. VIII, fasc. 2.

— R. Osservatorio Astronomico di Brera. Anno 1918. Articoli del Calendario ed effemeridi del sole e della luna per l'orizzonte di Milano. Con Appendice. — Pubblicazioni, n. LIII, LIV.

— R. Commissione Geodetica italiana. Sulla riduzione al vuoto delle durate di oscillazione di pendoli gravimetrici. Memoria. Bologna, 1916; 4°. — Calcolo della differenza di longitudine tra Catania e Palermo, determinata telegraficamente nel 1894. Roma, 1916; 4°. — Determinazione della latitudine dell'Osservatorio di Catania; eseguita nel luglio-agosto 1913. Roma, 1917; 4°. — Determinazione della latitudine dell'Osservatorio Etneo, eseguita nel 1913 con il metodo di Horrebow-Talcott. Roma, 1917; 4°. — Differenza di longitudine fra Roma (M. Mario) e Napoli (Osserv. di Capodimonte), determinata nei mesi di giugno e luglio 1909. Roma, 1917; 4°.

* **Milano** (città). Bollettino municipale mensile di cronaca amministrativa e di statistica, an. XXXII, 11-12; XXXIII, 1-11.
* **Minneapolis**. University of Minnesota. Agricultural Experiment station.
* — Contributions from the Department of Anatomy, vol. III, 1914-1915. Bulletin, 153-159.
* **Monaco**. Institut Océanographique. Bulletin, nos 323-328. — Résultats des Campagnes scientifiques, fasc. 50, 51. — Table des matières, vol. 1 à 13; nos 1 à 323 (1904-1916). — Les Grottes de Grimaldi (Baoussé-Roussé), 5 fasc. in due tomi, 1906-1912; 4° (*Dono di S. A. SS. il Principe Alberto di Monaco*).
* **Moncalieri**. Osservatorio del Real Collegio Carlo Alberto. Bollettino Meteorologico e Geodinamico. Osservazioni meteorologiche, 1915 maggio-dicembre; 1916 gennaio-dicembre; 1917 gennaio-agosto. — Osservazioni sismiche, 1915, 3-11; 1916, 1-8; 1917, 1-5.
* **Montpellier**. Académie des Sciences et Lettres. Bulletin mensuel, 1916, nn. 6-12; 1917, 1-7.
* **Moscou** Université. Société Mathématique. Recueil, vol. XXIX, 4.
* **Nancy**. Académie de Stanislas. Mémoires, 6e Série, t. XII, XIII.
* **Napoli**. Società Reale. Annuario 1917. — Accademia delle scienze fisiche e matematiche: Rendiconto, Ser. 3a, vol. XXII, fasc. 11-12; XXIII, 1-9. — Accademia di scienze morali e politiche: Rendiconto, an. LV, gennaio a dicembre 1916. — Accademia di Archeologia, Lettere e Belle Arti: Rendiconto, Nuova Serie, an. XXX, 1916; Atti, N. Ser., vol. V.
* — R. Istituto d'Incoraggiamento. Atti, Ser. 6a, vol. LXVIII, 1916.
* — Accademia Pontaniana. Atti, vol. XLVI.
* — Società dei Naturalisti. Bollettino, vol. XXIX, XXX, 1916.
* — R. Università. Commemorazione di Francesco De Sanctis nel primo centenario della nascita.
* **New-York**. New York Public Library. Bulletin, 1916, n. 11-12; 1917, 1-9.
* — New York Academy of Sciences. Annals, vol. XXVII, pp. 31-191.
* — American Mathematical Society. — List of Officers and Members, January 1917. — Bulletin, vol. XXIII, n. 3-10; XXIV, 1-2. — Transactions, vol. XVIII, n. 1-3.

Oberlin (Ohio). Wilson Ornithological Club. Wilson Bulletin, vol. XXVIII, 3, 4; XXIX, 1-4.

— Oberlin College. Laboratory Bulletin, no. 16, 18.

* **Ottawa**. Royal Society of Canada. Section I. Mémoires: Littérature française, Histoire, Archéologie, etc. Ser. III, vol. X, January-March 1917. — Section II. Transactions: English Literature, History, Archeology, etc. Ser. III, vol. X, January-March 1917. — Section III. Transactions: Mathematical, Physical and Chemical Sciences. Ser. III, vol. X, January-March 1917. — Section IV. Geological and Biological Sciences. Ser. III, vol. X, January-March 1917.

— Ministère des Mines, Division des Mines. Bulletin, 9, 11, 14, 15, 17. — Catalogue des publications en français. — Rapport sommaire pour l'année civile terminée le 31 décembre 1915. — La région cuprifère de White-horse, territoire du Yukon. — Rapport annuel de la production miné-

raire au Canada durant l'année civile 1914. — Produits et sous-produits de la Houille. — Rapport sur les Dépôts salifères du Canada et l'industrie du sel. — Ressource du Canada en pétrole et en gaz naturel, I. — Réduction électrothermique des minéraux de Suède. — Galvanoplastic au Cobalt, 3^{me} Part. — Recherches sur un gisement de phosphate signalé dans l'Alberta. — Le district ferrifère de Moose-Mountin, Ontario. — Les gisements de Magnétite près de Calabogie, comté de Renfrew, Ontario. — Les propriétés magnétiques du Cobalt et du Fe, Co. — Rapport sur les minéraux non-métalliques employés dans les industries manufacturières du Canada.

Ottawa. Ministère des Mines, Division des Mines. Tourbe, Lignite et Houille.

— Department of Mines. Mines Branch: Report on the Building and Ornamental Stone of Canada, vol. IV. — Annual Report on the Mineral production of Canada during the Calendar Year 1915. — Preliminary Report of the Mineral production of Canada, 1916.

— Ministère des Mines. Commission Géologique. Memoirs: 32, 34, 40, 41 51, 54–57, 67-69, 72, 73, 77, 79, 81, 82, 87. — Rapport sommaire pour l'année civile 1915.

— Ministère des Mines. Commission Géologique. Musée de la Commission Géologique, Canada. — Archéologie: La collection archéologique du Sud de l'Intérieur de la Colombie britannique, N. 1291.

* — Department of Mines. Geological Survey. Museum Bulletin, 3-7, No. 26 (Biological Ser.). — Summary Report of the Department of Mines for the Calendar year 1916.

* **Padova**. R. Accademia di scienze, lettere ed arti. Atti e Memorie, N. S., vol. XXXII.

* — Accademia scientifica veneto-trentina-istriana. Ser. 3^{a}, vol. IX (1916).

* **Palermo**. Reale Accademia di Scienze, lettere e belle arti. Bollettino, anni 1911-1914; 1917, fasc. 1.

* — Circolo Matematico. Rendiconti, t. XLI, fasc. 2-3; XLII, 1.

* **Paris**. Ministère des Travaux publics. Annales des Mines. Recueil de lois, décrets, etc. Documents du 3^{e}–4^{e} trimestre 1916, 11^{me} Sér., t. V; t. VI, 1er, 2^{e} trimestre 1917.

* — Institut de France. Académie des Sciences. Œuvres complètes d'Augustin Cauchy. II^{e} Sér., t. XII.

* — Muséum National d'Histoire naturelle. Bulletin, an 1915, N. 7; 1916, 1-6.

— Bureau des Longitudes. Annuaire pour l'an 1917.

* — Société Nationale des Antiquaires de France. Bulletin, 2^{e} et 3^{me} trimestre 1915: 1er–3^{me} trimestre 1916.

* — Société de Géographie. Bullet., La Géographie. An. XXXI (1916–1917), N. 1-3.

* — Société Mathématique de France. Bulletin, t. XLIV, fasc. 2-4; XLV, 1.

— Société Philomathique. Bulletin, sér. 10^{e}, t. VIII, 1916; IX, 3; X, 1–2.

* **Pavia**. Società Pavese di Storia patria. Bollettino, an. XVI, 1916, fasc. 1-4; XVII, 1-4.

* — Società italiana di matematica " Mathesis ". Bollettino, anno III, 1-8; VII, 1-3; VIII, 1-3.

* **Philadelphia**. Academy of Natural Sciences. Journal, 2d Ser., vol. XVI, Part 3.
* — American Philosophical Society. Proceedings, vol. LV, 4-7.
* — Wagner Free Institute of Science. Annual Announcement, 1916-1917.
* **Pino Torinese**. R. Osservatorio. Annuario astronomico pel 1918.
* **Pisa**. R. Università. Annali delle Università Toscane. N. S., vol. I, 1916; II, n. 1-6; III, 1, 2.
* — Società Toscana di scienze naturali. Memorie, vol. XXXI. — Processi verbali, vol. XXV, 5; XXVI, 1-3.
* **Portici**. R. Scuola Superiore di Agricoltura. Annali, Ser. 2a, vol. XIII.
Potsdam. Bureau Central de l'Association Géodésique Internationale. Rapport sur les travaux en 1916 et programme des travaux pour l'exercice de 1917.
Princeton. Princeton University Observatory. Contribution N. 4.
* **Pusa**. Agricultural Research Institute. Botanical Ser., vol. VIII, 3, 4–6; IX, 1-3. — Chemical Ser., vol. V, 1; VI, 6. — Entomological Ser., vol. V, 2-4. — Report (including the Report of the Imperial Cotton specialist) 1915-1916.
* **Reims**. Académie de Reims. Travaux annexe, année 1915-16. Séance tenue à Paris le 8 décembre 1916; id. id. le 15 juin 1917.
Rio de Janeiro. Ministerio da Justiça e Negocios interiores. Relatorio apresentado ao Presidente da Republica dos Estados Unidos do Brazil pelo Ministro Dr. C. M. Pereira do Santos, april de 1915.
* — Bibliotheca Nacional. Annaes, vol. XXXIII, XXXIV (1911, 1912). — Rodolpho R. Schuller: A Nova Gazeta da Terra do Brasil (Newen Zeytung auss Presillg Landt). — Poesias de Evaristo Ferreira da Veiga.
* — Museu Nacional. Archivos, vol. XVII.
— Observatorio Nacional. Anuario para o año 1917, XXXIII.
— Commissão de Linhas Telegraphicas Estrategicas de Matto-Grosso ao Amazonas; Publicação n. 27, 34, 36.
Roma. Ministero della Pubblica Istruzione. Indici e Cataloghi. IV, vol. 2°, fasc. 1-6; VII, vol. 1°, fasc. 3°; VII, vol. 1°, fasc. 3-4; XI, vol. 1°, fasc. 2-4, vol. 2°, fasc. 1-3; XII, vol. 1°, fasc. 2-6; XIII, 1 vol. ed 1 atl.; XIV, fasc. 1-2; XV, vol. 1°, fasc. 3-9; XVI. Roma, 1890-1900, 8°.
— Ministero per l'Industria, il Commercio e il Lavoro. Direzione generale della Statistica e del Lavoro: Annuario statistico italiano, 2a Ser., vol. V, 1915. — Statistica delle cause di morte dell'anno 1914.
— Ministero per l'Industria, il Commercio e il Lavoro. Ufficio centrale di Statistica. Movimento della popolazione secondo gli Atti dello stato civile nell'anno 1914.
— Ministero delle Finanze. Direzione Generale delle Gabelle. Statistica del commercio speciale di importazione e di esportazione: 1915, ottobre; 1916, ottobre-dicembre; 1917, gennaio-ottobre. — Bollettino di legislazione e statistica doganale e commerciale, anno XXXIII (1916), settembre-dicembre; XXXIV (1916), gennaio-giugno. — Movimento della navigazione del Regno d'Italia nell'anno 1915, vol. I, II. — Movimento commerciale del Regno d'Italia nell'anno 1915, vol. I, Parte 1a e 2a, II.

** **Roma**. Ministero dell'Interno. Calendario generale del Regno d'Italia per l'anno 1916, 1917.

— Ministero dell'Interno. Statistica delle Carceri, anno 1915. — Statistica dei Riformatorî, anno 1915.

* — R. Accademia dei Lincei. Annuario 1917. — Rendiconto dell'adunanza solenne del 12 novembre 1916, vol. III. — Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali: Rendiconti, 1° semestre 1917, vol. ; Memorie, ser. 5ª, vol. XI, 12-13; vol. XII, 1-4. — Classe di scienze morali, storiche e filologiche: Rendiconti, Ser. 5ª, vol. XV, 5-6; Memorie, Notizie degli scavi, vol. XIII, 7-12; XIV, 1-5. — Assemblee della Repubblica Cisalpina, vol. I-II, P. 1ª e 2ª, per cura di C. Montalcini ed A. Alberti.

* — Biblioteca Nazionale Centrale "Vittorio Emanuele". Bollettino delle opere moderne e straniere acquistate dalle Biblioteche pubbliche governative del Regno d'Italia, an. 1916, Ser. IV, nn. 13595-15226. Roma, 1916; 8°.

* — R. Comitato Geologico italiano. Bollettino, vol. XLVI, 1-3.

* — Istituto di Diritto Romano. Bollettino, an. XXVIII, fasc. 1-6.

* — Pontificia Accademia Romana dei Nuovi Lincei. Atti, an. LXX, Sess. I, 17 dicembre 1916; II-VII, dal 21 gennaio al 17 giugno 1917. — Memorie, Ser. 2ª, vol. II. — ** Indice generale alfabetico ed analitico dei lavori scientifici, 1847-1912.

* – Biblioteca Apostolica. Studi e testi, nn. 29, 30.

— Società degli Agricoltori italiani. Bollettino quindicinale, 1916, an. XXI, 23-24; 1917, XXII, 1-17.

* **Saint-Louis, Mo**. Missouri Botanical Garden. Annals, vol. III, 1-2.

* **San Francisco**. California Academy of Sciences. Proceedings, Ser. 4ª, vol. V, 7-8; VI, 1-7.

* **Sendai**. Tōhoku Imperial University. Science Reports (Mathematics, Physics, Chemistry), vol. V, n. 5; VI, 2, 3, 6. — Second Ser. (Geology), vol. IV, n. 2.

* **Siena**. Circolo Giuridico della R. Università. Studi Senesi, vol. XXXII, fasc. 4-5.

* — R. Accademia dei Fisiocritici. Atti, ser. 6ª, vol. VI, 1-10; VII, 1-10; VIII, 1-10.

* **Stockholm**. Kungl. Svenska Vetenskaps Academien: Årsbok for år 1916. — Handlingar, Bd. LV, 1-6 — Archiv för matematik, astronomi och fysik, Bd. XI, 1-3. — Archiv för kemi, mineralogi och geologi, Bd. VI, 2-3. — Archiv för botanik, Bd. XIV, 3. — Archiv för zoologi, Bd. X, 1-3. — Meddelend frän K. Vetenskapsakad. Nobellinstitut, III, 3. — Berzelius, Bref II, 2.

* — Institut Central de Météorologie. Appendice aux Observations météorologiques suédoises, vol. 56, 1914.

Stonyhurst. Stonyhurst College Observatory. Results of Meteorological, Magnetical and Seismological Observations, 1916.

* **Suisse**. Société Helvétique des sciences naturelles. Nouveaux Mémoires, vol. LII.

Suisse. Catalogue des écrits académiques suisses, 1915-1916.

* **Tacubaya**. Observatorio Astronómico Nacional. Anuario para el año 1917; 1918.

* — Estudios Geográficos y Climatológicos. Catálogo Astrofotográfico 1900. tome I.

* **Tananarive**. Académie Malgache. Bulletin, vol. XII (Deuxième Partie).

* **Thonon**. Académie Chablaisienne. Mémoires et Documents, t. XXV, XXIX.

* **Tōkyō**. Tōkyō Imperial Earthquake Investigation Committee. Bulletin, vol. VII, 2; VIII, 3.

* — College of Science Imperial University. Journal, vol. XXXVII, 6-8; XXXVIII, 2-5; XXXIX, 1-5.

— Medizinische Fakultät der Kaiserl. Universität. Mitteilungen, Bd. XVI, Heft 1; XVII, 1, 2.

Torino. R. Università, 1916-1917. Discorsi, necrologie e dati statistici. Torino, 1917 (an. XLI).

— Istituto Giuridico della R. Università. G. P. Chironi, Del " Contrattare con se medesimo ". — Idem, Responsabilità per danni da edifici. — M. Falco, La comunità ecclesiastica bavarese. — L. Mossa, L'ammortamento dello *Chek*. — M. Ricca-Barberis, L'obbligo della consegna della cosa e la garanzia per evizione nella compra-vendita. — Idem, L'àmbito dell'obbligo della garanzia per evizione. — C. Toesca di Castellazzo, Se le imprese che compiono lavori per conto dello Stato, a meno che non ricorra l'applicazione dell'art. 19 nn. 2 e 3 della legge infortuni, siano sempre tenute ad assicurare *tutti* gli operai alla Cassa Nazionale.

* — R. Accademia di Agricoltura, Annali, vol. LIX. — Come sia possibile produrre in Italia il frumento necessario al consumo. Relazione e proposte. Torino, 1917; 8°.

* — R. Accademia di Medicina. Giornale, anno LXXIX, 10-12; LXXX, 1-5. — Per la scelta dei preparati sintetici usati come rimedio in relazione alle circostanze attuali. Relazione.

* — R. Deputazione sovra gli Studi di Storia patria. Biblioteca di Storia italiana recente (1800-1870), vol. VIII.

* — Società piemontese di Archeologia e Belle arti. Atti, vol. VIII, fasc. 5. — Bollettino, an. I, nn. 1-3.

* — Società degli Ingegneri e degli Architetti. Atti, an. L, 3-4. — Cinquantenario della Società, 1866-1916. — La Società durante i primi X lustri dalla sua fondazione, 1866-1916.

* — Musei di Zoologia ed Anatomia comparata della R. Università. Bollettino, vol. XXXI, 1916, nn. 708-717.

— Laboratorio di Fisiologia della R. Università. Ricerche sperimentali, vol. I, Ser. 2ª.

— R. Stazione chimico-agraria. Annuario, vol. VI, 1914-1916.

* — Società Meteorologica italiana. Bollettino bimensuale, Ser. 3ª, 1916, vol. XXXV, 3-12.

* — Club Alpino italiano. Rivista mensile, vol. XXXV, 11-12 (1916); XXXVI, 1-10 (1917).

Torino. Gran Magistero dell'Ordine Mauriziano. L'Ordine Mauriziano dalle origini ai tempi presenti. 1 vol. 8°.

— Consiglio Provinciale. Atti, an. 1916.

* — Municipio. Annuario, 1909-1910; 1913-1914; 1915-1916. Atti, 1916.

* — Città. Ufficio d'igiene e sanità. Bollettino statistico, anno 1915, n. 13.

— Cassa di Risparmio. Resoconto dell'anno 1916.

* **Toronto**. University of Toronto Studies. Review of historical publications relating to Canada, vol. XXI. — Philological Series, No. 4.

* **Tortosa**. Observatorio del Ebro. Boletín mensual, vol. VI, nn. 11-12. — Resumen del año 1915; vol. VII, 1916, nn. 1-12. — Resumen del año 1916; vol. VIII, nn. 1, 2.

* **Toulouse**. Bibliothèque de l'Université. Annales du Midi. Revue de la France méridionale, an. XXVII^{me}, nn. 105-108; XXVIII^{me}, 109-110. — Bibliothèque méridionale, 2^{me} Sér., t. XVIII.

* **Udine**. Società storica Friulana. Memorie storiche Forogiuliesi, an. XI, fasc. 1-3. — P. S. Leicht, Le terre irredente nella storia d'Italia.

* **Upsala**. Universitet. Arbeten utgifna med understöd a Wilhem Ekmans Universitetsfond. 17.

* — Observatoire météorologique de l'Université. Bull. mensuel, vol. XLVIII, an. 1916, 4°.

— Observatoire météorologique. Observations sismographiques, septembre 1912 à avril 1917.

Valle di Pompei. Calendario del Santuario di Pompei, 1917; 32°.

* **Venezia**. R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti. Atti, vol. LXXV, disp. 8-10; LXXVI, 1-9. — Memorie, vol. XXIX, 1.

* — R. Magistrato delle Acque. Ufficio idrografico. Bollettino bibliografico, 1916, 3°, 4° trim.; 1917, 1°. — Bollettino mensile, 1916. Parte I (tipografica), 8-12; 1917, 1-6. — Bollettino, 1916, Parte II (litografica), 2, 4; 1917, 1°, 2° trimestre. — Indice generale del Bollettino mensile e trimestrale, 1915, 1916. — Pubblicazioni, n. 53, Parte II (Tabelle). — Catalogo alfabetico della Biblioteca dalla lettera *D* alla lettera *G* compresa.

— R. Comitato Talassografico Italiano. Bollettino bimestrale, 1916, vol. VI, nn 39-44. — Memorie, XXI, LIII-LV, LVIII.

* **Vercelli**. Società Vercellese di storia e d'arte. Archivio, an. VIII, 1916, 4; IX, 1, 2.

* **Verona**. Museo Civico. Madonna Verona. Bollettino, an. X, 1916, fasc. 38-39.

* **Vicenza**. Accademia Olimpica. Atti, N. Ser., vol. V.

Washington. Department of the Interior. U. S. Geological Survey. Mineral resources of the United States. Calendar 1915: P. I, nn. 1-5, 7, 16, 17, 19, 20; P. II, nn. 1-14, 16, 17, 19, 20. — Bulletin, nn. 610, 618, 619, 620 E, M, O, P, 623, 626-630, 632-636, 638, 640 A a E, 641 A a E, 645, 649. — Water-Supply Papers, nn. 332, 360, 369, 374, 375 G, 383, 384, 387, 395, 398, 399. — Professional Papers, nn. 89, 91, 98 A a N. — Geologic Atlas, nn. 199-201.

* — Department of Commerce. Bureau of Standards. Bulletin, vol. XII, 4; XIII, 1-3. — Circular, nn. 6, 61, 62.

* **Washington**. Smithsonian Institution. Annual Report of the Board of Regents of..... Showing the operations, expanditures, and condition of the Institution for the Year ending June 30, 1915.

* — Smithsonian Institution. Smithsonian Miscellaneous Collections. vol. *62*, 5; *64*, 4, 5; *66*, 6, 9-13, 15.

* — Smithsonian Institution. Bureau of American Ethnology: 29 and 30 Annual Report 1907–1908; 1908–1909. — Bulletin, n. 55.

* — Smithsonian Institution. U. S. National Museum. Bulletin, 93, 95, 96, 100, 101, 102, P. 2ª.

* — Smithsonian Institution. U. S. National Museum. Contributions from the U. S. National Herbarium, vol. XVIII, P. 6-7; XX, P. 1-2. — Proceedings, vol. 50.

— Smithsonian Institution. Sources of nitrogen compounds in the United States.

* — Naval Observatory. Annual Report for the Fiscal Year 1916.

* — National Academy of Sciences. Memoirs, vol. XIV, 1. — Proceedings, vol. II, n. 12; III, 1-10.

* — Carnegie Institution. Publications: vol. II, nn. 34, 74, 151, 202, 215 B, 238, 240-244, 249. — The Classic of international Law: Vattel, vol. 1-3; Rachel, vol. 1-2.

Wellington. Wellington Philosophical Society. New Zealand Standard Time Report of a Committee of the Council of the Wellington Philosophical Society.

— Hector Observatory. Report of Government Astronomer C. E. Adams. — Element and Ephemeris of Eros C. E. Adams and L. J. Comrie. — Bulletin 8. Astronomical Tables for the Year 1918.

* **Zürich**. Naturforschende Gesellschaft. Vierteljahrschrift; 61 Jahrg. 1916. 1-4 Heft.

PERIODICI 1917.

** **Almanacco** italiano. Piccola enciclopedia popolare della vita pratica. Firenze; 16°.

** **Annales** de Chimie et de Physique. Paris; 8°.

** **Annales** scientifiques de l'École Normale supérieure. Paris; 4°.

Annali di matematica pura ed applicata. Milano; 4° (dono del Socio Prof. D'Ovidio).

Annals and Magazine of Natural History. London; 8°.

* **Annals** of Mathematics. Charlottesville; 4°.

** **Antologia** (Nuova). Rivista di scienze, lettere ed arti. Roma; 8°.

** **Archives** des Sciences physiques et naturelles, etc. Genève; 8°.

** **Archivio** storico italiano. Firenze; 8°.

Archivio storico lombardo. Milano; 8°.

* **Ateneo** veneto. — Rivista mensile di scienze, lettere ed arti. Venezia; 8°.
** **Athenaeum** (The). Journal of English and Foreign Literature, Science, the Fine Arts, Music and the Drama. London; 4°.
* **Athenaeum**: Studi periodici di letteratura e storia. Direttore Carlo Pascal. Pavia; 8°.
* **Biblioteca** nazionale centrale di Firenze. Bollettino delle pubblicazioni italiane ricevute per diritto di stampa. Firenze; 8°.
** **Bibliothèque** universelle et Revue suisse. Lausanne; 8°.
** **Bollettino** Ufficiale del Ministero dell'Istruzione Pubblica. Roma; 8°.
* **Brixia Sacra**. Bollettino bimestrale di Studi e documenti per la Storia Ecclesiastica bresciana. Brescia; 8°.
* **Cimento** (Il nuovo). Pisa; 8°.
Comptes rendus hebdomadaires des Séances de l'Académie des sciences. Paris; 4°.
* **Conferenze** e Prolusioni. Periodico quindicinale. Roma; 4°.
* **Elettricista** (L'). Rivista mensile di elettrotecnica. Roma; 4°.
Felix Ravenna. Bollettino Storico Romagnolo edito da un gruppo di studiosi. Ravenna; 8°.
* **Gazzetta** chimica italiana. Roma; 8°.
* **Gazzetta** Ufficiale del Regno. Roma; 4°.
Geografia (La), Comunicazioni dell'Istituto geografico De Agostini. Novara; 8°.
* **Giornale** del Genio civile. Roma; 8°.
** **Giornale** della libreria, della tipografia e delle arti e industrie affini. Milano; 8°.
Giornale di matematiche. Napoli; 4° (dono del Socio Prof. D'Ovidio).
** **Giornale** storico della Letteratura italiana. Torino; 8°.
Giornale storico della Lunigiana. Spezia; 8°.
** **Guida** commerciale ed amministrativa di Torino. 8°.
* **Journal** (The American) of Science. Edit. Edward S. Dana. New-Haven; 8°.
** **Journal** asiatique. Paris; 8°.
** **Journal** des Savants. Paris; 8°.
* **Journal** of Physical Chemistry. Ithaca; 8°.
Malpighia. Rassegna mensile di botanica. Catania, 8°.
** **Nature**, a weekly illustrated Journal of Science. London; 8°.
* **Nieuw Archieff** voor Wirskunde. Uitgegeven door hel Wiskundig Genootschap te Amsterdam; 8°.
* **Physical Review** (The); a journal of experimental and theoretical physic. Published for Cornell University Ithaca. New-York; 8°.
** **Raccolta** Ufficiale delle leggi e dei decreti del Regno d'Italia. Roma; 8°.
** **Revue** des Deux Mondes. Paris; 8°.
** **Revue** générale des sciences pures et appliquées. Paris; 8°.
** **Revue** politique et littéraire, revue bleue. Paris; 4°.
** **Revue** scientifique. Paris; 4°.
* **Revue** semestrielle des publications mathématiques. Amsterdam; 8°.
Riforma (La) Sociale. Rassegna di questioni economiche, finanziarie e sociali (Dono del Socio Prof. Einaudi).

** **Risorgimento** italiano. Rivista storica. Torino; 8°.
* **Rivista** di Artiglieria e Genio. Roma; 8°.
** **Rivista** di Filologia e d'Istruzione classica. Torino; 8°.
** **Rivista** d'Italia. Roma; 8°.
** **Rivista** di filosofia. Continuazione della *Rivista Filosofica*, Pavia; 8°.
* **Rivista** internaz. di scienze sociali e discipline ausiliarie. Roma; 8°.
* **Rivista** italiana di Aeronautica. Roma; 8°.
* **Rivista** italiana di Sociologia. Roma; 8°.
* **Rivista** storica italiana. Torino; 8°.
Rosario (Il) e la Nuova Pompei. Valle di Pompei; 8°.
** **Science**. New-York; 8°.
* **Science Abstracts**. Physics and Electrical Engineering. London; 8°.
** **Scientia**. Rivista di scienza. Organo internazionale di sintesi scientifica. Bologna, 8°.
* **Sperimentale** (Lo). Archivio di Biologia. Firenze; 8°.
** **Stampa** (La). Gazzetta Piemontese. Torino; f°.
Tôhoku (The) Mathematical Journal. Edited by T. Hayashi. Sendai; 8°.
Yale Review. New Series. Edited by Wilbur L. Cross. New Haven; 8° (dono del Socio Prof. Einaudi).

PUBBLICAZIONI RICEVUTE DALL'ACCADEMIA

NB. Le pubblicazioni segnate con * si hanno in cambio;
quelle notate con ** si comprano; e le altre senza asterisco si ricevono in dono

Dal 16 Giugno al 18 Novembre 1917.

Amoretti (P.). Sistema per utilizzazione del calore dei vulcani (Fumarole, solfatare, ecc.) per produzione di forza motrice. Palermo, 1917; 8° (*dall'A.*).

Boccardi (G.). Sur la Polhodie du sphéroïde terrestre. Torino, 1917; 8° (*dall'A.*).

— Perchè e come si arrotonda l'ultima cifra. 8° (*id.*).

— Ancora del problema dei tre scrigni proposto da Bertrand e Poincaré. 8° (*id.*).

Carbonelli (G.). Onoranze al prof. Cesare Serono. Roma, 1916; 8° (*dall'A.*).

— Sulla coltivazione del Zafferano (*Crocus sativus*) in Monferrato nel secolo XV. Roma, 1916; 8° (*id.*).

Chiaves (P. e C.). L'analisi chimica qualitativa inorganica. Metodo per il franco rinvenimento di 25 basi e 20 acidi. Torino, 1917; 8° (*dagli AA.*).

Malenotti (E.). I nemici naturali della " Bianca-Rossa " (*Chrysomphalus dictyospermi* Morg.). Firenze, 1917; 8° (*dall'A.*).

Musciacco (A.). Il Restometro. Lecce, 1917; 8° (*dall'A. per il premio Vallauri 1915-1918*).

— " Postilla ". Per un piccolo mistero nel vortice dei liquidi. Lecce, 1917; 8° (*id.*).

— Del " Restometro ". Riassunto. Lecce, 1917 (*id.*).

Richmond (Ch. W.). Generic name applied to Birds during the years 1906 to 1915, inclusive, with additions and corrections to Waterhouse's " Index generum Avium ". Washington, 1917; 8° (*dall'A.*).

Taramelli (T.). La tectonica e i suoi rapporti con l'orografia della provincia di Pavia. Novara, 1917; 8° (*dall'A. Socio nazionale dell'Accademia*).

— La formazione dell'Adriatico. Novara, 1917; 8° (*id.*).

— Del lago di Doberdò presso Montefalcone. Milano, 1917; 8° (*id.*).

— La frana di Gregassi, frazione di Montacuto. Pavia, 1917; 8° (*id.*).

— Il Carso. Pavia, 1917; 8° (*id.*).

— Della geologia del Trentino. Conferenza. Roma, 1917; 8° (*id.*).

Vecellio (A.). Equilibrio cosmico. Parte I. Feltre, 1916; 8° (*dall'A. per il premio Vallauri 1915-1918*).

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 18 Novembre 1917.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE ENRICO D'OVIDIO
DIRETTORE DELLA CLASSE

Sono presenti i Soci: Naccari, Segre, Peano, Jadanza, Guareschi, Guidi, Mattirolo, Grassi, Somigliana, Fusari, Panetti e Parona Segretario.

Si legge e si approva il verbale della precedente adunanza.

Il Direttore, Senatore D'Ovidio, esprime il dispiacere di dover presiedere in assenza del Senatore Camerano infermo, ed al caro e benemerito Presidente invia a nome dei colleghi i voti più affettuosi e fervidi di pronta guarigione. Annuncia che un nuovo lutto colpisce l'Accademia colla morte del Professore G. Carle, Senatore del Regno, uno dei Soci più eminenti della Classe di scienze morali e antico Presidente dell'Accademia; accenna ai meriti di studioso e di cittadino dell'insigne giurista, che lascia ricordo duraturo nel campo scientifico, e si fa interprete della Classe manifestando il cordoglio per la grave perdita fatta dall'Accademia. Soggiunge che la Classe riprende i lavori in momenti gravi per la Patria; ma ciò non la distoglie dalla sua strada e, come ammaestra la parola virile del Re, attende la vittoria con fede nel valore dell'esercito e

nella altezza e giustizia della nostra causa. Si rammarica infine di dover annunciare la morte del Prof. Senatore G. Veronese nostro Socio corrispondente dal 1898 e del Socio straniero F. R. Helmert.

Il Socio Segre commemora il compianto collega Veronese colle seguenti parole:

" Il nome di Giuseppe Veronese è legato indissolubilmente " alla dottrina degli spazi a un numero qualunque di dimensioni: " dottrina, che, avversata un tempo da chi non ne intendeva il " vero significato, è divenuta ora quella entro cui ha da stare, " come un capitolo, la ordinaria geometria. Veronese contribuì " ad essa con una Memoria che ha fatto epoca, nella quale per " la prima volta è stata svolta una geometria proiettiva iper- " spaziale in forma sintetica, studiando svariati enti degli spazi " superiori, e deducendone, con proiezione sullo spazio ordinario, " le proprietà di figure importanti di questo spazio. A quel la- " voro fondamentale si attaccarono subito una gran quantità " di ricerche di altri matematici, specialmente italiani. Veronese " fu pure il primo a rappresentare coi metodi della Geometria " descrittiva le figure degli spazi superiori con figure del nostro " spazio. E a lui si deve un'altra idea geniale, quella di costi- " tuire una geometria (detta non-Archimedea), in cui esistono " segmenti che sono, gli uni rispetto agli altri, infiniti od infi- " nitesimi. L'opera in cui quest'idea è svolta ha portato un no- " tevole contributo all'analisi dei fondamenti della geometria. " Taccio, per brevità, di altre importanti pubblicazioni del " Veronese; ed aggiungerò solo che anche come cittadino e " come uomo politico egli si era reso molto benemerito colla " sua grande e intelligente operosità ".

Il Socio Somigliana si dice lieto di annunciare la pubblicazione del 1° volume delle opere di A. Volta. La pubblicazione si fa sotto gli auspicî del R. Istituto Lombardo, custode dei preziosi manoscritti, e della R. Accademia dei Lincei, ma anche

l'Accademia nostra vi partecipa coll'intervento suo e specialmente per la collaborazione del collega Naccari, che fu il consulente scientifico nella scelta degli scritti inediti che, per la Scienza e per la fama del grande italiano, fosse utile di pubblicare colla ristampa delle Memorie già note. Questo 1° volume raccoglie i lavori preliminari alla grande scoperta voltiana e, comparendo in questo momento grave per la Patria, è anche da apprezzare come affermazione della genialità nazionale.

Il Socio Naccari dice che fu modesta l'opera sua e, ringraziando il collega per il merito attribuitogli, soggiunge che il Somigliana fu ed è l'anima della pubblicazione.

Il Presidente, ammirato di questo primo splendido saggio della pubblicazione, si compiace dell'importante parte presavi dai nostri colleghi e li ringrazia.

Il Socio Guareschi fa omaggio di due suoi lavori: *Frumento e pane, notizie storiche e critiche di chimica alimentare o bromotologica; Sul riso nella chimica dell'alimentazione.* Riassume i risultati di questi lavori, essenzialmente diretti allo studio del problema della sana alimentazione, della coltivazione con abbondanza di prodotti e della più igienica preparazione dei prodotti stessi, con particolare riguardo al riso, dimostrando tutto il danno che, rispetto all'igiene, viene dalla brillatura.

Presenta pure in omaggio due pubblicazioni del Dottore E. Crivelli: *Pietre preziose degli antichi; Sulla origine inorganica o sintetica del Litantrace*, rilevandone i pregi.

Il Socio Guidi fa omaggio di un suo articolo bibliografico sull'opera "*Grandes Voûtes*" di Paul Séjourné.

Il Segretario presenta sei Note inviate in omaggio dal Socio nazionale T. Taramelli: *Il Carso; Conferenza sulla Geologia del Trentino; La formazione dell'Adriatico; Del Lago di Doberdò presso Monfalcone; La frana di Gregassi; La tectonica e i suoi rapporti con l'orografia della Provincia di Pavia.*

Il Presidente ringrazia i colleghi.

Presentano per la pubblicazione negli *Atti*:

Il Socio Segre: una Nota del Prof. Carlo Rosati, *Sulle valenze delle corrispondenze algebriche fra i punti di una curva algebrica*, e un'altra dell'Ing. G. Colonnetti, *Un singolare esempio di lesioni in un anello di acciaio temprato.*

Il Socio Peano: una Nota del Prof. A. Pensa, *Su alcune omografie speciali e sugli operatori omografici* C, R.

Il Socio Guidi: la sua Nota, *Sulle deformazioni delle dighe a volta.*

Il Socio Parona: una Nota del Prof. F. Zambonini, *Sulla identità della spangite con la phillipsite.*

LETTURE

Sulle valenze delle corrispondenze algebriche fra i punti di una curva algebrica.

Nota di CARLO ROSATI.

In questa Nota si riprende, generalizzandola, una nozione introdotta in un precedente lavoro, comparso negli *Atti* di questa illustre Accademia (*), e si pone, nel senso più generale possibile, il concetto di *valenza* (reale o complessa) di una corrispondenza algebrica fra i punti di una curva algebrica. Ad ogni corrispondenza viene con ciò collegato un certo gruppo di valenze e si verifica il fatto notevole che le valenze di due corrispondenze T e T^{-1}, l'una inversa dell'altra, hanno valori immaginari coniugati. Segue da ciò che il numero delle coincidenze di una corrispondenza qualsiasi può essere espresso mediante una formula avente l'aspetto di quella di Cayley-Brill per le corrispondenze a valenza ordinaria. In seguito vengono esposte alcune considerazioni atte a caratterizzare, dal punto di vista delle valenze, le corrispondenze simmetriche ed emisimmetriche: le prime hanno valenze tutte reali, le seconde hanno per valenze numeri immaginari puri. Infine vien dimostrata la proprietà che sopra una curva, priva di sistemi regolari riducibili, ogni corrispondenza è tale che i sistemi lineari d'integrali di 1ª specie, associati alle sue valenze, appartengono al sistema totale ∞^{p-1}.

1. — Sopra una curva algebrica C di genere p si consideri una corrispondenza algebrica (n, ν) e si indichi con T l'ope-

(*) Rosati, *Sulle corrispondenze plurivalenti fra i punti di una curva algebrica.* "Atti della R. Accademia di Torino", vol. 51 (1916).
Nei richiami che faremo in seguito, designeremo questa Nota con *C. P.*

razione che conduce da un punto x agli omologhi $y' y'' \dots y^{\nu}$ e con T^{-1} l'operazione, inversa di T, che conduce da un punto y agli omologhi $x' x'' \dots x^{n}$.

Detto σ un ciclo qualsiasi descritto da x sulla superficie di Riemann R immagine di C e σ' il ciclo omologo di σ per la T, si supponga che fra i periodi τ e τ' di un integrale di 1ª specie u lungo i cicli σ e σ' sussista la relazione $\tau' + \gamma\tau = 0$, nella quale γ è un numero reale o complesso, indipendente dal ciclo σ. La somma $u(y') + u(y'') + \dots + u(y^{\nu}) + \gamma u(x)$ è in tal caso funzione uniforme di x, avendo il periodo nullo lungo ogni ciclo di R; e poichè è su R dovunque finita, sarà una costante. Indicando con I la corrispondenza identica sulla curva, noi diremo allora che *la funzione lineare di* T, $T + \gamma I$, è di livello costante per l'integrale u ed anche che γ è una *valenza* di T rispetto all'integrale u. È chiaro che se $T + \gamma I$ è di livello costante per più integrali di 1ª specie, è pure di livello costante per ogni integrale che nasce da una loro combinazione lineare: ne segue che la totalità degli integrali rispetto a cui la T possiede la valenza γ costituisce un sistema lineare; tale sistema si dirà *associato* a quella valenza.

2. — Per procedere con chiarezza alla dimostrazione del teorema accennato nella prefazione, occorre anzitutto richiamare l'interpretazione geometrica, che abbiamo data altrove (*), delle formule con cui Hurwitz dà la rappresentazione trascendente di una corrispondenza algebrica mediante gli integrali abeliani di 1ª specie.

Fissato perciò su R un sistema di retrosezioni σ_i, σ_{p+i} $(i = 1, 2, \dots p)$, e indicati con $u_1 u_2 \dots u_p$ i p integrali normali di 1ª specie, con a_{ik} il periodo di u_i lungo il ciclo σ_{p+k}, si hanno le seguenti notissime relazioni (**):

$$(1) \qquad \sum_{r=1}^{r=\nu} u_k(y^r) = \sum_i \pi_{ki}\, u_i(x) + \pi_k \qquad (k = 1, 2, \dots p),$$

(*) Rosati, *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e, in particolare, fra i punti di una curva di genere due.* “ Annali di Matematica „, tomo XXV, serie III (1915).

Indicheremo in seguito questa Memoria con *C*.

(**) Hurwitz, *Ueber algebraische Correspondenzen und das verallgemeinerte Correspondenz-princip.* “ Math. Annalen „, Bd. 28 (1886).

in cui le π_h sono costanti dipendenti dall'origine delle integrazioni, e le π_{kl} verificano le uguaglianze

$$(2) \qquad \begin{aligned} \pi_{kl} &= h_{kl} + \sum_i g_{il}\, a_{ki} \\ \sum_i \pi_{ki}\, a_{il} &= H_{kl} + \sum_i G_{il}\, a_{ki} \end{aligned} \qquad (k, l = 1, 2, \dots p)$$

nelle quali i numeri h, g, H, G sono interi.

Da queste, con la eliminazione delle π_{kl}, si ottengono le p^2 relazioni

$$(3) \qquad \sum_i h_{ki}\, a_{il} + \sum_{im} g_{mi}\, a_{km}\, a_{il} = H_{kl} + \sum_i G_{il}\, a_{ki} \qquad (k, l = 1, 2, \dots p).$$

Si consideri ora entro uno spazio S_{2p-1}, in cui sia fissato un sistema di coordinate proiettive omogenee, l'S_{p-1} *dei periodi*, cioè l'S_{p-1}, che diremo α, intersezione degli iperpiani $\alpha_1\, \alpha_2 \dots \alpha_p$ aventi per coordinate i periodi normali degli integrali $u_1\, u_2 \dots u_p$ e si rappresenti ogni ciclo della Riemanniana R col punto razionale di S_{2p-1} le cui coordinate sono gl'interi che legano il ciclo alle retrosezioni, ed ogni integrale di 1ª specie coll'iperpiano della stella (α) avente per coordinate i periodi normali dell'integrale stesso. La corrispondenza che la T stabilisce fra i cicli di R si traduce allora in S_{2p-1} nell'omografia razionale Ω rappresentata dalle relazioni

$$(4) \qquad \begin{aligned} \rho x'_i &= h_{i1}\, x_1 + \dots + h_{ip}\, x_p + H_{i1} x_{p+1} + \dots + H_{ip}\, x_{2p} \\ \rho x'_{p+i} &= g_{i1}\, x_1 + \dots + g_{ip}\, x_p + G_{i1}\, x_{p+1} + \dots + G_{ip}\, x_{2p} \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, \dots p),$$

e quella che T induce fra gl'integrali di 1ª specie si rispecchia in una omografia Π della stella (α), la quale, scegliendo in (α) opportunamente gli elementi di riferimento, è rappresentata dalle formule

$$(5) \qquad \sigma \xi'_i = \pi_{1i}\, \xi_1 + \pi_{2i}\, \xi_2 + \dots + \pi_{pi}\, \xi_p \qquad (i = 1, 2, \dots p).$$

Le relazioni (3) di Hurwitz esprimono allora che l'omografia Ω trasforma in sè l'S_{p-1} dei periodi (e quindi anche l'$S_{p-1} = \alpha_0$ immaginario coniugato di α); e che precisamente l'omografia Ω^{-1}, inversa di Ω, operante sugli iperpiani di S_{2p-1}

induce nella stella (α) l'omografia Π (e quindi nella stella (α_0) l'omografia Π_0 il cui modulo si ottiene da quello di Π scambiando ogni elemento nel suo immaginario coniugato).

Si consideri ora l'equazione

$$\Pi(\rho) = \begin{vmatrix} \pi_{11} - \rho & \pi_{21} & \dots \pi_{p1} \\ \pi_{12} & \pi_{22} - \rho & \dots \pi_{p2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \pi_{1p} & \pi_{2p} & \dots \pi_{pp} - \rho \end{vmatrix} = 0$$

e si indichi con $-\gamma$ una sua radice. Supposto che il determinante $\Pi(-\gamma)$ sia di caratteristica $p - l$ ($p \geq l > 0$), alla radice $-\gamma$ corrisponde nell'omografia Π una stella Σ_{l-1} d'iperpiani uniti, le cui coordinate soddisfano le equazioni

$$\begin{array}{l} (\pi_{11} - \rho)\,\xi_1 + \pi_{21}\,\xi_2 + \dots + \pi_{p1}\,\xi_p = 0 \\ \pi_{12}\,\xi_1 + (\pi_{22} - \rho)\,\xi_2 + \dots + \pi_{p2}\,\xi_p = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \pi_{1p}\,\xi_1 + \pi_{2p}\,\xi_2 + \dots + (\pi_{pp} - \rho)\,\xi_p = 0. \end{array}$$

Sia ora u un integrale avente per immagine un iperpiano qualunque della stella Σ_{l-1}; esso sarà espresso mediante gl'integrali normali dalla relazione

$$u = \xi_1 u_1 + \xi_2 u_2 + \dots + \xi_p u_p + c,$$

onde si avrà

$$u(y') + u(y'') + \dots + u(y^\nu) = \sum_k \xi_k \sum_{r=1}^{r=\nu} u_k(y^r) + c' =$$
$$= \sum_k \xi_k \sum_i \pi_{ki} u_i(x) + c'' = -\gamma \sum_i \xi_i u_i(x) + c'' = -\gamma u(x) + c''',$$

avendo indicato con c, c', c'', c''' delle costanti. Il numero γ è dunque una valenza di T, ed ogni integrale che ha per immagine un iperpiano della stella Σ_{l-1} fa parte del sistema associato.

Inversamente se γ è valenza di T rispetto ad un integrale $u = \xi_1 u_1 + \xi_2 u_2 + \dots + \xi_p u_p + c$, si avrà l'uguaglianza

$$u(y') + u(y'') + \dots + u(y^\nu) + \gamma u(x) = c'$$

cui può darsi la forma

$$\sum_k \xi_k \sum_{r=1}^{r=\nu} u_k(y^r) + \gamma \sum_k \xi_k u_k(x) = c'',$$

ed anche l'altra

$$\sum_{ki} \xi_k \pi_{ki} u_i(x) + \gamma \sum_k \xi_k u_k(x) = c''';$$

da questa, per l'indipendenza degl'integrali $u_i(x)$, si deducono le relazioni

$$\sum_k \pi_{ki} \xi_k + \gamma \xi_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots p).$$

Dunque $-\gamma$ è radice dell'equazione $\Pi(\rho) = 0$, e l'iperpiano immagine di u fa parte della stella d'iperpiani uniti che nell'omografia Π corrisponde a quella radice. Abbiamo dunque il risultato:

Le valenze della corrispondenza T *sono tutte e sole le radici, cambiate di segno, dell'equazione caratteristica dell'omografia* Π, *e i sistemi lineari d'integrali ad esse associati hanno per immagine le stelle d'iperpiani uniti ad esse corrispondenti.*

3. — Può ritenersi noto, ed è facile dimostrare direttamente (*), che tra il primo membro $\Omega(\rho)$ dell'equazione carat-

---

(*) Cfr. l'importante Memoria del Prof. Scorza, *Intorno alla teoria generale delle matrici di Riemann e ad alcune sue applicazioni.* "Rendiconti del Circolo matematico di Palermo", tomo XLI (1916), parte I, § 4, n° 22.

Una dimostrazione diretta della identità (6), indicatami dallo stesso Prof. Scorza, è la seguente: Si moltiplichino, colonne per righe, il determinante $\Omega(\rho)$ per il determinante A, di ordine $2p$, ottenuto associando alla matrice dei periodi normali degl'integrali $u_1 u_2 \dots u_p$ quella costituita dai valori immaginari coniugati; tenendo conto delle relazioni (2), e indicando per comodità con $\bar{a}$ la quantità immaginaria coniugata di a, si ottiene:

$$\begin{vmatrix} h_{11}-\varrho & h_{12} & \dots h_{1p} & H_{11} & \dots H_{1p} \\ h_{21} & h_{22}-\varrho & \dots h_{2p} & H_{21} & \dots H_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{p1} & h_{p2} & \dots h_{pp}-\varrho & H_{p1} & \dots H_{pp} \\ g_{11} & g_{12} & \dots g_{1p} & G_{11}-\varrho & \dots G_{1p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{p1} & g_{p2} & \dots g_{pp} & G_{p1} & \dots G_{pp}-\varrho \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \dots 0 & a_{11} \dots a_{1p} \\ 0 & 1 \dots 0 & a_{21} \dots a_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \dots 1 & a_{p1} \dots a_{pp} \\ 1 & 0 \dots 0 & \bar{a}_{11} \dots \bar{a}_{1p} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \dots 1 & \bar{a}_{p1} \dots \bar{a}_{pp} \end{vmatrix} =$$

teristica dell'omografia Ω e i primi membri $\Pi(\rho)$ $\Pi_0(\rho)$ delle equazioni caratteristiche delle omografie $\Pi\,\Pi_0$ delle stelle (α) ed (α_0) sussiste l'identità

$$\Omega(\rho) = \Pi(\rho)\,\Pi_0(\rho). \tag{6}$$

Essa prova che le radici dell'equazione caratteristica di Ω si distribuiscono nei due gruppi immaginari coniugati delle radici delle equazioni $\Pi(\rho) = 0$ e $\Pi_0(\rho) = 0$.

Se ora diciamo π e π_0 le omografie indotte da Ω negli spazi α ed α_0, è chiaro che l'omografia Π della stella (α) non è che la π_0^{-1}, inversa di π_0, operante sugli iperpiani di α_0. Assumendo allora in α_0 come elementi di riferimento le tracce di quelli assunti nella stella (α), la π_0 verrà rappresentata dalla sostituzione lineare trasposta della (5); e ripetendo la considerazione per l'omografia π dello spazio α, si deduce che $\Pi(\rho) = 0$ e $\Pi_0(\rho) = 0$ possono anche interpretarsi rispettivamente come equazioni caratteristiche delle omografie π_0 e π.

$$= \begin{vmatrix} \pi_{11} - \varrho & \pi_{12} & \dots \pi_{1p} & \sum\limits_r \pi_{1r}\, a_{r1} - \varrho\, a_{11} \dots \sum\limits_r \pi_{1r}\, a_{rp} - \varrho\, a_{1p} \\ \pi_{21} & \pi_{22} - \varrho & \dots \pi_{2p} & \sum\limits_r \pi_{2r}\, a_{r1} - \varrho\, a_{21} \dots \sum\limits_r \pi_{2r}\, a_{rp} - \varrho\, a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \pi_{p1} & \pi_{p2} & \dots \pi_{pp} - \varrho & \sum\limits_r \pi_{pr}\, a_{r1} - \varrho\, a_{p1} \dots \sum\limits_r \pi_{pr}\, a_{rp} - \varrho\, a_{pp} \\ \overline{\pi}_{11} - \varrho & \overline{\pi}_{12} & \dots \overline{\pi}_{1p} & \sum\limits_r \overline{\pi}_{1r}\, \bar{a}_{r1} - \varrho\, \bar{a}_{11} \dots \sum\limits_r \overline{\pi}_{1r}\, \bar{a}_{rp} - \varrho\, \bar{a}_{1p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overline{\pi}_{p1} & \overline{\pi}_{p2} & \dots \overline{\pi}_{pp} - \varrho & \sum\limits_r \overline{\pi}_{pr}\, \bar{a}_{r1} - \varrho\, \bar{a}_{p1} \dots \sum\limits_r \overline{\pi}_{pr}\, \bar{a}_{rp} - \varrho\, \bar{a}_{pp} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \pi_{11}-\varrho & \pi_{12} & \dots \pi_{1p} & 0 & 0 & \dots 0 \\ \pi_{21} & \pi_{22}-\varrho & \dots \pi_{2p} & 0 & 0 & \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \pi_{p1} & \pi_{p2} & \dots \pi_{pp}-\varrho & 0 & 0 & \dots 0 \\ 0 & 0 & \dots 0 & \overline{\pi}_{11}-\varrho & \overline{\pi}_{12} & \dots \overline{\pi}_{1p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots 0 & \overline{\pi}_{p1} & \overline{\pi}_{p2} & \dots \overline{\pi}_{pp}-\varrho \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \dots 0 & a_{11} & a_{12} \dots a_{1p} \\ 0 & 1 \dots 0 & a_{21} & a_{22} \dots a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots 1 & a_{p1} & a_{p2} \dots a_{pp} \\ 1 & 0 \dots 0 & \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} \dots \bar{a}_{1p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots 1 & \bar{a}_{p1} & \bar{a}_{p2} \dots \bar{a}_{pp} \end{vmatrix}.$$

Di qui, osservando che $A \neq 0$, si deduce l'asserita identità.

È utile inoltre osservare che l'omografia $\Omega + \rho I$ (*) (ρ essendo un numero arbitrario) subordina negli spazi α ed α_0 le omografie $\pi + \rho I$, $\pi_0 + \rho I$, e che l'omografia $\Omega^{-1} + \rho I$ subordina nelle stelle (α) ed (α_0) le omografie $\Pi + \rho I$, $\Pi_0 + \rho I$. Più in generale una funzione razionale di Ω, $f(\Omega)$, subordina in α e in α_0 le omografie $f(\pi)$ $f(\pi_0)$, mentre $f(\Omega^{-1})$ subordina nelle stelle (α) (α_0) le omografie $f(\Pi)$ $f(\Pi_0)$.

Una radice $-\gamma$ dell'equazione $\Omega(\rho) = 0$ o soddisfa ad una sola delle equazioni $\Pi(\rho) = 0$ $\Pi_0(\rho) = 0$, ovvero soddisfa ad entrambe.

Se $-\gamma$ soddisfa alla sola equazione $\Pi(\rho) = 0$, la $\Omega + \gamma I$ induce in α un'omografia non singolare e in α_0 un'omografia singolare; la $\Omega^{-1} + \gamma I$ induce nella stella (α_0) un'omografia non singolare e nella stella (α) un'omografia singolare.

Se $-\gamma$ è radice di entrambe le equazioni $\Pi(\rho) = 0$ $\Pi_0(\rho) = 0$, sono singolari entrambe le omografie indotte in α e in α_0 da $\Omega + \gamma I$ e quelle indotte nelle stelle (α) (α_0) da $\Omega^{-1} + \gamma I$.

Si può dunque dire che:

Le valenze di T *sono i valori di* γ *cui corrispondono omografie* $\Omega + \gamma \mathrm{I}$ *che subordinano omografie singolari nello spazio* α_0, *o, ciò che è lo stesso, omografie* $\Omega^{-1} + \gamma \mathrm{I}$ *che subordinano omografie singolari nella stella* (α).

4. — Sia γ una valenza di T, cioè $-\gamma$ sia radice dell'equazione $\Pi(\rho) = 0$; è indifferente ammettere che $-\gamma$ soddisfi o no anche all'equazione $\Pi_0(\rho) = 0$. Se il determinante $\Pi(-\gamma)$ è di caratteristica $p - l$ $(p \geq l > 0)$, l'omografia singolare $\pi_0 + \gamma I$ di α_0 ha per 1° e 2° spazio singolare un s_{l-1} ed un s_{p-1-l} e l'omografia singolare $\Pi + \gamma I$ della stella (α) possiede due stelle singolari Σ_{l-1} Σ_{p-1-l} i cui sostegni sono gli spazi che da α proiettano s_{p-1-l} ed s_{l-1} (**).

Facciamo dapprima l'ipotesi che s_{l-1} sia indipendente da s_{p-1-l} e conseguentemente Σ_{l-1} da Σ_{p-1-l}, che cioè s_{l-1} e Σ_{l-1}

(*) D'ora innanzi indicheremo con I indifferentemente l'omografia identica di S_{2p-1}, degli spazi α α_0, delle stelle (α) (α_0).

(**) Questa ed altre affermazioni di questo n° si giustificano subito analiticamente, assumendo α ed α_0 come spazi opposti della piramide di riferimento.

siano spazio e stella singolari semplici per le dette omografie. In tal caso le omografie singolari $(\Pi + \gamma I)^2$, $(\Pi + \gamma I)^3$, ... che nella stella (α) vengono indotte da $(\Omega^{-1} + \gamma I)^2$, $(\Omega^{-1} + \gamma I)^3$, ... hanno costantemente come 1ª e 2ª stella singolare le stelle Σ_{l-1} e Σ_{p-1-l} che spettano all'omografia $\Pi + \gamma I$ (*).

Ciò significa che i sistemi lineari d'integrali rispetto a cui sono di livello costante le successive potenze della *funzione lineare* $T + \gamma I$, coincidono tutti col sistema lineare ∞^{l-1} associato alla valenza γ (**).

Presentandosi questo caso, diremo che γ è valenza *semplice* di T.

Supponiamo ora che s_{l-1} sia spazio singolare r^{plo} per $\pi_0 + \gamma I$ e che in esso siano venuti successivamente ad immergersi gli spazi singolari s_{l_1-1}, s_{l_2-1}, ... $s_{l_{r-1}-1}$ $(l \geq l_1 \geq l_2 \geq \ldots \geq l_{r-1}$, $l + l_1 + \ldots + l_{r-1} \leq p)$. Le omografie singolari $\pi_0 + \gamma I$, $(\pi_0 + \gamma I)^2$, ... $(\pi_0 + \gamma I)^r$ hanno in tal caso primi spazi singolari di dimensioni $l - 1$, $l + l_1 - 1$, ... $l + l_1 + \ldots + l_{r-1} - 1$ contenenti ciascuno il precedente, e secondi spazi singolari di dimensioni $p - 1 - l$, $p - 1 - l - l_1$, ... $p - 1 - l - l_1 - \ldots - l_{r-1}$, ciascuno contenuto nel precedente; inoltre, se è $l + l_1 + \ldots + l_{r-1} < p$, le potenze $(\pi_0 + \gamma I)^{r+1}$, $(\pi_0 + \gamma I)^{r+2}$, ... hanno come spazi singolari quelli stessi, fra loro indipendenti, di $(\pi_0 + \gamma I)^r$; se è $l + l_1 + \ldots + l_{r-1} = p$, le potenze $(\pi_0 + \gamma I)^r$, $(\pi_0 + \gamma I)^{r+1}$, ... sono omografie nulle.

Osservando ora che nell'omografia $(\Pi + \gamma I)^t$ $(t = 1, 2, \ldots)$ della stella (α) i sostegni della 1ª e della 2ª stella singolare si ottengono proiettando da α il 2° ed il 1° spazio singolare della omografia $(\pi_0 + \gamma I)^t$, si deducono per la $\Pi + \gamma I$ le proprietà

(*) Per questa osservazione e per quella che segue cfr. Rosati, *C. P.*, n° 2.

(**) Per giustificare quest'asserzione, basta osservare che l'omografia $\Pi + \gamma I$ della stella (α) si rispecchia sulla curva in una corrispondenza fra gli integrali per cui un qualsiasi integrale di 1ª specie $v(x)$ ha per omologo l'integrale $v_1(x) = v(y') + v(y'') + \ldots + v(y^{\nu}) + \gamma v(x)$; la $(\Pi + \gamma I)^2$ in una corrispondenza per cui lo stesso $v(x)$ ha per omologo l'integrale $v_2(x) = v_1(y') + v_1(y'') + \ldots + v_1(y^{\nu}) + \gamma v_1(x)$, e così via; e che un iperpiano di (α), che in una delle suddette omografie ha l'omologo indeterminato, è immagine di un integrale della curva per cui l'integrale omologo si riduce a una costante.

analoghe della $\pi_0 + \gamma I$. Adunque le prime stelle singolari delle omografie $(\Pi + \gamma I)$, $(\Pi + \gamma I)^2$, ... $(\Pi + \gamma I)^r$ hanno le dimensioni $l - 1$, $l + l_1 - 1$, ... $l + l_1 + ... + l_{r-1} - 1$ e ciascuna contiene la precedente; l'ultima di queste, che se è $l + l_1 + ... + l_{r-1} = p$ coincide con la stella (α), è prima stella singolare anche per le potenze successive. Questa proprietà, interpretata sulla curva, significa che i sistemi lineari d'integrali rispetto a cui sono di livello costante la funzione lineare $T + \gamma I$ e le successive potenze $(T + \gamma I)^2$, $(T + \gamma I)^3$, ... $(T + \gamma I)^r$ hanno le dimensioni $l - 1$, $l + l_1 - 1$, ... $l + l_1 + ... + l_{r-1} - 1$ e ciascuno di essi contiene il precedente; rispetto all'ultimo sistema, che può anche coincidere col sistema totale ∞^{p-1}, sono poi di livello costante le ulteriori potenze $(T + \gamma I)^{r+1}$, $(T + \gamma I)^{r+2}$, ... Quando si presenta la circostanza suddetta, diremo che γ è una valenza r^{pla} per la corrispondenza T ed i nominati sistemi lineari d'integrali ∞^{l-1}, ∞^{l+l_1-1}, ... $\infty^{l+l_1+...+l_{r-1}-1}$ si diranno *associati* a quella valenza r^{pla}.

Importa ora notare che la molteplicità della radice $-\gamma$ per l'equazione $\Pi(\rho) = 0$ è, nel primo dei casi ora esaminati, uguale ad l, e nel secondo è uguale ad $l + l_1 + ... + l_{r-1}$.

5. — È utile, per ciò che diremo fra breve, la seguente osservazione riguardante l'equazione minima di una corrispondenza.

Siano $\psi(z) = 0$, $\varphi(z) = 0$, $\varphi_0(z) = 0$ le equazioni minime dell'omografia Ω immagine della corrispondenza T e delle omografie π e π_0 che Ω subordina in α e in α_0; per ciò che è stato detto in principio del n° 3, saranno pure $\varphi(z) = 0$ $\varphi_0(z) = 0$ le equazioni minime delle omografie Π_0 e Π subordinate da Ω^{-1} nelle stelle (α_0) ed (α) (*). Inoltre è chiaro che $\varphi_0(z) = 0$ si ottiene da $\varphi(z) = 0$ cambiando ogni coefficiente nel suo immaginario coniugato. Poichè le radici dell'equazione minima di una

(*) Ricordiamo che l'equazione minima di una omografia è determinata soltanto quando è fissato il suo modulo, sicchè sarebbe più esatto parlare di equazione minima di una sostituzione lineare, anzichè di equazione minima di una omografia (Rosati, *C. P.*, n° 9). Noi qui intendiamo che il modulo di Ω sia quello costituito dagli interi caratteristici della corrispondenza T e che i moduli di Π e di Π_0 siano costituiti rispettivamente dai numeri π_{ik} delle formule di Hurwitz e dai loro immaginari coniugati.

omografia sono tutte e sole quelle dell'equazione caratteristica, si deduce, in virtù dell'identità (6), che $\psi(z) = 0$ ammette per radici tutte e sole quelle di $\varphi(z) = 0$ e di $\varphi_0(z) = 0$.

Una radice $-\gamma$ di $\psi(z) = 0$ o soddisfa ad una sola delle equazioni $\varphi(z) = 0$ $\varphi_0(z) = 0$, o soddisfa ad entrambe.

Se $-\gamma$ soddisfa ad es. alla sola $\varphi(z) = 0$ ed è radice r^{pla} per essa, la $\Omega + \gamma I$ induce in α_0 un'omografia non singolare e in α un'omografia singolare $\pi + \gamma I$ col 1° spazio singolare r^{plo}. Ma allora la dimensione del 1° spazio singolare delle omografie $\pi + \gamma I$, $(\pi + \gamma I)^2$ ... va crescendo fino a raggiungere un massimo per $(\pi + \gamma I)^r$, e si mantiene costante per le potenze successive. Poichè il 1° spazio singolare di $(\Omega + \gamma I)^t$ è in questo caso quello stesso dell'omografia $(\pi + \gamma I)^t$ che essa subordina in α, segue che $\Omega + \gamma I$ ha il 1° spazio singolare r^{plo}, cioè $-\gamma$ è radice r^{pla} anche per $\psi(z) = 0$.

Se poi $-\gamma$ è radice r^{pla} per $\varphi(z) = 0$ ed s^{pla} per $\varphi_0(z) = 0$ ed è $r \geq s$, la $\Omega + \gamma I$ induce in α e in α_0 due omografie singolari $\pi + \gamma I$ $\pi_0 + \gamma I$ coi primi spazi singolari rispettivamente r^{plo} ed s^{plo}. Osservando che il 1° spazio singolare di $(\Omega + \gamma I)^t$ $(t = 1, 2, ...)$ è quello che congiunge i primi spazi singolari delle omografie $(\pi + \gamma I)^t$ $(\pi_0 + \gamma I)^t$, si deduce che la dimensione del 1° spazio singolare delle omografie $\Omega + \gamma I$, $(\Omega + \gamma I)^2$, ... va crescendo fino a raggiungere un massimo per $(\Omega + \gamma I)^r$ e si mantiene costante per le potenze successive. Di qui segue che $-\gamma$ è radice r^{pla} per $\psi(z) = 0$.

Da quanto abbiamo detto risulta che:

Il primo membro dell'equazione minima dell'omografia Ω *è il minimo comune multiplo dei primi membri delle equazioni minime delle omografie che* Ω *induce in* α *e in* α_0.

Ne segue che $\psi(z) = 0$ ammette o no radici tutte semplici secondochè $\varphi(z) = 0$ e quindi $\varphi_0(z) = 0$ ammettono o no radici tutte semplici. Ciò significa che:

Una corrispondenza T *ammette o no valenze tutte semplici secondochè l'omografia* Ω, *immagine di* T, *è generale o particolare* (*).

(*) Al risultato di questo n° si può giungere più rapidamente con le seguenti considerazioni poggiate sopra un teorema di Frobenius (Cfr. Rosati, *C. P.*, n° 10).

Poichè $\psi(\Omega)$ è un'omografia nulla di S_{2p-1}, dovranno esser nulle le

6. — Sia γ una valenza di T associata ad un sistema ∞^{l-1} d'integrali, cioè $-\gamma$ sia una radice di $\Pi(\rho)=0$ che renda il determinante $\Pi(\rho)$ di caratteristica $p-l$. L'omografia $\pi_0+\gamma I$, subordinata in α_0 da $\Omega+\gamma I$, e l'omografia $\Pi+\gamma I$, subordinata nella stella (α) da $\Omega^{-1}+\gamma I$, saranno singolari di specie l, avranno cioè un s_{l-1} ed una stella Σ_{l-1} come 1° spazio e come 1ª stella singolare. Si osservi ora che l'equazione $\Pi_0(\rho)=0$ ammette la radice $-\gamma_0$, immaginaria coniugata di $-\gamma$, la quale rende il determinante $\Pi_0(\rho)$ di caratteristica $p-l$; ne segue che le omografie $\pi+\gamma_0 I$ e $\Pi_0+\gamma_0 I$ rispettivamente indotte nello spazio α e nella stella (α_0) da $\Omega+\gamma_0 I$ e da $\Omega^{-1}+\gamma_0 I$ sono singolari di specie l. La prima avrà come 1° spazio singolare l' $s^{(0)}_{l-1}$ immaginario coniugato di s_{l-1}, la seconda avrà come 1ª stella singolare la stella $\Sigma^{(0)}_{l-1}$ immaginaria coniugata di Σ_{l-1}. Si indichino ora con Ω' l'omografia immagine di T^{-1}, con π' π'_0 le omografie indotte da Ω' in α e in α_0, con Π' Π'_0 quelle indotte da Ω'^{-1} nelle stelle (α) ed (α_0), e con Λ il sistema nullo fondamentale trasformante in sè gli spazi α ed α_0; e si ricordi che fra Ω ed Ω' sussiste la relazione $\Omega'=\Lambda\Omega^{-1}\Lambda$ (*).

Osservando che $\Omega'+\gamma_0 I=\Lambda(\Omega^{-1}+\gamma_0 I)\Lambda$, e che $\Omega'^{-1}+\gamma_0 I=\Lambda(\Omega+\gamma_0 I)\Lambda$, si deduce che l'omografia $\pi'_0+\gamma_0 I$, indotta in α_0 da $\Omega'+\gamma_0 I$, e l'omografia $\Pi'+\gamma_0 I$, indotta nella stella (α) da $\Omega'^{-1}+\gamma_0 I$, si ottengono rispettivamente trasformando mediante il sistema nullo Λ la $\Pi_0+\gamma_0 I$ della stella (α_0) e la $\pi+\gamma_0 I$ dello spazio α. Entrambe sono dunque singolari di specie l, e la $\pi'_0+\gamma_0 I$ ha per 1° spazio singolare l' s'_{l-1}

---

omografie $\psi(\pi)$ $\psi(\pi_0)$ che essa induce in α e in α_0, cioè π e π_0 soddisfano all'equazione $\psi(z)=0$; ed allora, per il ricordato teorema di Frobenius, dovrà essere $\psi(z)$ divisibile per i polinomi $\varphi(z)$ e $\varphi_0(z)$ e quindi per il loro m. c. m., che diremo $\Phi(z)$.

Inversamente $\Phi(\Omega)$ subordina in α e in α_0 le omografie $\Phi(\pi)$ $\Phi(\pi_0)$, le quali, per essere $\Phi(z)$ divisibile per $\varphi(z)$ e per $\varphi_0(z)$, sono omografie nulle; ed allora, poichè α ed α_0 appartengono ad S_{2p-1}, dovrà $\Phi(\Omega)$ essere un'omografia nulla; da cui segue che $\Phi(z)$ è divisibile per $\psi(z)$.

Si conclude pertanto che $\psi(z)=\Phi(z)$.

(*) Rosati, C., n° 7, in cui si dice che le reciprocità $\Omega\Lambda$, $\Omega'\Lambda$, immagini di T e di T^{-1}, sono l'una inversa dell'altra.

polare della stella $\Sigma^{(0)}_{l-1}$ rispetto a Λ, e la $\Pi' + \gamma_0 I$ ha come 1ª stella singolare la stella Σ'_{l-1} polare dello spazio $s^{(0)}_{l-1}$ rispetto a Λ. Risulta di qui che la corrispondenza T^{-1} ammette la valenza γ_0 associata ad un sistema lineare ∞^{l-1} d'integrali.

Di più, se s_{l-1} e Σ_{l-1} sono spazio e stella singolare semplici per le omografie $\pi_0 + \gamma I$ e $\Pi + \gamma I$, la stella Σ'_{l-1} e lo spazio s'_{l-1} saranno per le omografie $\Pi' + \gamma_0 I$ $\pi'_0 + \gamma_0 I$, dedotte dalle prime trasformandole mediante l'antireciprocità prodotto del *coniugio* per il sistema nullo Λ, stella e spazio singolari semplici. Se invece in s_{l-1} e in Σ_{l-1} sono venuti successivamente ad immergersi degli spazi e stelle singolari di dimensioni $l_1 - 1$, $l_2 - 1$, ... $l_{r-1} - 1$, anche in Σ'_{l-1} ed in s'_{l-1} sono venuti successivamente ad immergersi stelle e spazi singolari delle stesse dimensioni.

Possiamo dunque enunciare il teorema:

Le valenze di una corrispondenza T *e quelle della corrispondenza inversa* T^{-1} *sono numeri immaginari coniugati. Inoltre una valenza di* T *e la immaginaria coniugata di* T^{-1} *hanno la stessa molteplicità e sono associate a sistemi lineari d'integrali (in generale distinti) della stessa dimensione.*

7. — Non sarà inutile procurarci una conferma, per via analitica, della proprietà dimostrata nel n° precedente.

Si consideri perciò il determinante

$$\Omega(\rho) = \begin{vmatrix} h_{11} - \rho & h_{12} & \dots h_{1p} & H_{11} & \dots H_{1p} \\ h_{21} & h_{22} - \rho & \dots h_{2p} & H_{21} & \dots H_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{p1} & h_{p2} & \dots h_{pp} - \rho & H_{p1} & \dots H_{pp} \\ g_{11} & g_{12} & \dots g_{1p} & G_{11} - \rho & \dots G_{1p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{p1} & g_{p2} & \dots g_{pp} & G_{p1} & \dots G_{pp} - \rho \end{vmatrix}$$

e si aggiungano alla riga l^{ma} $(l = 1, 2, \dots p)$ le righe $(p+1)^{\mathrm{ma}}$, $(p+2)^{\mathrm{ma}}$, ... $(2p)^{\mathrm{ma}}$ moltiplicate rispettivamente per $a_{l1}\, a_{l2} \dots a_{lp}$; tenendo conto delle relazioni (2) di Hurwitz, si ottiene:

$$\Omega(\rho)=\begin{vmatrix} \pi_{11}-\rho, & \pi_{12}, & \dots \pi_{1p}, & \sum_i \pi_{1i}\, a_{i1}-\rho\, a_{11}, & \dots & \sum_i \pi_{1i}\, a_{ip}-\rho\, a_{1p} \\ \pi_{21}, & \pi_{22}-\rho, & \dots \pi_{2p}, & \sum_i \pi_{2i}\, a_{i1}-\rho\, a_{21}, & \dots & \sum_i \pi_{2i}\, a_{ip}-\rho\, a_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \pi_{p1}, & \pi_{p2}, & \dots \pi_{pp}-\rho, & \sum_i \pi_{pi}\, a_{i1}-\rho\, a_{p1}, & \dots & \sum_i \pi_{pi}\, a_{ip}-\rho\, a_{pp} \\ g_{11}, & g_{12}, & \dots g_{1p}, & G_{11}-\rho, & \dots & G_{1p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{p1}, & g_{p2}, & \dots g_{pp}, & G_{p1}, & \dots & G_{pp}-\rho \end{vmatrix}.$$

Si tolgano ora dalla colonna $(p+k)^{ma}$ $(k=1, 2, \dots p)$ la 1^a, la 2^a, ... la p^{ma} colonna moltiplicate rispettivamente per a_{1k}, a_{2k}, ... a_{pk}, e si ricordi (Hurwitz, l. c., nota al § 10) che i numeri π'_{kl}, analoghi ai π_{kl}, della corrispondenza inversa T^{-1} sono espressi dalle formule

$$\pi'_{kl}=G_{lk}-\sum_i g_{li}\, a_{ki} \qquad (k, l=1, 2, \dots p);$$

il determinante precedente diviene allora

$$\Omega(\rho)=\begin{vmatrix} \pi_{11}-\rho & \pi_{12} & \dots \pi_{1p} & 0 & 0 & \dots 0 \\ \pi_{21} & \pi_{22}-\rho & \dots \pi_{2p} & 0 & 0 & \dots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \pi_{p1} & \pi_{p2} & \dots \pi_{pp}-\rho & 0 & 0 & \dots 0 \\ g_{11} & g_{12} & \dots g_{1p} & \pi'_{11}-\rho & \pi'_{21} & \dots \pi'_{p1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{p1} & g_{p2} & \dots g_{pp} & \pi'_{1p} & \pi'_{2p} & \dots \pi'_{pp}-\rho \end{vmatrix}$$

e quindi

$$\Omega(\rho)=\Pi(\rho)\,\Pi'(\rho) \tag{7}$$

in cui $\Pi'(\rho)$ indica il 1° membro dell'equazione caratteristica dell'omografia indotta nella stella (α) dalla omografia Ω' immagine di T^{-1}. Dal confronto della (6) con la (7) si ottiene la identità

$$\Pi'(\rho)=\Pi_0(\rho),$$

la quale prova che le valenze di T e quelle di T^{-1} hanno valori immaginari coniugati.

8. — È noto che l'equazione minima di una corrispondenza simmetrica ammette radici tutte semplici e reali, e che quella di una corrispondenza emisimmetrica ammette radici semplici e immaginarie pure, eccezion fatta di una eventuale radice nulla (*).

Da ciò, e dall'osservazione del n° 5, si ricava che:

Una corrispondenza simmetrica possiede valenze tutte semplici e reali, una corrispondenza emisimmetrica possiede pure valenze tutte semplici, le quali, tranne una eventuale valenza nulla, hanno valori immaginari puri.

Inoltre dalla relazione $T - T^{-1} \equiv 0$, che sussiste quando T è simmetrica, si deduce che una stessa valenza è associata, per T e per T^{-1}, al medesimo sistema lineare d'integrali; e dalla relazione $T + T^{-1} \equiv 0$, che vale se T è emisimmetrica, risulta che una valenza $i\beta$ di T e la coniugata $-i\beta$ di T^{-1} (in cui β può eventualmente essere nullo) sono pure associate allo stesso sistema lineare d'integrali.

Queste considerazioni possono essere invertite; perciò occorre anzitutto dimostrare la proprietà:

Se una valenza γ *di* T *e la immaginaria coniugata* γ_0 *di* T^{-1} *sono associate allo stesso sistema lineare d'integrali,* γ *e* γ_0 *sono per* T *e per* T^{-1} *valenze semplici.*

Riprendendo infatti le notazioni usate precedentemente, e supponendo che il sistema lineare d'integrali cui sono associate le valenze γ e γ_0 sia ∞^{l-1}, l'omografia singolare $\pi_0 + \gamma I$ dello spazio α_0 e quella $\pi + \gamma_0 I$ dello spazio α hanno come primi spazi singolari un s_{l-1} ed un $s^{(0)}_{l-1}$ immaginari coniugati, e le omografie $\Pi + \gamma I$ della stella (α) e $\Pi_0 + \gamma_0 I$ della stella (α_0) hanno come prime stelle singolari una Σ_{l-1} ed una $\Sigma^{(0)}_{l-1}$ aventi per sostegni un S_{2p-1-l} ed un $S^{(0)}_{2p-1-l}$ immaginari coniugati. L'ipotesi fatta, che le valenze γ e γ_0 siano associate allo stesso sistema d'integrali, significa che gli spazi $s^{(0)}_{l-1}$ ed S_{2p-1-l} sono l'uno polare dell'altro nel sistema nullo Λ; ma allora anche gli spazi s_{l-1} ed $S^{(0)}_{2p-1-l}$, immaginari coniugati dei precedenti, saranno pure l'uno polare dell'altro rispetto a Λ, e lo spazio *reale* R_{2l-1}, congiungente s_{l-1} con $s^{(0)}_{l-1}$, avrà per polare, rispetto a Λ, lo spazio

(*) Rosati, *C. P.*, n° 15.

reale $R_{2(p-l)-1}$ intersezione di S_{2p-1-l} con $S^{(0)}_{2p-1-l}$. Gli spazi R_{2l-1} ed $R_{2(p-l)-1}$ sono allora, per una osservazione che abbiamo altre volte utilizzato (*), indipendenti; e poichè $R_{2(p-l)-1}$ sega α_0 nell's_{p-1-l} che è il 2° spazio singolare della omografia $\pi_0 + \gamma I$, si conclude che s_{l-1} è per questa spazio singolare semplice, cioè γ è valenza semplice per T e γ_0 è valenza semplice per T^{-1}.

Ciò premesso, si consideri una corrispondenza T che abbia tutte le valenze reali, e si supponga che una stessa valenza, per T e per T^{-1}, sia associata allo stesso sistema d'integrali. Per l'osservazione precedente, le valenze di T sono tutte semplici, e quindi i sistemi lineari ad esse associati appartengono al sistema totale ∞^{p-1}; di qui segue che la $T - T^{-1}$ è di livello costante per p integrali di 1ª specie indipendenti, ed allora, per il teorema d'Abel, si ha $T - T^{-1} \equiv 0$.

Analogamente, se T ha per valenze numeri immaginari puri, e sappiamo inoltre che ogni valenza $i\beta$ di T (in cui β può eventualmente essere nullo) e la $-i\beta$ di T^{-1} sono associate allo stesso sistema d'integrali, sempre in virtù della proprietà precedente, la $T + T^{-1}$ è di livello costante per p integrali indipendenti di 1ª specie, donde segue che $T + T^{-1} \equiv 0$.

Possiamo dunque enunciare:

Condizione necessaria e sufficiente perchè una corrispondenza T *sia simmetrica è che le sue valenze siano tutte reali ed ognuna di esse sia, per* T *e per* T^{-1}, *associata allo stesso sistema lineare di integrali* (**).

Condizione necessaria e sufficiente perchè una corrispondenza T *sia emisimmetrica è che le sue valenze siano immaginarie pure (comprendendo in tale denominazione una eventuale valenza nulla) e che ogni valenza di* T *e la immaginaria coniugata di* T^{-1} *siano associate allo stesso sistema d'integrali.*

9. — Il numero U delle coincidenze della corrispondenza (n, ν) considerata può essere espresso mediante una formula la quale può considerarsi come la generalizzazione di quella di Cayley-Brill per le corrispondenze a valenza ordinaria.

(*) Rosati, C., nota al n° 8.

(**) L'equazione minima di una corrispondenza simmetrica coincide dunque con l'equazione minima della relativa omografia Π.

Si indichino con $\gamma' \gamma'' \dots \gamma^{(k)}$ le valenze di T, con $r_i (\geq 1)$ la molteplicità della valenza $\gamma^{(i)}$ e con $q_i - 1$ la dimensione del sistema lineare d'integrali rispetto a cui è di livello costante la potenza $(T + \gamma^{(i)} I)^{r_i}$. La corrispondenza T^{-1} avrà le valenze $\gamma'_0 \gamma''_0 \dots \gamma^{(k)}_0$ immaginarie coniugate di quelle di T; sarà inoltre r_i la molteplicità della valenza $\gamma^{(i)}_0$ e $q_i - 1$ la dimensione del sistema lineare d'integrali rispetto a cui è di livello costante la potenza $(T^{-1} + \gamma^{(i)}_0 I)^{r_i}$. Osservando che q_i è la molteplicità della radice $-\gamma^{(i)}$ per l'equazione $\Pi(\rho) = 0$ e della radice $-\gamma^{(i)}_0$ per l'equazione $\Pi_0(\rho) = 0$, e tenendo presente l'identità (6), si avrà manifestamente

$$h_{11} + h_{22} + \dots + h_{pp} + G_{11} + G_{22} + \dots + G_{pp} =$$
$$= -(\gamma' + \gamma'_0) q_1 - (\gamma'' + \gamma''_0) q_2 - \dots - (\gamma^{(k)} + \gamma^{(k)}_0) q_k .$$

Ed allora la formula di Hurwitz (*)

$$U = n + \nu - (h_{11} + h_{22} + \dots + h_{pp} + G_{11} + G_{22} + \dots + G_{pp})$$

diviene

$$U = n + \nu + (\gamma' + \gamma'_0) q_1 + (\gamma'' + \gamma''_0) q_2 + \dots + (\gamma^{(k)} + \gamma^{(k)}_0) q_k .$$

Per le corrispondenze simmetriche, le quali hanno le valenze reali, sarà $\gamma^{(i)} = \gamma^{(i)}_0 = \rho_i$, onde la precedente formula acquista la forma

$$U = n + \nu + 2 q_1 \rho_1 + 2 q_2 \rho_2 + \dots + 2 q_k \rho_k .$$

Per le corrispondenze emisimmetriche, per cui è $\gamma^{(i)} + \gamma^{(i)}_0 = 0$, vale la formula (**)

$$U = n + \nu .$$

10. — Termineremo con la seguente osservazione relativa alle corrispondenze dotate di valenze multiple.

L'equazione minima $\psi(z) = 0$ di una tale corrispondenza T dovrà allora possedere radici multiple. Se $-\gamma_1, -\gamma_2, \dots -\gamma_k$

(*) Hurwitz, l. c., § 10.

(**) Rosati, *Sulle corrispondenze algebriche fra i punti di una curva algebrica.* " Rendiconti della R. Accademia dei Lincei ", vol. XXII (1913).

sono le radici di $\psi(z)=0$ aventi la stessa molteplicità l, il fattore $\chi(z)=(z+\gamma_1)(z+\gamma_2)(z+\gamma_k)$ si stacca razionalmente da $\psi(z)$ e sarà perciò un polinomio a coefficienti interi. Ne segue che la $\chi(\Omega)$ è un'omografia singolare *razionale*, ed avrà perciò come 1° spazio singolare un R_{2q-1} razionale appoggiato ad α e ad α_0 lungo due spazi immaginari coniugati s_{q-1} ed $s^{(0)}_{q-1}$, e come 2° spazio singolare un $R_{2(p-q)-1}$ razionale congiungente un s_{p-q-1} di α col suo immaginario coniugato $s^{(0)}_{p-q-1}$ di α_0. La omografia $\chi(\Omega)$ induce in α_0 l'omografia singolare $\chi(\pi_0)=(\pi_0+\gamma_1 I)(\pi_0+\gamma_2 I)\ldots(\pi_0+\gamma_k I)$ di cui $s^{(0)}_{q-1}$ è il 1° spazio singolare, e la $\chi(\Omega^{-1})$ induce nella stella (α) l'omografia singolare $\chi(\Pi)=(\Pi+\gamma_1 I)(\Pi+\gamma_2 I)\ldots(\Pi+\gamma_k I)$ la cui 1ª stella singolare è la Σ_{q-1} avente per sostegno lo spazio che congiunge α con $R_{2(p-q)-1}$, ed è facile provare (*) che $s^{(0)}_{q-1}$ è lo spazio con-

---

(*) Sia Ω un'omografia di S_r e $\psi(z)=0$ la sua equazione minima. Indicando con $-\gamma_1, -\gamma_2, \ldots, -\gamma_k$ radici distinte di $\psi(z)=0$, si consideri l'omografia $f(\Omega)=(\Omega+\gamma_1 I)(\Omega+\gamma_2 I)\ldots(\Omega+\gamma_k I)$ e se ne ricerchi il 1° ed il 2° spazio singolare. Se S_{h_i-1} e G_{r-h_i} $(i=1,2,\ldots,k)$ sono il 1° ed il 2° spazio singolare di $\Omega+\gamma_i I$, poichè G_{r-h_1} contiene S_{h_2-1}, l'omografia $\Omega_1=(\Omega+\gamma_1 I)(\Omega+\gamma_2 I)$ è singolare di specie h_1+h_2, ed il suo 1° spazio singolare $S_{h_1+h_2-1}$ dovrà passare per S_{h_1-1}, mentre il 2° $G_{r-h_1-h_2}$ dovrà giacere in G_{r-h_2} (cfr. Rosati, *C. P.*, n° 4); e poichè i due fattori di Ω_1 sono omografie permutabili, $S_{h_1+h_2-1}$ dovrà passare anche per S_{h_2-1}, e $G_{r-h_1-h_2}$ dovrà giacere anche in G_{r-h_1}. Si conclude che $S_{h_1+h_2-1}$ è lo spazio congiungente S_{h_1-1} con S_{h_2-1} e che $G_{r-h_1-h_2}$ è l'intersezione di G_{r-h_1} con G_{r-h_2}. Si consideri ora l'omografia $\Omega_2=\Omega_1(\Omega+\gamma_3 I)$; poichè S_{h_3-1} giace in G_{r-h_1} e in G_{r-h_2} e quindi nella loro intersezione $G_{r-h_1-h_2}$, la Ω_2 sarà singolare di specie $h_1+h_2+h_3$ ed il 1° spazio singolare $S_{h_1+h_2+h_3-1}$, attesa la permutabilità di Ω_1 con $\Omega+\gamma_3 I$, dovrà passare per $S_{h_1+h_2-1}$ e per S_{h_3-1}, mentre il 2° spazio singolare $G_{r-h_1-h_2-h_3}$ dovrà giacere tanto in $G_{r-h_1-h_2}$ come in G_{r-h_3}. Dunque $S_{h_1+h_2+h_3-1}$ è lo spazio congiungente S_{h_1-1} S_{h_2-1} S_{h_3-1}, e $G_{r-h_1-h_2-h_3}$ è l'intersezione di G_{r-h_1} G_{r-h_2} G_{r-h_3}. Così continuando, si conclude che $f(\Omega)$ ha come 1° spazio singolare lo spazio congiungente S_{h_1-1} $S_{h_2-1}\ldots S_{h_k-1}$ e come 2° spazio singolare l'intersezione di G_{r-h_1} $G_{r-h_2}\ldots G_{r-h_k}$.

Indichi ora $\varphi(\Omega)$ un'omografia non singolare, funzione razionale intera di Ω; ciò significa che nessuna delle radici $-\rho_1, -\rho_2, \ldots -\rho_l$ di $\varphi(z)=0$ appartiene all'equazione minima $\psi(z)=0$. L'omografia $\chi(\Omega)=f(\Omega)\,\varphi(\Omega)$ è allora singolare della stessa specie di $f(\Omega)$, ed osservando inoltre che per le omografie non singolari $\Omega+\rho_1 I, \ldots \Omega+\rho_l I$ componenti $\varphi(\Omega)$ gli spazi $S_{h_1-1}\ldots S_{h_k-1}$ sono di punti uniti e gli spazi $G_{r-h_1}\ldots G_{r-h_k}$ sono di

giungente i primi spazi singolari dei fattori componenti $\chi(\pi_0)$ che risultano omografie singolari, ed analogamente che Σ_{q-1} è la stella congiungente le prime stelle singolari dei fattori di $\chi(\Pi)$ che risultano omografie singolari. Ora, perchè $\pi_0 + \gamma_i I$ e conseguentemente $\Pi + \gamma_i I$ siano singolari, occorre che $-\gamma_i$ sia radice dell'equazione minima $\varphi_0(z) = 0$ delle omografie π_0 e Π, cioè che γ_i sia una valenza della corrispondenza T. Quando ciò avviene, in virtù della proprietà dimostrata al n° 5, occorre che la molteplicità di $-\gamma_i$ per $\varphi_0(z) = 0$ sia minore od uguale ad l; nel 1° caso $-\gamma_i$ deve essere radice di $\varphi(z) = 0$ di molteplicità l, cioè γ_i è valenza l^{pla} di T^{-1}, nel 2° caso $-\gamma_i$ o non soddisfa a $\varphi(z) = 0$, o vi soddisfa con la molteplicità $\leq l$; cioè γ_i, o non è valenza di T^{-1} ovvero lo è di molteplicità $\leq l$.

Poichè la stella Σ_{q-1} è immagine di un sistema regolare riducibile, il ragionamento fatto prova che:

Se sopra una curva esiste una corrispondenza T *dotata di valenze multiple, la curva possiede sistemi regolari riducibili. Ed è tale il sistema congiungente i sistemi lineari associati alle valenze di* T *aventi una molteplicità* l, *che non siano al tempo stesso valenze di* T^{-1} *o lo siano di molteplicità* $\leq l$, *e quelli associati alle valenze di* T *di molteplicità* $< l$ *purchè siano valenze di* T^{-1} *di molteplicità* l.

Dunque sopra una curva priva di sistemi regolari riducibili ogni corrispondenza è dotata di valenze tutte semplici.

Pisa, luglio 1917.

---

iperpiani uniti, si deduce che $\varphi(\Omega)$ trasforma in sè lo spazio congiungente i primi e lo spazio intersezione dei secondi, e che quindi l'omografia $\chi(\Omega)$ ha per spazi singolari quelli che competono a $f(\Omega)$.

Su alcune omografie speciali e sugli operatori omografici C, R.

Nota di ANGELO PENSA (a Torino).

Nell'opera: *Analyse Vectorielle générale* di C. BURALI-FORTI e R. MARCOLONGO (t. I e II) [1] che dovremo spesso citare [2], si trovano, insieme ai fondamenti della teoria delle *Omografie vettoriali*, le formole essenziali [3] per lo sviluppo di essa, e per le sue applicazioni alla Geometria, alla Meccanica ed alla Fisica Matematica.

Però nelle applicazioni continue della teoria, nuove formole si presentano ed altre se ne richiedono tra gli operatori omografici. Alcune di queste sono qui raccolte e dimostrate.

§ 1. — Omografie $\boldsymbol{u}\wedge$, $\boldsymbol{u}\wedge\alpha$, $\alpha\,.\,\boldsymbol{u}\wedge$.

Se $\boldsymbol{u}$ è un vettore, ed α un'omografia, si hanno le seguenti identità:

(1) $$\alpha\,.\,\boldsymbol{u}\wedge = \boldsymbol{u}\wedge\,.\,\mathrm{CK}\alpha - (\mathrm{K}\alpha\boldsymbol{u})\wedge\,,$$

(2) $$\boldsymbol{u}\wedge\alpha = \mathrm{CK}\alpha\,.\,\boldsymbol{u}\wedge - (\alpha\boldsymbol{u})\wedge\,,$$

---

[1] Pavia, Editore Mattei e C. (1912, 1913).

[2] Useremo le abbreviazioni A_1 ed A_2 rispettivamente.

[3] In A_2, pag. 134, vi sono alcuni errori tipografici. Scrivo qui le formole corrette, secondo il desiderio espressomi dagli Autori:

[8] $\mathrm{KR}'(\alpha,\beta) = \mathrm{R}'(\mathrm{K}\alpha, \mathrm{K}\beta)$.

[9] $\mathrm{CR}'(\alpha,\beta) = \mathrm{K}(\alpha\mathrm{C}\beta + \beta\mathrm{C}\alpha) = \mathrm{K}(\mathrm{C}\alpha\,.\,\beta + \mathrm{C}\beta\,.\,\alpha)$.

[11] $\mathrm{R}'(\boldsymbol{u}\wedge, \boldsymbol{v}\wedge) = 2\mathrm{DH}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$.

[12] $\mathrm{R}'[\alpha, \mathrm{H}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})] = -\boldsymbol{v}\wedge\,.\,\alpha\,.\,\boldsymbol{u}\wedge$.

$\mathrm{R}'[\mathrm{H}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}), \mathrm{H}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})] = \mathrm{H}(\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{b})$.

[13] $\mathrm{R}'(\alpha\beta, \alpha\gamma) = \mathrm{R}\alpha\,.\,\mathrm{R}'(\beta,\gamma)$.

La [12] qui riportata è dimostrata nel presente lavoro al § 3.

$$(3) \qquad \mathrm{C}\alpha \,.\, \boldsymbol{u}\wedge = \boldsymbol{u}\wedge \,.\, \mathrm{K}\alpha + (\mathrm{K}\alpha \boldsymbol{u})\wedge ,$$

$$(4) \qquad \boldsymbol{u}\wedge \,.\, \mathrm{C}\alpha = \mathrm{K}\alpha \,,\, \boldsymbol{u}\wedge + (\alpha \boldsymbol{u})\wedge ,$$

$$(5) \qquad \mathrm{R}\alpha \,.\, \boldsymbol{u}\wedge = (\alpha \boldsymbol{u})\wedge \,.\, \alpha ,$$

$$(6) \qquad \boldsymbol{u}\wedge \,.\, \mathrm{R}\alpha = \alpha \,.\, (\mathrm{K}\alpha \boldsymbol{u})\wedge .$$

Dimostrazioni. — Indicando con α un'omografia e con $\boldsymbol{u}$, x, y vettori arbitrarii, si ha (A_1, n. 19, [1]):

$$(\alpha \,.\, \boldsymbol{u}\wedge)\, x = \alpha\, (\boldsymbol{u}\wedge x) = \boldsymbol{u}\wedge \mathrm{CK}\alpha x + x\wedge \mathrm{K}\alpha \boldsymbol{u} =$$
$$= \boldsymbol{u}\wedge \mathrm{CK}\alpha x - (\mathrm{K}\alpha \boldsymbol{u})\wedge x = \{\, \boldsymbol{u}\wedge \mathrm{CK}\alpha - (\mathrm{K}\alpha \boldsymbol{u})\wedge \,\}\, x ,$$

e di qui, per l'arbitrarietà di x, risulta la (1).

Nella (1) si operi con $-\mathrm{K}$, e si avrà (A_1, n. 16, [1]; n. 12, [2]):

$$\boldsymbol{u}\wedge \,.\, \mathrm{K}\alpha = \mathrm{C}\alpha \,.\, \boldsymbol{u}\wedge - (\mathrm{K}\alpha \boldsymbol{u})\wedge .$$

Cambiando, in questa, $\mathrm{K}\alpha$ in α, si ottiene la (2).

Sostituendo nella (1) a $\mathrm{CK}\alpha$ la sua espressione $\mathrm{I}_1\mathrm{K}\alpha - \mathrm{K}\alpha$, ossia $\mathrm{I}_1\alpha - \mathrm{K}\alpha$, si ha:

$$\alpha \,.\, \boldsymbol{u}\wedge = \mathrm{I}_1\alpha \,.\, \boldsymbol{u}\wedge - \boldsymbol{u}\wedge \,.\, \mathrm{K}\alpha - (\mathrm{K}\alpha \boldsymbol{u})\wedge ,$$

da cui, trasportando, si ha la (3).

Se nella (3) si cambia α in $\mathrm{K}\alpha$, si ha ancora la (2).

Nella (1) si cambi α in $\mathrm{K}\alpha$: si ottiene la (4).

Si ha (A_1, n. 20, [1]):

$$(\mathrm{R}\alpha \,.\, \boldsymbol{u}\wedge)\, x = \mathrm{R}\alpha\, (\boldsymbol{u}\wedge x) = (\alpha \boldsymbol{u})\wedge \alpha x ,$$

che, per l'arbitrarietà di x, dimostra la (5).

Sulla (5) opero con $-\mathrm{K}$ ed ho:

$$\boldsymbol{u}\wedge \,.\, \mathrm{RK}\alpha = \mathrm{K}\alpha \,.\, (\alpha \boldsymbol{u})\wedge ;$$

in questa cambio $\mathrm{K}\alpha$ in α, ed ho la (6).

§ 2. — Sugli operatori C, R.

Indicando con α un'omografia, si hanno le seguenti identità [4]:

$$(1) \quad I_1 C\alpha = 2 I_1 \alpha,$$

$$(2) \quad I_2 C\alpha = (I_1 \alpha)^2 + I_2 \alpha,$$

$$(3) \quad I_3 C\alpha = I_1 \alpha \,.\, I_2 \alpha - I_3 \alpha,$$

$$(4) \quad V C\alpha = - V\alpha,$$

$$(5) \quad C(C\alpha) = I_1 \alpha + \alpha = C\alpha + 2\alpha,$$

$$(5') \quad 2 R\alpha = (CK\alpha)^2 - CK\alpha^2,$$

$$(6) \quad RC\alpha = I_1 \alpha \,.\, K\alpha + R\alpha = I_2 \alpha + K\alpha^2,$$

$$(7) \quad CR\alpha = I_2 \alpha - R\alpha = I_1 \alpha \,.\, K\alpha - K\alpha^2 = CK\alpha \,.\, K\alpha,$$

$$(8) \quad (C\alpha)^{-1} = \frac{I_2 \alpha + \alpha^2}{I_1 \alpha \,.\, I_2 \alpha - I_3 \alpha} = \frac{I_1 \alpha \,.\, \alpha + RK\alpha}{I_1 \alpha \,.\, I_2 \alpha - I_3 \alpha} \text{ (per } C\alpha \text{ invertibile)},$$

$$(9) \quad I_1 CR\alpha = 2 I_2 \alpha,$$

$$(10) \quad I_1 RC\alpha = I_2 C\alpha,$$

$$(11) \quad CRC\alpha = (I_1 \alpha)^2 - K\alpha^2,$$

$$(12) \quad RCR\alpha = I_2 \alpha \,.\, RK\alpha + I_3 \alpha \,.\, \alpha.$$

Dimostrazioni. — Si ha [A_2, pag. 136, (9′)]:

$$I_3 (m + C\alpha) = m^3 + m^2 . I_1 C\alpha + m I_2 C\alpha + I_3 C\alpha,$$

od anche:

$$I_3 (m + C\alpha) = I_3 [(m + I_1 \alpha) - \alpha] = (m + I_1 \alpha)^3 - (m + I_1 \alpha)^2 . I_1 \alpha + (m + I_1 \alpha) \,.\, I_2 \alpha - I_3 \alpha = m^3 + 2 m^2 I_1 \alpha + m [(I_1 \alpha)^2 + I_2 \alpha] + [I_1 \alpha \,.\, I_2 \alpha - I_3 \alpha].$$

Uguagliando i coefficienti delle potenze simili di m, nelle due espressioni trovate per $I_3 (m + C\alpha)$, si hanno le (1), (2), (3).

---

(4) Identità nota e di uso frequente è:

$$KC\alpha = CK\alpha,$$

che si dimostra facilmente così:

$$KC\alpha = K(I_1 \alpha - \alpha) = I_1 \alpha - K\alpha = I_1 K\alpha - K\alpha = CK\alpha.$$

Si dimostra la (4) osservando che (A_1, n. 10, [1]; n. 12, [1]):

$$\mathrm{V\,C}\alpha = \mathrm{V}\,[\mathrm{I}_1\alpha - \alpha] = \mathrm{V\,I}_1\,\alpha - \mathrm{V}\alpha = -\,\mathrm{V}\alpha\,.$$

La (5) risulta osservando che (A_1, n. 8, [5]; n. 10, [1]):

$$\begin{aligned}\mathrm{C}\,(\mathrm{C}\alpha) &= \mathrm{I}_1\mathrm{C}\alpha - \mathrm{C}\alpha = 2\mathrm{I}_1\alpha - \mathrm{I}_1\alpha + \alpha = \mathrm{I}_1\alpha + \alpha = \\ &= (\mathrm{I}_1\alpha - \alpha) + 2\alpha = \mathrm{C}\alpha + 2\alpha\,.\end{aligned}$$

Da formole note si ha:

$$\begin{aligned}(\mathrm{CK}\alpha)^2 - \mathrm{CK}\alpha^2 &= (\mathrm{I}_1\mathrm{K}\alpha - \mathrm{K}\alpha)^2 - (\mathrm{I}_1\alpha^2 - \mathrm{K}\alpha^2) = \\ &= (\mathrm{I}_1\alpha)^2 + \mathrm{K}\alpha^2 - 2\mathrm{I}_1\alpha\,.\,\mathrm{K}\alpha - \mathrm{I}_1\alpha^2 + \mathrm{K}\alpha^2 = \\ &= (\mathrm{I}_1\alpha)^2 - \mathrm{I}_1\alpha^2 - 2\mathrm{I}_1\alpha\,.\,\mathrm{K}\alpha + 2\mathrm{K}\alpha^2.\end{aligned}$$

Ma da (A_1, n. 25, [2]) si trae:

$$\mathrm{I}_1\alpha^2 = (\mathrm{I}_1\alpha)^2 + 2\mathrm{I}_2\alpha - \mathrm{I}_2\,(2\alpha) = (\mathrm{I}_1\alpha)^2 - 2\mathrm{I}_2\alpha\,.$$

Sostituendo nella precedente, e ricordando la definizione di $\mathrm{R}\alpha$, si ha:

$$(\mathrm{CK}\alpha)^2 - \mathrm{CK}\alpha^2 = 2\,(\mathrm{I}_2\alpha - \mathrm{I}_1\alpha\,.\,\mathrm{K}\alpha + \mathrm{K}\alpha^2) = 2\mathrm{R}\alpha$$

che è la (5′).

Ricorrendo alla (7), pag. 132 di A_2, si dimostra la prima parte della (6), così:

$$\begin{aligned}\mathrm{R\,C}\alpha &= \mathrm{R}\,(\mathrm{I}_1\alpha - \alpha) = (\mathrm{I}_1\alpha)^2 - \mathrm{I}_1\alpha\,.\,\mathrm{CK}\alpha + \mathrm{R}\alpha = \\ &= (\mathrm{I}_1\alpha)^2 - \mathrm{I}_1\alpha\,(\mathrm{I}_1\alpha - \mathrm{K}\alpha) + \mathrm{R}\alpha = \mathrm{I}_1\alpha\,.\,\mathrm{K}\alpha + \mathrm{R}\alpha\,,\end{aligned}$$

e sostituendo qui ad $\mathrm{R}\alpha$ la sua nota espressione (A_1, n. 20, [2]), si ha la seconda parte della (6).

Dalla [5], n. 8 e dalla [1], n. 22 di A_1, si ha la prima parte della (7), come segue:

$$\mathrm{CR}\alpha = \mathrm{I}_1\mathrm{R}\alpha - \mathrm{R}\alpha = \mathrm{I}_2\alpha - \mathrm{R}\alpha\,.$$

La seconda parte della (7) si ha sostituendo qui ad $\mathrm{R}\alpha$ la

sua nota espressione, e applicando poi le formole [7], n. 17 e [5], n. 8 di A_1:

$$\mathrm{CR}\alpha = \mathrm{I}_2\alpha - (\mathrm{I}_2\alpha - \mathrm{I}_1\alpha \,.\, \mathrm{K}\alpha + \mathrm{K}\alpha^2) =$$
$$= (\mathrm{I}_1\alpha - \mathrm{K}\alpha) \,.\, \mathrm{K}\alpha = \mathrm{CK}\alpha \,.\, \mathrm{K}\alpha \,.$$

Dalle formole [4′], n. 20 e [2], n. 16 di A_1, si ricava:

$$\mathrm{I}_3\alpha \,.\, (\mathrm{K}\alpha)^{-1} = \mathrm{R}\alpha \,.$$

Cambio, in questa, α in $\mathrm{KC}\alpha$, ed ho (A_1, n. 17, [7]) [5]:

$$\mathrm{I}_3\mathrm{C}\alpha \,.\, (\mathrm{C}\alpha)^{-1} = \mathrm{RKC}\alpha \,, \qquad \text{da cui} \qquad (\mathrm{C}\alpha)^{-1} = \frac{\mathrm{RCK}\alpha}{\mathrm{I}_3\mathrm{C}\alpha} \,.$$

In questa, ad $\mathrm{I}_3\mathrm{C}\alpha$ si sostituisca la sua espressione [(3) di questo §], e ad $\mathrm{RCK}\alpha$ una o l'altra delle espressioni ricavate dalla (6) di questo §, sostituendovi $\mathrm{K}\alpha$ ad α: risulterà dimostrata la (8).

Dalla (1) di questo §, per la [1], n. 22 di A_1, si ha la (9):

$$\mathrm{I}_1\mathrm{CR}\alpha = 2\mathrm{I}_1\mathrm{R}\alpha = 2\mathrm{I}_2\alpha \,.$$

La (10) si dimostra ponendo $\mathrm{C}\alpha$ al posto di α nella prima delle [1], n. 22 di A_1.

Dalla [5], n. 8 di A_1, per la (10) di questo §, si ha:

$$\mathrm{CRC}\alpha = \mathrm{I}_1\mathrm{RC}\alpha - \mathrm{RC}\alpha = \mathrm{I}_2\mathrm{C}\alpha - \mathrm{RC}\alpha \,.$$

Di qui, per le (2) e (6) di questo §, risulta la (11).

Si sostituisca $\mathrm{R}\alpha$ ad α nella (6) di questo §, e poi si tengano presenti le [1], [3], [5] di A_1, n. 22. Si avrà la (12):

$$\mathrm{RCR}\alpha = \mathrm{I}_1\mathrm{R}\alpha \,.\, \mathrm{KR}\alpha + \mathrm{RR}\alpha = \mathrm{I}_2\alpha \,.\, \mathrm{RK}\alpha + \mathrm{I}_3\alpha \,.\, \alpha \,.$$

---

(5) Supposto $\mathrm{C}\alpha$ invertibile, ossia $\mathrm{I}_3\mathrm{C}\alpha \neq 0$.

§ 3. — Prodotti di tre omografie.

Indicheremo con α, β delle omografie, e con $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ dei vettori arbitrarii, mentre con $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ si indicherà una terna destrorsa di vettori unitarii ortogonali ([6]).

$$(1) \qquad \alpha \,.\, \boldsymbol{u}\wedge \,.\, \beta = \boldsymbol{u}\wedge \,.\, \mathrm{CK}\alpha \,.\, \beta - (\mathrm{K}\alpha\boldsymbol{u})\wedge\beta = \\ = \alpha \,.\, \mathrm{CK}\beta \,.\, \boldsymbol{u}\wedge - \alpha \,.\, (\beta\boldsymbol{u})\wedge ,$$

$$(1') \qquad \mathrm{R}\alpha \,.\, \boldsymbol{u}\wedge \,.\, \beta = (\alpha\boldsymbol{u})\wedge\alpha\beta ,$$

$$(2) \qquad \mathrm{I}_1 (\alpha \,.\, \boldsymbol{u}\wedge \,.\, \beta) = -2\boldsymbol{u} \times \mathrm{V}(\beta\alpha) = \\ = -2\boldsymbol{u} \times \}(\mathrm{C}\alpha)\,\mathrm{V}\beta - \mathrm{V}(\mathrm{K}\alpha \,.\, \beta)\{ \;(^7),$$

$$(3) \qquad \mathrm{I}_2 (\alpha \,.\, \boldsymbol{u}\wedge \,.\, \beta) = \boldsymbol{u} \times \mathrm{R}(\beta\alpha)\,\boldsymbol{u} ,$$

$$(4) \qquad \mathrm{R}(\alpha \,.\, \boldsymbol{u}\wedge \,.\, \beta) = \mathrm{R}\alpha \,.\, \mathrm{H}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \,.\, \mathrm{R}\beta = \mathrm{H}\}\mathrm{KR}\beta\boldsymbol{u}, \mathrm{R}\alpha\boldsymbol{u}\{ ,$$

$$(5) \qquad 2\mathrm{V}(\alpha \,.\, \boldsymbol{u}\wedge \,.\, \beta) = \}\mathrm{C}\beta \,.\, \mathrm{CK}\alpha - \mathrm{C}(\mathrm{K}\alpha \,.\, \beta)\{\,\boldsymbol{u} ,$$

$$(6) \qquad \boldsymbol{u}\wedge \,.\, \alpha \,.\, \boldsymbol{v}\wedge = -\mathrm{CH}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \,.\, \mathrm{CK}\alpha + \mathrm{CH}(\boldsymbol{u}, \mathrm{K}\alpha\boldsymbol{v}) = \\ = -\mathrm{R}'[\alpha, \mathrm{H}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})].$$

$$(7) \qquad \mathrm{I}_1 (\boldsymbol{u}\wedge \,.\, \alpha \,.\, \boldsymbol{v}\wedge) = -\boldsymbol{v} \times \mathrm{C}\alpha\boldsymbol{u} ,$$

$$(8) \qquad \mathrm{R}(\boldsymbol{u}\wedge \,.\, \alpha \,.\, \boldsymbol{v}\wedge) = \boldsymbol{u} \times \mathrm{R}\alpha\boldsymbol{v} \,.\, \mathrm{H}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) ,$$

$$(9) \qquad \mathrm{I}_2 (\boldsymbol{u}\wedge \,.\, \alpha \,.\, \boldsymbol{v}\wedge) = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} \,.\, \boldsymbol{u} \times \mathrm{R}\alpha\boldsymbol{v} ,$$

$$(10) \qquad 2\mathrm{V}(\boldsymbol{u}\wedge \,.\, \alpha \,.\, \boldsymbol{v}\wedge) = \alpha(\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}) - 2\mathrm{H}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})\,\mathrm{V}\alpha = \\ = \mathrm{K}\alpha(\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}) - 2\mathrm{H}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})\,\mathrm{V}\alpha ,$$

$$(11) \qquad \mathrm{V}(\boldsymbol{u}\wedge \,.\, \alpha \,.\, \boldsymbol{v}\wedge - \boldsymbol{v}\wedge \,.\, \alpha \,.\, \boldsymbol{u}\wedge) = \mathrm{D}\alpha(\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}) ,$$

$$(12) \qquad \mathrm{I}_3 (\boldsymbol{u}\wedge \,.\, \alpha \,.\, \boldsymbol{v}\wedge - \boldsymbol{v}\wedge \,.\, \alpha \,.\, \boldsymbol{u}\wedge) = \\ = 2\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v} \times \mathrm{K}\alpha(\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}) \,.\, \boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v} \times \alpha\mathrm{V}\alpha ,$$

$$(13) \qquad \mathrm{I}_1 (\beta \,.\, \alpha \,.\, \beta) = \mathrm{I}_1\beta \,.\, \mathrm{I}_1(\beta\alpha) - \mathrm{I}_1\mathrm{R}'(\beta, \beta\alpha) ,$$

$$(14) \qquad \boldsymbol{i}\wedge \,.\, \alpha \,.\, \boldsymbol{i}\wedge + \boldsymbol{j}\wedge \,.\, \alpha \,.\, \boldsymbol{j}\wedge + \boldsymbol{k}\wedge \,.\, \alpha \,.\, \boldsymbol{k}\wedge = -\mathrm{CK}\alpha .$$

([6]) Cfr. C. Burali-Forti et R. Marcolongo, *Éléments de calcul vectoriel*, etc. (Paris, Hermann et Fils, 1910), pag. 34.

([7]) Notiamo qui la relazione

$$(2') \qquad \mathrm{V}(\beta\alpha) = (\mathrm{C}\alpha)\,\mathrm{V}\beta - \mathrm{V}(\mathrm{K}\alpha \,.\, \beta)$$

che risulterà dalla dimostrazione della (2).

Dimostrazioni. — La (1) del § 1, moltiplicata a destra per β, dà la prima parte della (1) di questo §; la seconda parte si ottiene cambiando α in β nella (2) del § 1, e poi moltiplicando a sinistra per α (8).

Dalla (5) del § 1, moltiplicando a destra per β, si ha la (1').

La prima parte della (2) si ha dalle [1], n. 25 e [1], n. 23 di A_1:

$$I_1 (\alpha . \boldsymbol{u}\wedge . \beta) = I_1 [\boldsymbol{u}\wedge . (\beta\alpha)] = -2\boldsymbol{u} \times V(\beta\alpha).$$

Dalle [1], [2], n. 9 di A_1, risulta $\beta = K\beta + 2V\beta\wedge$. Perciò sarà, tenendo presenti le formole (A_1, n. 23, [2]; n. 17, [2]):

$$\begin{aligned} V(\beta\alpha) = V[(K\beta + 2V\beta\wedge)\alpha] = V(K\beta . \alpha) + (C\alpha) V\beta = \\ = (C\alpha) V\beta - V(K\alpha . \beta) \end{aligned}$$

che dimostra la (2') della nota (7). Sostituendo a $V(\beta\alpha)$ questo valore, nella espressione trovata per $I_1 (\alpha . \boldsymbol{u}\wedge . \beta)$, si ha la seconda parte della (2).

Dalle formole [1], n. 25 e [1], n. 23 di A_1, si ha la (3):

$$I_2 (\alpha . \boldsymbol{u}\wedge . \beta) = I_2 (\boldsymbol{u}\wedge\beta\alpha) = \boldsymbol{u} \times R(\beta\alpha)\boldsymbol{u}.$$

La (4) risulta senz'altro applicando successivamente le formole [5], n. 20; [2], n. 21; [2], n. 24 di A_1.

Dalla (1) di questo § si ha:

$$2V(\alpha . \boldsymbol{u}\wedge . \beta) = 2V[\boldsymbol{u}\wedge . CK\alpha . \beta] - 2V[(K\alpha\boldsymbol{u})\wedge\beta] =$$

e per la [2], n. 23 di A_1:

$$= C(CK\alpha . \beta)\boldsymbol{u} - (C\beta) K\alpha\boldsymbol{u} = [C(CK\alpha . \beta) - (C\beta) K\alpha]\boldsymbol{u}.$$

---

(8) Se nelle due forme della (1), in luogo di $CK\alpha$, $CK\beta$ si pongono le loro espressioni $I_1\alpha - K\alpha$, $I_1\beta - K\beta$, si ottiene:

$$\begin{aligned} \alpha . \boldsymbol{u}\wedge . \beta = I_1\alpha . \boldsymbol{u}\wedge . \beta - \boldsymbol{u}\wedge . K\alpha . \beta - (K\alpha\boldsymbol{u})\wedge\beta = \\ = I_1\beta . \alpha . \boldsymbol{u}\wedge - \alpha . K\beta . \boldsymbol{u}\wedge - \alpha(\beta\boldsymbol{u})\wedge . \end{aligned}$$

Applicando qui, e anche oltre, la [1], n. 10 di A_1, si ha:

$$C(CK\alpha\,.\,\beta) - (C\beta)\,.\,K\alpha = C[(I_1\alpha - K\alpha)\,.\,\beta] - (C\beta)\,K\alpha =$$
$$= I_1\alpha\,.\,C\beta - C(K\alpha\,.\,\beta) - (C\beta)\,.\,K\alpha =$$
$$= C\beta\,(I_1\alpha - K\alpha) - C(K\alpha\,.\,\beta) =$$
$$= C\beta\,.\,CK\alpha - C(K\alpha\,.\,\beta).$$

Sostituendo questo nella espressione trovata per $2V(\alpha\,.\,\boldsymbol{u}\wedge\,.\,\beta)$, si ha la (5).

La prima parte della (6) si ottiene dalla (1) del § 1, moltiplicando a sinistra per $\boldsymbol{u}\wedge$, e poi applicando la [1], n. 24 di A_1:

$$\boldsymbol{u}\wedge\,.\,\alpha\,.\,\boldsymbol{v}\wedge = \boldsymbol{u}\wedge\,.\,\boldsymbol{v}\wedge\,.\,CK\alpha - \boldsymbol{u}\wedge\,.\,(K\alpha\boldsymbol{v})\wedge =$$
$$= -CH(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\,.\,CK\alpha + CH(\boldsymbol{u}, K\alpha\boldsymbol{v}).$$

La seconda parte della (6) risulta applicando la 1ª delle (12) di A_2, pag. 134.

Per la formola $I_1(\alpha\beta) = I_1(\beta\alpha)$, si ha:

$$I_1(\boldsymbol{u}\wedge\,.\,\alpha\,.\,\boldsymbol{v}\wedge) = I_1 \}(\boldsymbol{u}\wedge\alpha)\,.\,\boldsymbol{v}\wedge\{ = \}\boldsymbol{v}\wedge\,.\,(\boldsymbol{u}\wedge\alpha)\{ =$$

Applicando ora la prima delle [1] e la [2] del n. 23 di A_1, risulta:

$$= -2\boldsymbol{v}\times V(\boldsymbol{u}\wedge\alpha) = -\boldsymbol{v}\times C\alpha\boldsymbol{u}.$$

Così è dimostrata la (7).

Applicando successivamente le [5], n. 20 e [2], n. 21 di A_1, si ha:

$$R(\boldsymbol{u}\wedge\,.\,\alpha\,.\,\boldsymbol{v}\wedge) = R(\boldsymbol{u}\wedge)\,.\,R\alpha\,.\,R(\boldsymbol{v}\wedge) =$$
$$= H(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})\,.\,[R\alpha\,.\,H(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})] =$$

e di qui, per la prima delle [2], n. 24 e penultima formola in nota a pag. 43 di A_1:

$$= H(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})\,.\,H(\boldsymbol{v}, R\alpha\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u}\times R\alpha\boldsymbol{v}\,.\,H(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}),$$

con che è dimostrata la (8).

Dalla precedente, osservando che $u \times R\alpha v$ è un numero, si ha, per la prima delle [1], n. 22 di A_1:

$$I_2(u\wedge . \alpha . v\wedge) = I_1[u \times R\alpha v . H(v, u)] = u \times R\alpha v . I_1 H(v, u),$$

e sostituendo qui ad $I_1 H(v . u)$ il suo valore dato dalla prima delle [3], n. 12 di A_1, si ha la (9).

Applicando successivamente le formole n. 23, [2]; n. 25, [1] e n. 23, [1] di A_1, si ha:

$$2V(u\wedge . \alpha . v\wedge) = C(\alpha . v\wedge)u = [I_1(v\wedge\alpha) - \alpha . v\wedge]u = \\ = -2v \times V\alpha . u + \alpha(u\wedge v).$$

Il termine $-2v \times V\alpha . u$ si può scrivere $-2H(v, u)V\alpha$, e si ha la prima parte della (10). Sostituendo invece ad α, in $\alpha(u\wedge v)$, la sua espressione $K\alpha + 2V\alpha\wedge$, si ottiene:

$$2V(u\wedge . \alpha . v\wedge) = K\alpha(u\wedge v) + 2V\alpha\wedge(u\wedge v) - 2v \times V\alpha . u =$$

Sviluppando $2V\alpha\wedge(u\wedge v)$ e riducendo, si ha la seconda parte della (10):

$$= K\alpha(u\wedge v) - 2V\alpha \times u . v = K\alpha(u\wedge v) - 2H(u, v)V\alpha.$$

Per la precedente risulta:

$$2V(u\wedge . \alpha . v\wedge - v\wedge . \alpha . u\wedge) = 2\alpha(u\wedge v) + \\ + 2u \times V\alpha . v - 2v \times V\alpha . u = 2\alpha(u\wedge v) - 2V\alpha\wedge(u\wedge v) = \\ = 2(\alpha - V\alpha\wedge)(u\wedge v) = 2D\alpha(u\wedge v),$$

ed è così dimostrata la (11).

Per la [9], n. 25, e [1], n. 23 di A_1, e per la (8) di questo § si ha:

$$I_3(u\wedge\alpha . v\wedge - v\wedge . \alpha . u\wedge) = \\ = I_1 \{ v\wedge . K\alpha . u\wedge . v \times R\alpha u . H(u, v) - \\ - u\wedge . K\alpha . v\wedge . u \times R\alpha v . H(v, u) \} =$$

per la prima delle [2], n. 24 di A_1:

$$= I_1 \{ v \times R\alpha u \,.\, v\wedge \,.\, H[u, K\alpha(u\wedge v)] + u \times R\alpha v \,.\, u\wedge \,.\, H[v, K\alpha(u\wedge v)] \} =$$

applicando le [1], n. 23 e [3], n. 12 di A_1:

$$= -v \times R\alpha u \,.\, v \times u\wedge K\alpha(u\wedge v) - u \times R\alpha v \,.\, u \times v\wedge K\alpha(u\wedge v) =$$

e per note proprietà del prodotto vettoriale misto [9]:

$$= u\wedge v \times K\alpha(u\wedge v) \{ v \times R\alpha u - u \times R\alpha v \} =$$

applicando il teorema di commutazione, e osservando che $KR\alpha - R\alpha = -2VR\alpha\wedge$:

$$= u\wedge v \times K\alpha(u\wedge v) \,.\, u \times (KR\alpha - R\alpha)\, v = u\wedge v \times K\alpha(u\wedge v) \,.\, 2VR\alpha \times u\wedge v =$$

per la [2], n. 22 di A_1:

$$= 2u\wedge v \times K\alpha(u\wedge v) \,.\, u\wedge v \times \alpha V\alpha \,.$$

Così è dimostrata la (12).

Per la prima delle [2], n. 25 di A_1 risulta:

$$I_1(\beta \,.\, \alpha \,.\, \beta) = I_1 \{ (\beta\alpha) \,.\, \beta \} = I_1\beta \,.\, I_1(\beta\alpha) + I_2\beta + I_2(\beta\alpha) - I_2(\beta + \beta\alpha).$$

Sostituendo qui alla somma $I_2\beta + I_2(\beta\alpha) - I_2(\beta + \beta\alpha)$ il suo valore $-I_1 R'(\beta, \beta\alpha)$ dato dalla (7) di pag. 134 di A_2, si ha la (13).

La seconda parte della (6) di questo § dà:

$$i\wedge \,.\, \alpha \,.\, i\wedge = -R'[\alpha, H(i, i)];$$
$$j\wedge \,.\, \alpha \,.\, j\wedge = -R'[\alpha, H(j, j)];$$
$$k\wedge \,.\, \alpha \,.\, k\wedge = -R'[\alpha, H(k, k)].$$

---

[9] Loc. cit., nota (6), pag. 36, formole (5), (6).

Sommando membro a membro queste tre uguaglianze, e tenendo presente la (5) di pag. 134 di A_2, risulta:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{i}\wedge . \alpha . \boldsymbol{i}\wedge + \boldsymbol{j}\wedge . \alpha . \boldsymbol{j}\wedge + \boldsymbol{k}\wedge . \alpha . \boldsymbol{k}\wedge = \\ &= - \mathrm{R}' [\alpha, \mathrm{H}(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}) + \mathrm{H}(\boldsymbol{j}, \boldsymbol{j}) + \mathrm{H}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k})] = \end{aligned}$$

e per la [8], n. 6 di A_1 e la (10) di pag. 134 di A_2 si ottiene:

$$= - \mathrm{R}'(\alpha, 1) = - \mathrm{CK}\alpha,$$

con che è dimostrata la (14).

§ 4. — Somme di omografie speciali.

Siano α, β omografie, ed $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ vettori qualunque. Si avrà:

$$\mathrm{I}_1(\alpha + \boldsymbol{u}\wedge\beta) = \mathrm{I}_1\alpha - 2\boldsymbol{u}\times \mathrm{V}\beta, \tag{1}$$

$$\mathrm{I}_2(\alpha + \boldsymbol{u}\wedge\beta) = \mathrm{I}_2\alpha + \boldsymbol{u}\times \{\mathrm{R}\beta\boldsymbol{u} - 2\alpha\mathrm{V}\beta - 2\mathrm{V}(\mathrm{K}\alpha . \beta)\} \tag{2}$$

$$\mathrm{I}_3(\alpha + \boldsymbol{u}\wedge\beta) = \mathrm{I}_3\alpha + \boldsymbol{u}\times \{\alpha . \mathrm{RK}\beta\boldsymbol{u} + 2\mathrm{V}(\mathrm{R}\alpha . \mathrm{K}\beta)\}, \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{R}(\alpha + \boldsymbol{u}\wedge\beta) = \mathrm{R}\alpha + \beta . (\mathrm{K}\alpha\boldsymbol{u})\wedge + \\ + \mathrm{H}\{2\mathrm{V}(\mathrm{K}\beta . \alpha) + \mathrm{RK}\beta\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\}, \end{aligned} \tag{4}$$

$$\mathrm{I}_1\{\alpha + \mathrm{H}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})\} = \mathrm{I}_1\alpha + \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}, \tag{5}$$

$$\mathrm{I}_2\{\alpha + \mathrm{H}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})\} = \mathrm{I}_2\alpha + \boldsymbol{u}\times \mathrm{C}\alpha\boldsymbol{v}, \tag{6}$$

$$\mathrm{I}_3\{\alpha + \mathrm{H}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})\} = \mathrm{I}_3\alpha + \boldsymbol{u}\times \mathrm{KR}\alpha\boldsymbol{v} = \mathrm{I}_3\alpha + \boldsymbol{v}\times \mathrm{R}\alpha\boldsymbol{u}, \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{R}\{\alpha + \mathrm{H}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})\} = \mathrm{R}\alpha + \mathrm{R}'\{\alpha, \mathrm{H}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})\} = \\ = \mathrm{R}\alpha - \boldsymbol{v}\wedge . \alpha . \boldsymbol{u}\wedge, \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_3(\alpha + x\beta) = \mathrm{I}_3\alpha . \{1 + x\mathrm{I}_1(\alpha^{-1}\beta) + x^2\mathrm{I}_2(\alpha^{-1}\beta) + \\ + x^3\mathrm{I}_3(\alpha^{-1}\beta)\} \text{ (per } \alpha \text{ invertibile).} \end{aligned} \tag{9}$$

Dimostrazioni. — Per la prima delle [1], n. 10 e la prima delle [1], n. 23 di A_1 si ha la (1).

Dalla [8], n. 25 di A_1 risulta:

$$\mathrm{I}_2(\alpha + \boldsymbol{u}\wedge\beta) = \mathrm{I}_2\alpha + \mathrm{I}_2(\boldsymbol{u}\wedge\beta) + \mathrm{I}_1\alpha . \mathrm{I}_1(\boldsymbol{u}\wedge\beta) - \mathrm{I}_1(\alpha . \boldsymbol{u}\wedge\beta) =$$

Per la seconda e la prima, successivamente, delle [1], n. 23 di A_1, e la (2), § 3 di questa Nota, si ha:

$$= I_2\alpha + u \times R\beta u - 2u \times (I_1\alpha . V\beta) +$$
$$+ 2u \times \{(C\alpha) V\beta - V(K\alpha . \beta)\} =$$
$$= I_2\alpha + u \times R\beta u - 2u \times (I_1\alpha . V\beta) +$$
$$+ 2u \times \{I_1\alpha . V\beta - \alpha V\beta - V(K\alpha . \beta)\} =$$
$$= I_2\alpha + u \times R\beta u - 2u \times \{\alpha V\beta + V(K\alpha . \beta)\},$$

con che è dimostrata la (2).

Per la [9], n. 25 di A_1 si ha:

$$I_3(\alpha + u\wedge\beta) = I_3\alpha + I_3(u\wedge\beta) +$$
$$+ I_1\{K\alpha . R(u\wedge\beta) + K(u\wedge\beta) . R\alpha\} =$$

applicando la terza delle [1] e la prima delle [3] del n. 23 di A_1, e la 1ª nota al n. stesso, si ottiene:

$$= I_3\alpha + I_1\{K\alpha . H(u, u) . R\beta - K\beta . u\wedge . R\alpha\} =$$

ossia (A_1, n. 24, [2]):

$$= I_3\alpha + I_1 H(KR\beta u, K\alpha u) - I_1\{u\wedge . (R\alpha . K\beta)\} =$$

e quindi (A_1, n. 12, [3]; n. 23, [1]; n. 15, [1]):

$$= I_3\alpha + u \times \alpha RK\beta u + 2u \times V(R\alpha . K\beta),$$

ciò che dimostra la (3).

Indicando con x ed y due vettori arbitrarii, si ha, per definizione di R ([1], n. 20 di A_1):

$$R(\alpha + u\wedge\beta)(x\wedge y) = (\alpha x + u\wedge\beta x)\wedge(\alpha y + u\wedge\beta y) =$$

sviluppando ed ordinando:

$$= R\alpha(x\wedge y) + \alpha x \times \beta y . u - \alpha y \times \beta x . u +$$
$$+ u \times \alpha y . \beta x - u \times \alpha x . \beta y + (u \times \beta x\wedge\beta y)u =$$

pel teorema di commutazione (A_1, n. 15, [1]):

$$= \mathrm{R}\alpha\,(x \wedge y) + [y \times \mathrm{K}\beta\,.\,\alpha x - x \times \mathrm{K}\beta\,.\,\alpha y]\,u + \\ + [y \times \mathrm{K}\alpha u\,.\,\beta x - x \times \mathrm{K}\alpha u\,.\,\beta y] + u \times \beta x \wedge \beta y\,.\,u\,.$$

L'espressione entro la prima parentesi quadra si trasforma colla [2] del n. 8 di A_1; quella entro la seconda, poichè $y \times \mathrm{K}\alpha u$ ed $x \times \mathrm{K}\alpha u$ sono numeri, è del tipo $m\beta x + n\beta y$ (indicando con m, n dei numeri), ossia $\beta\,(mx + ny)$, e si può scrivere $\beta\,(\mathrm{K}\alpha u) \wedge (x \wedge y)$; e l'ultimo termine vale $u \times \mathrm{R}\beta\,(x \wedge y)\,.\,u$, ossia, pel teorema di commutazione, $(\mathrm{RK}\beta u) \times (x \wedge y)\,.\,u$. Quindi:

$$\mathrm{R}\,(\alpha + u \wedge \beta)\,(x \wedge y) = \mathrm{R}\alpha\,(x \wedge y) + 2\,\mathrm{V}\,(\mathrm{K}\beta\,.\,\alpha) \times (x \wedge y)\,.\,u + \\ + \beta\,(\mathrm{K}\alpha u) \wedge (x \wedge y) + (\mathrm{RK}\beta u) \times (x \wedge y)\,.\,u =$$

ossia, per la [1] del n. 6 di A_1:

$$= \mathrm{R}\alpha\,(x \wedge y) + \mathrm{H}\,\}\,2\mathrm{V}\,(\mathrm{K}\beta\,.\,\alpha, u\,\{\,(x \wedge y) + \\ + \mathrm{H}\,\}\,\mathrm{RK}\beta u, u\,\{\,(x \wedge y) + \beta\,(\mathrm{K}\alpha u) \wedge (x \wedge y)\,.$$

Di qui, per la [4] del n. 6 di A_1, e per l'arbitrarietà di x ed y, risulta la (4).

Per la prima della [3], n. 12 di A_1 risulta la (5).

Applicando la [8], n. 25 di A_1 si ha:

$$\mathrm{I}_2\,[\alpha + \mathrm{H}\,(u, v)] = \mathrm{I}_2\alpha + \mathrm{I}_2\mathrm{H}\,(u, v) + \\ + \mathrm{I}_1\alpha\,.\,\mathrm{I}_1\mathrm{H}\,(u, v) - \mathrm{I}_1\,\}\,\alpha\,.\,\mathrm{H}\,(u, v)\,\{ =$$

ossia, per le [3], n. 12 e la prima delle [2], n. 24 di A_1:

$$= \mathrm{I}_2\alpha + \mathrm{I}_1\alpha\,.\,u \times v - u \times \alpha v = \mathrm{I}_2\alpha + u \times (\mathrm{I}_1\alpha - \alpha)\,v\,,$$

e quindi si ha la (6).

Per la [9], n. 25 di A_1 si ha:

$$\mathrm{I}_3\,[\alpha + \mathrm{H}\,(u, v)] = \mathrm{I}_3\alpha + \mathrm{I}_3\mathrm{H}\,(u, v) + \\ + \mathrm{I}_1\,\}\,\mathrm{K}\alpha\,.\,\mathrm{RH}\,(u, v) + \mathrm{KH}\,(u, v)\,.\,\mathrm{R}\alpha\,\{ =$$

e poichè $I_3 H(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$, $R H(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$ e $K H(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = H(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})$ come risulta dalle [3], n. 12, e [3], n. 21. Applicando ora la [2], n. 24 di A_1, e ancora la [3], n. 12, sarà:

$$= I_3\alpha + I_1 H \{ KR\alpha\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \} =$$
$$= I_3\alpha + (KR\alpha\boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{u} = I_3\alpha + \boldsymbol{v} \times R\alpha\boldsymbol{u},$$

e con ciò è interamente dimostrata la (7).

Applicando la (2) di A_2, pag. 134, si ottiene:

$$R' \{ \alpha, H(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \} = R \{ \alpha + H(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \} - R\alpha - RH(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v});$$

e poichè (A_1, n. 21, [3]) è $RH(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$, così dalla precedente si trae:

$$R \{ \alpha + H(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \} = R\alpha + R' \{ \alpha, H(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \},$$

prima parte della (8).

Di qui, per la (12), pag. 134 di A_2 [10], si ha:

$$R \{ \alpha + H(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \} = R\alpha - \boldsymbol{v}\wedge . \alpha . \boldsymbol{u}\wedge,$$

seconda parte della (8).

Applicando la [9], n. 25, e poi le [3], n. 10, [3], n. 20, e [1], n. 22 di A_1, si ha, per α invertibile:

$$I_3(\alpha + x\beta) = I_3 \{ \alpha(1 + x\alpha^{-1}\beta) \} = I_3 \{ 1 + x\alpha^{-1}\beta \} . I_3\alpha =$$
$$= \{ 1 + x^3 I_3(\alpha^{-1}\beta) + I_1 [x^2 R(\alpha^{-1}\beta) + xK(\alpha^{-1}\beta)] \} . I_3\alpha =$$
$$= \{ 1 + x^3 I_1(\alpha^{-1}\beta) + x^2 I_2(\alpha^{-1}\beta) + x I_1(\alpha^{-1}\beta) \} . I_3\alpha .$$

che dimostra la formola (9).

Torino, novembre 1917.

---

[10] Qui riportata nella nota [3], formola [12].

Sulle deformazioni delle dighe a volta.

Nota del Socio C. GUIDI.

In una precedente Nota pubblicata l'anno scorso nel " Giornale del Genio Civile „, avente per titolo *Sulle dighe a volta*, abbiamo dato le formole per il calcolo degli sforzi unitarî massimi prodotti in queste costruzioni dalla pressione idrostatica e da variazioni di temperatura. Vogliamo ora tornare sull'argomento per completarlo col calcolo delle deformazioni, la cui importanza pratica non è inferiore a quella del calcolo statico, in quanto che permette di verificare se le deformazioni osservate concordino con quelle teoriche, per dedurne un giudizio sulla buona esecuzione dell'opera.

Consideriamo, come si è fatto già per il problema statico, un anello orizzontale di volta, di spessore costante h, a direttrice circolare, lungo l'unità nel senso delle generatrici che si suppongono verticali, e calcoliamone lo spostamento del vertice in direzione normale alla corda, prodotto dalla pressione idrostatica e da variazioni di temperatura.

1° **Spostamento del vertice prodotto dalla pressione idrostatica.** — Conservando i simboli già adottati nella precedente Nota, e tenendo presente la teoria ivi svolta, è chiaro che la diminuzione Δf_p della freccia dell'arco, prodotta dalla pressione idrostatica, può riguardarsi come somma di quella

$$\Delta_0 f_p = -\frac{pr}{Eh} f \tag{1}$$

generata dall'accorciamento uniforme $\left(= \frac{pr}{Eh 1}\right.$ per unità di lunghezza$\left.\right)$ prodotto dalla pressione normale uniforme $\frac{pr}{1 . h}$ su cia-

scuna sezione trasversale dell'arco, e dell'altra $\Delta_1 f_p$ prodotta dalla reazione supplementare

$$H = -\frac{\frac{pr}{Eh}\, l}{\mathrm{J}_x},$$

che qui indicheremo con H_p.

Questo secondo spostamento può essere calcolato (fig. 1) considerando il semiarco AC come incastrato in A e cimentato al vertice dalla forza H_p che, com'è noto, passa pel baricentro elastico dell'arco. Secondo la teoria dell'ellisse di elasticità, indicando con $\mathcal{G}'$ il peso elastico del semiarco, con d la distanza del baricentro elastico G' del semiarco dall'asse y, con d_x la distanza, dall'asse x, dell'antipolo Y dell'asse y rispetto all'ellisse di elasticità del semiarco, lo spostamento $\Delta_1 f_p$ è dato dall'espressione

Fig. 1.

$$\Delta_1 f_p = H_p \,.\, \mathcal{G}' \,.\, d \,.\, d_x \tag{2}$$

nella quale (v. Nota precedente), indicando con ρ il raggio di inerzia della sezione trasversale dell'arco rispetto all'asse di flessione, è

$$H_p = -\frac{ph^2}{6r\left[\left(\frac{s}{l}+\frac{r-f}{r}\right)\left(1+\frac{\rho^2}{r^2}\right)-2\frac{l}{s}\right]} \tag{3}$$

e

$$\mathcal{G}' = \frac{1}{2}\,\frac{s}{EJ} = 6\,\frac{s}{Eh^3}\,. \tag{4}$$

Il baricentro elastico G' del semiarco, il quale evidentemente cade sull'asse x, orizzontale passante pel baricentro elastico G di tutto l'arco, coincide nel caso attuale, trattandosi

di un arco omogeneo di sezione costante, col centro di gravità del semiarco. Si ha cioè

$$OG' = r \frac{r \operatorname{sen} \frac{\varphi_0}{2}}{r \frac{\varphi_0}{2}} = r \frac{\operatorname{sen} \frac{\varphi_0}{2}}{\frac{\varphi_0}{2}}$$

e quindi

$$(5) \qquad GG' = d = OG' \operatorname{sen} \frac{\varphi_0}{2} = r \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{\varphi_0}{2}}{\frac{\varphi_0}{2}} .$$

Si ha poi

$$d_x = G'G'' - YY'',$$

ma

$$G'G'' = OG' \operatorname{sen}\left(90 - \frac{\varphi_0}{2}\right) = r \frac{\operatorname{sen} \frac{\varphi_0}{2} \cos \frac{\varphi_0}{2}}{\frac{\varphi_0}{2}} = r \frac{\operatorname{sen} \varphi_0}{\varphi_0}$$

$$YY'' = \frac{\int_0^{\varphi_0} ds \,.\, r \operatorname{sen} \varphi \left(r + \frac{\rho^2}{r}\right) \cos \varphi}{r \varphi_0 \,.\, r \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{\varphi_0}{r}}{\frac{\varphi_0}{2}}} = r \left(1 + \frac{\rho^2}{r^2}\right) \frac{\int_0^{\varphi_0} \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \, d\varphi}{2 \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi_0}{2}} =$$

$$= r \left(1 + \frac{\rho^2}{r^2}\right) \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi_0}{4 \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi_0}{2}}$$

e quindi

$$(6) \qquad d_x = r \frac{\operatorname{sen} \varphi_0}{\varphi_0} \left[1 - \left(1 + \frac{\rho^2}{r^2}\right) \frac{\operatorname{sen} \varphi_0}{2 (1 - \cos \varphi_0)} \varphi_0\right].$$

Ovvero, notando che

$$\varphi_0 = \frac{s}{2r}; \quad \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{\varphi_0}{2}}{\frac{\varphi_0}{2}} = \frac{2 \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi_0}{2}}{\varphi_0} = \frac{1 - \cos \varphi_0}{\varphi_0} = \frac{r (1 - \cos \varphi_0)}{r \varphi_0} = \frac{2f}{s}$$

$$\operatorname{sen} \varphi_0 = \frac{l}{2r}; \quad 1 - \cos \varphi_0 = \frac{r (1 - \cos \varphi_0)}{r} = \frac{f}{r},$$

si ha anche

$$(5)' \qquad d = \frac{2fr}{s}$$

$$(6)' \qquad d_x = \frac{rl}{s}\left[1 - \frac{ls}{8fr}\left(1 + \frac{\rho^2}{r^2}\right)\right].$$

Sostituendo le espressioni fornite dalle (3), (4), (5)' e (6)' nella (2) e sommando quest'ultima colla (1) si ha finalmente

$$(7) \qquad \Delta f_v = \Delta_0 f_v + \Delta_1 f_v = -\frac{p}{E}\,\frac{r}{h}\,\frac{\frac{s}{l} + \frac{r-f}{r} - \frac{l^2}{4rf}}{\frac{s}{l} + \frac{r-f}{r} - \frac{2l}{s\left(1+\frac{\rho^2}{r^2}\right)}}\,f.$$

2° **Spostamento del vertice prodotto da variazione di temperatura.** — Come si è già visto nella precedente Nota, la supposizione più generale che possa farsi circa la variazione di temperatura è quella di supporre una variazione con legge lineare attraverso lo spessore dell'arco, che sia di t_e gradi all'estradosso e di t_i gradi all'intradosso, e si è notato come essa equivalga ad una variazione uniforme di $\frac{t_e + t_i}{2} = t_0$ gradi, più una variazione lineare da $\frac{t_e - t_i}{2} = \frac{\Delta t}{2}$ gradi all'estradosso a $-\frac{t_e - t_i}{2} = -\frac{\Delta t}{2}$ all'intradosso, e però nulla in corrispondenza dello strato medio.

Riguardo alla variazione uniforme di t_0 gradi, si osservi che l'effetto da essa prodotto è affatto analogo a quello generato dalla pressione idrostatica, ed invero come per quest'ultima la causa della deformazione è l'accorciamento unitario $\frac{pr}{Eh}$, così per la detta variazione uniforme di temperatura la causa è la dilatazione unitaria espressa da $\pm\,\alpha t_0$; basta quindi nella (7) sostituire $\frac{pr}{Eh}$ con αt_0, con che si ha

$$(8) \qquad \Delta f_{t_0} = \alpha t_0\,\frac{\frac{s}{l} + \frac{r-f}{r} - \frac{l^2}{4rf}}{\frac{s}{l} + \frac{r-f}{r} - \frac{2l}{s\left(1+\frac{\rho^2}{r^2}\right)}}\,f,$$

ossia, in valore assoluto, è

$$(9) \qquad \Delta f_{t_0} = \Delta f_p \frac{E \alpha t_0 h}{p r}.$$

Per l'altra variazione di temperatura invece l'arco rimane invariato di forma, ed è quindi nullo lo spostamento del vertice. Ed infatti due sezioni trasversali qualunque dell'arco a distanza Δs fra loro, se l'arco fosse svincolato da un'imposta, ruoterebbero, come si è visto nella precedente Nota, per effetto della detta variazione di temperatura, dell'angolo

$$(10) \qquad d\Delta\varphi = \frac{\alpha \Delta t \,.\, \Delta s}{h}.$$

Ma per effetto della reazione d'imposta, che, come si è veduto, si riduce ad una coppia di momento $\mathfrak{M}$, ogni elemento dell'arco è cimentato dalla coppia stessa

$$\mathfrak{M} = \frac{E\alpha \,.\, \Delta t \,.\, h^2}{12}$$

e la rotazione delle due sezioni limitanti l'elemento Δs è, secondo la teoria della flessione,

$$d\Delta\varphi = \frac{\mathfrak{M}}{EJ} \Delta s = \frac{\dfrac{E\alpha \,.\, \Delta t \,.\, h^2}{12}}{E \dfrac{1}{12} h^3} \Delta s = \frac{\alpha \Delta t \,.\, \Delta s}{h}$$

coincidente colla (10); cioè la deformazione elastica prodotta dalla reazione annulla la deformazione termica. Adunque, una variazione di temperatura, secondo questa seconda legge, produce bensì sforzi interni che divengono massimi, in valore assoluto, all'estradosso ed all'intradosso, e che ivi possono raggiungere valori molto elevati; ma non sono avvertiti da deformazioni dell'arco, precisamente come un tirante metallico rettilineo vincolato rigidamente alle estremità, in modo da non potersi accorciare in seguito ad abbassamento di t gradi di temperatura subisce uno sforzo unitario di trazione $\sigma_t = E\alpha t$ senza che apparisca alcuna deformazione.

Esempio numerico. — Facciamo di quanto si è detto un'applicazione alla diga di *Barossa* (Australia) di cui la fig. 2 rappresenta la sezione trasversale. La costruzione, eseguita in beton di cemento con interposizione di blocchi di pietra, fu terminata nel 1904; è una diga a profilo triangolare con paramento verticale a monte, ed inclinato di 1 di base per 2,69 di altezza a valle. Soltanto in sommità il profilo è corretto da un lieve ingrossamento, ed ivi il muro è rinforzato da due file di rotaie. Gli spessori notevolmente ridotti di questa diga (m. 1,37 in corona e m. 9,55 in corrispondenza del fondo del lago, per una ritenuta massima di m. 25,70) sono legittimati dal suo modo di resistere come volta, poichè la direttrice del paramento a monte è un arco circolare di m. 60,95 di raggio, la cui ampiezza al coronamento raggiunge 135° 20′.

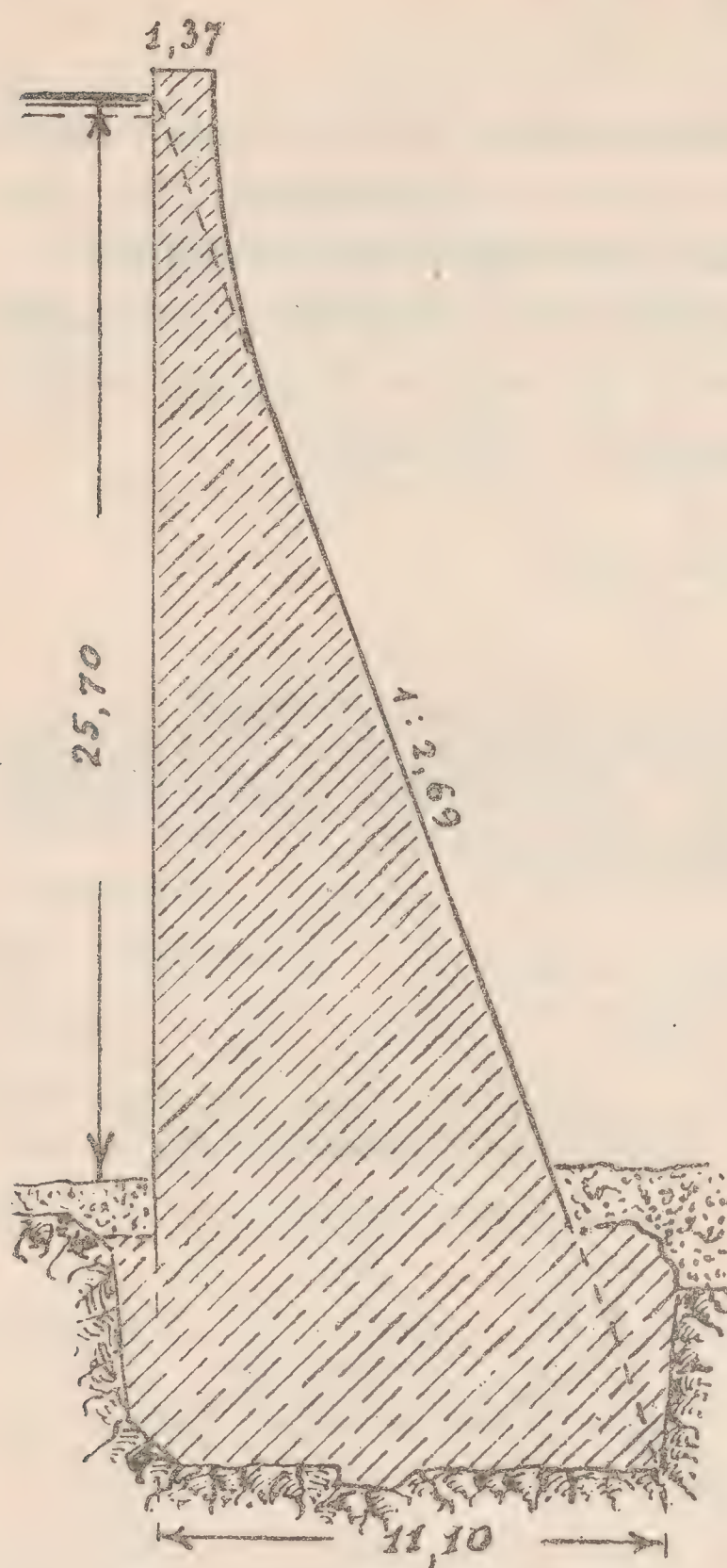



Fig. 2.

Consideriamo un anello alto l'unità, alla profondità media di m. 13,45 sotto la massima ritenuta; ivi lo spessore della diga è di $\frac{13,45}{2,69} = $ m. 5, di guisa che l'asse geometrico dell'anello è un arco circolare di raggio $r = 60,95 - 2,50 = $ m. 58,45 e di un'ampiezza $2\varphi_0$ che, in mancanza di dati precisi, riterremo di 120°, per modo che

$$\frac{s}{l} = 1,209151\,, \qquad \frac{l}{s} = 0,827027\,; \qquad \frac{f}{r} = \frac{r-f}{r} = 0,5\,;$$

$$\frac{l}{r}=1{,}732051; \quad \frac{l}{f}=2\frac{l}{r}; \quad \frac{s-l}{s}=0{,}172973;$$

$$\frac{l^2}{4fr}=1{,}5; \quad \frac{h}{r}=\frac{5}{58{,}45}=\frac{1}{11{,}69}=0{,}085543;$$

$$\frac{\rho^2}{r^2}=\frac{1}{12}\left(\frac{h}{r}\right)^2=\frac{1}{12}\left(\frac{1}{11{,}69}\right)^2=0{,}000610;$$

$$\frac{l^2}{4fr}\left(1+\frac{\rho^2}{r^2}\right)=1{,}500915; \quad p=1{,}345\ {}^{\mathrm{Kg}}/_{\mathrm{cm}^2}.$$

Supponendo che da una precedente temperatura media uniforme di 15°, la temperatura nel paramento a monte discenda a 10° e quella del paramento a valle salga a 30°, con variazione lineare fra le due attraverso lo spessore dell'anello, si avrà

$$t_e=-5; \quad t_i=+15; \quad t_0=\frac{15-5}{2}=5;$$

$$\Delta t=-5-15=-20.$$

Benchè non sia lo scopo di questa Nota, crediamo interessante di calcolare qui, di passaggio, gli sforzi interni unitarî massimi che produconsi in tali condizioni.

Ponendo per brevità [1]

$$\mu=\frac{\frac{s-l}{s}-\frac{h}{6r}}{\left(\frac{s}{l}+\frac{r-f}{r}\right)\left(1+\frac{\rho^2}{r^2}\right)-2\frac{l}{s}},$$

$$\mu_1=\frac{\frac{s-l}{s}+\frac{h}{6r}}{\left(\frac{s}{l}+\frac{r-f}{r}\right)\left(1+\frac{\rho^2}{r^2}\right)-2\frac{l}{s}},$$

---

[1] Le espressioni dei coefficienti numerici μ differiscono da quelle date nella precedente Nota, per essere più rigorose, non essendosi trascurato il rapporto $\frac{\rho^2}{r^2}$ rispetto all'unità, ed essendosi presi della H i momenti rispetto ai punti di nocciolo delle rispettive sezioni, anzichè rispetto ai baricentri, due correzioni, che per rapporti $\frac{h}{r}$ non piccolissimi possono avere qualche, benchè lieve, influenza sul risultato.

$$\mu' = \frac{\frac{l}{s} - \frac{r-f}{r}\left(1 - \frac{h}{6r}\right)}{\left(\frac{s}{l} + \frac{r-f}{r}\right)\left(1 + \frac{\rho^2}{r^2}\right) - 2\frac{l}{s}},$$

$$\mu'_1 = \frac{\frac{l}{s} - \frac{r-f}{r}\left(1 + \frac{h}{6r}\right)}{\left(\frac{s}{l} + \frac{r-f}{r}\right)\left(1 + \frac{\rho^2}{r^2}\right) - 2\frac{l}{s}},$$

le formole che esprimono gli sforzi unitarî all'estradosso ed all'intradosso della sezione al vertice e delle sezioni alle imposte sono le seguenti, nelle quali col segno — s'indicano gli sforzi di compressione, col segno + quelli di tensione

$$(11)\begin{cases} \text{al vertice} \ . \begin{cases} \sigma_e = -p\left(\frac{r}{h} + \mu\right) + E\alpha\left(t_0\frac{h}{r}\mu - \frac{\Delta t}{2}\right), \\ \sigma_i = -p\left(\frac{r}{h} - \mu_1\right) - E\alpha\left(t_0\frac{h}{r}\mu_1 - \frac{\Delta t}{2}\right), \end{cases} \\ \text{alle imposte} \begin{cases} \sigma_e = -p\left(\frac{r}{h} - \mu'\right) - E\alpha\left(t_0\frac{h}{r}\mu' + \frac{\Delta t}{2}\right), \\ \sigma_i = -p\left(\frac{r}{h} + \mu'_1\right) + E\alpha\left(t_0\frac{h}{r}\mu'_1 + \frac{\Delta t}{2}\right). \end{cases} \end{cases}$$

Ora, con i valori numerici sopra indicati, risultano

$$\mu = 2{,}827\,; \quad \mu_1 = 3{,}335\,; \quad \mu' = 5{,}952\,; \quad \mu'_1 = 5{,}698$$

e quindi, ritenendo $E = 150000\ ^{\mathrm{Kg}}/_{\mathrm{cm}^2}$, $\alpha = 0{,}000009$, le (11) forniscono:

al vertice

$$\sigma_e = -1{,}345\,(11{,}69 + 2{,}827) + 1{,}35\,(1{,}209 + 10) =$$
$$= -19{,}53 + 15{,}13 = -\ 4{,}4\ ^{\mathrm{Kg}}/_{\mathrm{cm}^2},$$

$$\sigma_i = -1{,}345\,(11{,}69 - 3{,}335) - 1{,}35\,(1{,}426 + 10) =$$
$$= -11{,}24 - 15{,}43 = -26{,}7 \quad " \ ,$$

alle imposte

$$\sigma_e = -1{,}345\,(11{,}69 - 5{,}952) - 1{,}35\,(2{,}546 - 10) =$$
$$= -\ 7{,}72 + 10{,}06 = +\ 2{,}3 \quad " \ ,$$

$$\sigma_i = -1{,}345\,(11{,}69 + 5{,}698) + 1{,}35\,(2{,}437 - 10) =$$
$$= -23{,}39 - 10{,}21 = -33{,}6 \quad " \ .$$

Anche da questo esempio emerge quanto grande possa riuscire l'alterazione nel regime degli sforzi interni di queste costruzioni per causa di una variazione di temperatura, sia pure non eccessiva, e come facilmente ne possano derivare sforzi di tensione nel paramento a monte.

Passando ora alle deformazioni, e ricordando che indichiamo col segno $+$ gli spostamenti del vertice che corrispondono ad un aumento della freccia, col segno $-$ quelli che ne rappresentano una diminuzione, si ha dalla (7), con i valori numerici sopra indicati,

$$\Delta f_p = - \text{m. } 0{,}0114$$

ed in virtù di tale valore, ed osservando che $\frac{E\alpha t_0 h}{pr} = 0{,}426$, si ha per la (9)

$$\Delta f_{t_0} = 0{,}426 \times 0{,}0114 = \text{m. } 0{,}0049.$$

Vogliamo ancora calcolare lo spostamento del vertice al coronamento del muro, prodotto da una variazione uniforme di temperatura. Ivi si ha

$$\begin{aligned}
2\varphi_0 &= 135^\circ\, 20', \qquad r = 60{,}95 - 0{,}70 = \text{m. } 60{,}25,\\
s &= r\, 2\varphi_0 = 60{,}25 \times 2{,}362012 = \text{,, } 142{,}311,\\
l &= 2r \operatorname{sen} \varphi_0 = 120{,}50 \times 0{,}92499 = \text{,, } 111{,}461,\\
f &= r\,(1 - \cos\varphi_0) = 60{,}25 \times 0{,}62001 = \text{,, } 37{,}356,
\end{aligned}$$

$$\frac{\rho^2}{r^2} = \frac{1}{12}\,\frac{1{,}4^2}{60{,}25^2} = 0{,}000045,$$

e quindi

$$\frac{s}{l} = 1{,}276787, \qquad \frac{r-f}{r} = 0{,}379983,$$

$$\frac{l^2}{4rf} = 1{,}379966, \qquad \frac{2l}{s\left(1 + \frac{\rho^2}{r^2}\right)} = 1{,}562773,$$

e però la (8) fornisce

$$\Delta f_{t_0} = 110{,}007\, \alpha t_0 .$$

Supponendo $\alpha = 0,00001$, perchè nella regione superiore del muro mancano i blocchi in pietra, e, come si è detto, il muro è armato da rotaie, e per una variazione uniforme t_0 di 20° nell'interno della muratura, che non è da escludersi, si avrebbe la rilevante deformazione

$$\Delta f_{t_0} = 110,007 \times 0,00001 \times 20 = \text{m. } 0,022,$$

la quale va abbastanza d'accordo con quella ricavata da rilievo fatto sulla costruzione eseguita, dopo la sua entrata in servizio [1].

Torino, novembre 1917.

---

[1] Cfr. *Le Génie Civil*, 13 Août 1904.

Sulla identità della spangite con la phillipsite.

Nota di F. ZAMBONINI.

(Con 1 Tavola).

Nel 1872 P. MANTOVANI (1) pubblicava una breve Nota, dedicata alla descrizione di una nuova zeolite, da lui rinvenuta sulle pareti delle fenditure della leucitite di Capo di Bove, presso Roma.

Per il nuovo minerale, il MANTOVANI proponeva il nome di *spangite,* in onore del signor NORMAN SPANG, di Pittsburg, possessore di una famosa collezione di minerali.

La descrizione del MANTOVANI era molto sommaria: un'analisi, eseguita dal POSTEMPSKI, avrebbe dato i risultati seguenti:

SiO_2	49.00
Al_2O_3	19.50
CaO	4.85
MgO	3.70
K_2O	6.33
H_2O	16.75
	100.13

Questa analisi si avvicina abbastanza alla composizione chimica di alcune phillipsiti tipiche, quali, per esempio, quelle di Nidda, di Annerod, del Limburg, ecc., dalle quali si distinguerebbe soltanto per la parziale sostituzione del magnesio al calcio. Per questo motivo, DANA (2) e HINTZE (3) hanno posto la

(1) Pubblicazione separata, datata da Roma, 10 aprile 1872.
(2) *System of Mineralogy*, 6th ed., 1892, pag. 581.
(3) *Handbuch der Mineralogie*, II, pag. 1808.

spangite in relazione con la phillipsite, ed altrettanto ho fatto io stesso ([1]) molti anni fa: notai, anzi, che, qualora l'analisi del Postempski fosse stata esatta, si sarebbe avuto a che fare, per quel che riguarda la composizione, con una phillipsite comune, presentante un tenore in MgO appena più considerevole di quello constatato dal Gorceix ([2]) nella varietà di Minas Geraes. Non mancai, però, dall'osservare che l'analisi del Postempski era del tutto dubbia. Finora, infatti, nelle vere e proprie zeoliti, il magnesio non si è mai riscontrato che in quantità piccolissime, e spesso, anzi, completamente assente, non solo, ma quando si era creduto, come aveva fatto il Bechi, di aver trovato nel picroanalcime e nella savite, delle varietà magnesifere di analcime e di natrolite, le nuove analisi del Bamberger e del Mattirolo mostrarono che il magnesio in realtà non era presente. Nel caso speciale, poi, delle zeoliti che tappezzano le fenditure delle leucititi romane, si ha che nè v. Kobell, nè Marignac, nè io abbiamo mai rinvenuto il magnesio altro che tutt'al più in traccie minime, non determinabili con esattezza, qualora l'analisi sia eseguita sulle quantità solite di sostanza.

Ad ogni modo, è certo che sulla vera natura della spangite non si sa nulla di preciso: anche il ravvicinamento ad una specie nota è reso malsicuro, sia dalla descrizione troppo incompleta del Mantovani, sia dalle incertezze che regnano intorno all'analisi del Postempski, sia, infine, per il fatto che i campioni, etichettati in alcuni Musei come spangite, vanno riferiti, come ebbe a dirmi il compianto prof. Strüver anni sono, non alla phillipsite, ma, bensì, alla cabasite.

Per risolvere con certezza la questione era necessario poter esaminare uno almeno dei campioni originali del Mantovani, sui quali era stata fondata la specie, ma ciò non mi è stato reso possibile che solo di recente, grazie alla cordiale amicizia del colonn. W. A. Roebling. Come egli mi ha cortesemente scritto, negli Stati Uniti d'America si trovano *due* soli esem-

---

([1]) *Kurzer Beitrag zur chemischen Kenntniss einiger Zeolithe der Umgegend Roms.* " Neues Jahrb. für Min. Geol. u. s. w. ", 1902, II, 64.

([2]) *Note sur une zéolite d'une roche pyroxénique du bassin de l'Abaété (Minas Géraës, Brésil).* " Bull. Soc. minér. de France ", 1884, VII, 32.

plari *originali* di spangite: uno nella collezione del sig. Spang, l'altro in quella del colonn. Roebling. L'uno e l'altro provengono dalle cave situate presso il monumento di Cecilia Metella, sulla via Appia Antica, chiamato comunemente Capo di Bove.

Nel campione del colonn. Roebling i cristallini di spangite sono molto minuti, mentre si presentano più grandi in quello del sig. Spang; ma, del resto, i due campioni sono identici. Dati i pericoli ai quali è soggetta la navigazione, il colonnello Roebling non mi ha potuto spedire il suo campione, ma, invece, un frammentino da esso distaccato ed alcune fotografie; l'uno e le altre giunsero fortunatamente nelle mie mani.

L'esame del frammentino inviatomi dal colonn. Roebling mi ha permesso di stabilire facilmente che la spangite è da riferirsi con certezza alla phillipsite, e che i suoi cristalli, per la loro forma, sono perfettamente identici a quelli di Capo di Bove e delle altre leucititi romane, che sono stati ampiamente descritti da varî autori e da me stesso [1].

I cristalli di spangite sono, nel campione originale posseduto dal colonn. Roebling e nel frammentino mandatomi, assai piccoli, poichè i più grandi non superano i mm. 0,7 nella direzione dell'asse a, secondo il quale sono allungati: frequenti sono quelli che raggiungono una lunghezza di appena mm. 0,05. I più comuni misurano mm. 0,2 circa nella direzione di a.

La maggior parte dei cristallini di spangite ha l'aspetto di prismi tetragonali, molto allungati secondo l'asse verticale, terminati da una bipiramide di ordine inverso rispetto al prisma. È questo, come è noto, l'aspetto più comune della phillipsite romana, descritto e figurato già da Credner [2] per Capo di Bove, ma che io ho osservato anche diffusissimo a Vallerano, Casal Brunori e Mostacciano. Nella maggioranza dei casi mancano completamente gli angoli rientranti. Si tratta, come al solito, di tetrageminati, costituiti da due geminati a penetrazione secondo (001), uniti in geminazione in base alla legge: piano di

---

[1] Nel mio lavoro ricordato si trova riunita la bibliografia sulle proprietà cristallografiche della phillipsite delle leucititi dei dintorni di Roma.

[2] *Ueber die Krystallformen des Gismondins.* " Neues Jahrb. für Min. Geol. u. s. w. „, 1847, 559.

geminazione una faccia di }011{. Come è noto, nei tetrageminati in questione le faccie del pseudoprisma tetragonale possono essere o le faccie di }001{ (2° tipo di Streng), ovvero quelle di }010{ (1° tipo di Streng). Lacroix [1] ha proposto di chiamare i geminati con le faccie di }001{ all'esterno *geminati di Périer* [2], quelli, invece, con le faccie di }010{ esterne *geminati di Marburgo*. Nel mio lavoro più volte ricordato, io ho osservato che i tetrageminati di phillipsite delle leucititi romane appartengono spesso al tipo di Périer; hanno, cioè, il pseudoprisma tetragonale costituito da faccie di }001{: sovente si osserva, però, anche il tipo di Marburgo. Nei tetrageminati di spangite si ha, appunto, predominante, almeno per quanto ho potuto verificare nei pochi cristallini esaminati, il tipo di Périer. D'accordo con questa conclusione sta la striatura sulle faccie terminali, formate sempre soltanto dal prisma m }110{, le quali presentano costantemente nettissima la sutura di geminazione, ora molto regolare, ora meno, e le loro strie sono perpendicolari allo spigolo di intersezione della faccia m con le faccie esterne.

Per porre fuori di dubbio l'appartenenza dei cristalli studiati al tipo di Périer, ho ricorso, come consiglia Lacroix, alle sezioni normali all'asse a. Tali sezioni, essendo perpendicolari a }010{, contengono l'asse n_p, il quale è quasi normale alle faccie esterne nei tetrageminati del tipo di Marburgo, parallelo, invece, in quelli del tipo di Périer. In quest'ultimo caso la diagonale dei settori triangolari, nei quali appare divisa la sezione, è di segno *positivo*.

I tetrageminati di spangite sono ora molto allungati, ora, invece, piuttosto tozzi. Nella fig. 1 ho rappresentato uno dei tipi più comuni: come si vede, analogamente a quanto accade

---

(1) *Minéralogie de la France et de ses Colonies*. 1896, II, 298 e seg.

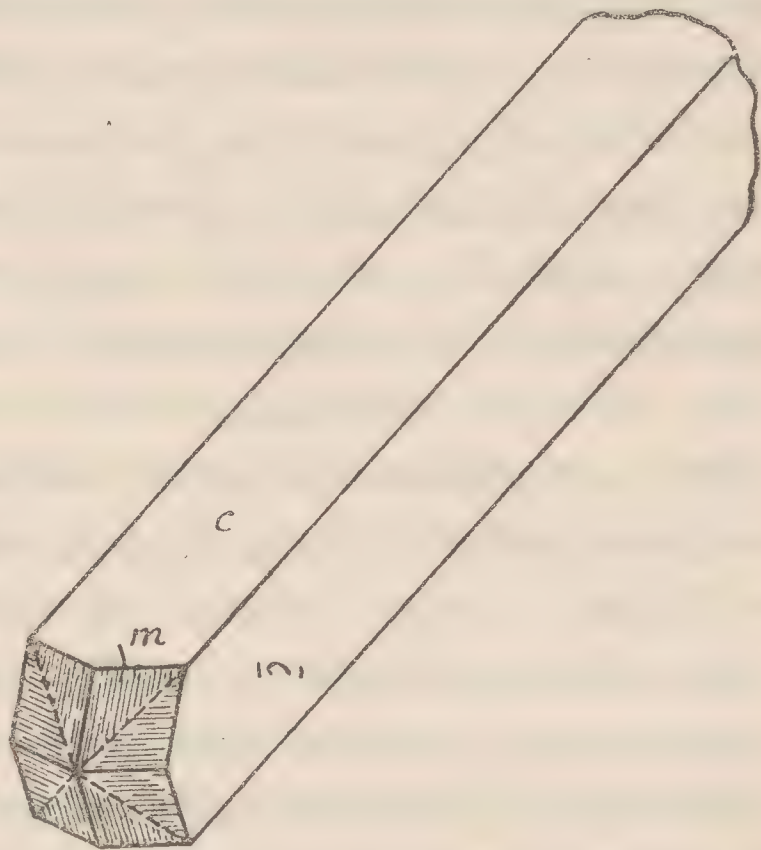
(2) Nel vol. II, fasc. 2°, del suo *Manuel de Minéralogie* (1893, pag. LVII) Des Cloizeaux li ha indicati come geminati di Richmond. A stretto rigore, la denominazione di Des Cloizeaux avrebbe meritato di essere preferita, non solo come più antica, ma anche perchè si riferisce ad un giacimento veramente classico: tuttavia ho seguìto la nomenclatura di Lacroix, perchè questo insigne mineralista per il primo ha proposto dei metodi semplici ed efficaci di diagnosi ottica per i due tipi di geminati.

nella phillipsite tipica di Vallerano, di Casal Brunori, ecc., si tratta di cristalli molto più allungati di quanto si verifichi nelle figure riportate nei trattati. Uno dei tetrageminati più aghiformi misurava mm. 0,21 di lunghezza per 0,02 soltanto di larghezza: in uno dei più tozzi, poco frequenti, la lunghezza raggiungeva i mm. 0,23 e la larghezza i mm. 0,11.

Tra i tetrageminati di piccole dimensioni sono abbastanza comuni quelli più o meno schiacciati secondo una coppia di faccie opposte di *c* }001{.

Le faccie del pseudoprisma tetragonale non presentano striature o, tutt'al più, qualche rara ed interrotta stria quasi normale alla direzione di allungamento. Non sono, però, mai piane, e nella maggior parte dei casi si presentano, anzi, nettamente concave.

Se si esamina al microscopio un tetrageminato intiero, appoggiato su una faccia di *c*, si osserva, in luce polarizzata parallela, tra i nicol incrociati, una zona centrale, diretta nel senso dell'allungamento, in generale molto esile, la quale sovente si va allargando verso le estremità del cristallo.

Questa zona ho potuto notare anche in alcuni tetrageminati di Richmond e di Nidda, nei quali pure le faccie del pseudoprisma tetragonale sono formate da }001{. I cristallini più esili presentano, nella maggior parte dei casi almeno, estinzione uniforme parallelamente e perpendicolarmente alla direzione di allungamento: la spangite si comporta, perciò, come rigorosamente monoclina. Come è noto, LANGEMANN (1), nelle sezioni parallele a (001) di alcuni tetrageminati di phillipsite di varie località, ha osservato che una direzione di massima estinzione forma, con l'asse *a*, un angolo di circa 2°: in base a questo

(1) *Beiträge zur Kenntniss der Mineralien: Harmotom, Phillipsit und Desmin.* " Neues Jahrb. für Min. Geol. u. s. w. ", 1886, II, 83.

fatto e ad altri analoghi, come pure ad alcune anomalie nella divisione in settori, il Langemann ritenne phillipsite, armotomo e desmina come triclini. Lacroix [1] ha osservato su (001) angoli di estinzione che spesso superano i 10°, sempre rispetto allo spigolo [(001) : (010)] ed altre divergenze del genere dalla simmetria monoclina, sicchè anch'egli ha concluso col considerare triclini i minerali in questione. In generale, le divergenze da quanto richiede la simmetria monoclina vengono considerate come anomalie, ed a me sembra che quanto si osserva nella spangite, e, in complesso, nei cristalli di phillipsite delle leucititi romane, appoggi questo modo di vedere. Infatti, si è visto come i cristallini più esili, meno complessi, si comportano esattamente come monoclini; i cristalli più grandi e tozzi, invece, presentano spesso estinzione ondulosa, incompleta ed una struttura più complicata di quella che risulterebbe dalla teoria: in tali cristalli le estinzioni non vanno più rigorosamente d'accordo con la simmetria monoclina. Senza avere nessuna pretesa di voler generalizzare delle osservazioni tanto poco numerose, mi sembra, però, assai probabile che, nelle anomalie riscontrate da alcuni studiosi, abbiano gran parte le irregolarità di struttura, gli incroci di lamine di orientazione diversa, ecc.: un esempio istruttivo è dato, appunto, da quella lamina normale all'asse *a*, tagliata in un geminato di Marburgo del Monte Simiouse, descritta e figurata dal Lacroix, nella quale le direzioni di estinzione si allontanano notevolmente dalla posizione che loro spetterebbe nell'ipotesi monoclina, ma è anche evidente la struttura complicatissima del cristallo, nel quale si hanno perfino delle parti uniassiche.

Nella spangite sono diffusi anche i gruppi, già descritti da Credner per la phillipsite di Capo di Bove e da me per lo stesso minerale di altre leucititi romane, formati da due dei tetrageminati descritti, riuniti a croce, secondo una faccia di *m* }110{. Anche questi gruppi presentano il solito aspetto di quelli di phillipsite tipica, riconosciuta per tale da me in base alle analisi chimiche quantitative che ho pubblicato. Più rari, invece, sono i gruppi formati da tre tetrageminati che hanno

---

(1) Op. cit., pag. 300.

le loro direzioni di allungamento sensibilmente ortogonali, come si verifica nella fig. 181, tav. XXXI del *Manuel de Minéralogie* di A. DES CLOIZEAUX.

Accade abbastanza sovente che un certo numero di tetrageminati si accollino l'uno all'altro, formando dei fascetti di cristallini a covone, leggermente divergenti.

Come si verifica anche per la phillipsite ordinaria delle leucititi romane, i cristallini di spangite non sono adatti per misure esatte: tuttavia, le poche prese, che stimo inutile riportare qui, concordano con i valori teorici dati nei trattati per la phillipsite.

Anche per quel che riguarda il comportamento chimico, si ha perfetta identità tra la spangite e la phillipsite dei dintorni di Roma.

Con le osservazioni riferite, si è posta fuori di dubbio l'appartenenza della spangite alla phillipsite. Resta, però, ancora da stabilire se il minerale descritto dal MANTOVANI è davvero magnesifero, come risulterebbe dall'analisi del POSTEMPSKI. Data la quantità piccolissima di sostanza disponibile, non ho potuto eseguire nessun saggio quantitativo. Ho, però, potuto constatare, microchimicamente, che il magnesio, nei cristalli puri di spangite, manca del tutto. Questa constatazione dimostra che i miei dubbî sulla esattezza dell'analisi di POSTEMPSKI erano fondati. Così pure, io ritengo che non sia esatto l'elevato contenuto in silicio indicato da quell'analista. Come risulta dalle analisi di v. KOBELL, di MARIGNAC e dalle mie, numerose ed eseguite su materiale determinato cristallograficamente, la phillipsite delle leucititi non soltanto di Capo di Bove, ma anche di altre località dei dintorni di Roma, costituisce i termini più poveri in silicio della serie phillipsite, sicchè la probabilità di rinvenire nelle leucititi romane anche termini più ricchi in silicio, prossimi a quelli frequenti altrove, appare piccola, specialmente se si pensa che anche la facolite delle leucititi romane contiene meno silice di quella delle altre località. Può, a questo proposito, ricordarsi, che dei saggi microchimici da me eseguiti di confronto sulla spangite e sulla phillipsite tipica di Capo di Bove, non hanno permesso di notare alcuna differenza apprezzabile nella quantità dei cristallini dei varî composti formatisi

nei due casi, operando, s'intende bene, nelle medesime condizioni, con le stesse quantità di reattivi, ecc. (1).

Riassumendo, mi sembra di poter decisamente affermare che la spangite è del tutto identica alla phillipsite delle leucititi romane, sicchè il nome proposto dal MANTOVANI non può conservarsi nemmeno per indicare una varietà ben definita.

Nel campioncino che io ho esaminato, la spangite è accompagnata da numerosi, piccoli cristallini di augite, da alcuni di calcite, da pochissimi di pseudonefelite e da poca melilite gialla.

Nella Tavola unita al presente lavoro, io ho riportato due fotografie, inviatemi dal Col. ROEBLING, le quali mostrano assai bene i geminati a croce della spangite.

L'interesse di queste fotografie è anche un altro. Siccome io non ho esaminato che un piccolo frammentino del campione originale di spangite posseduto dal Col. ROEBLING, potrebbe sorgere il dubbio che nel rimanente del campione si trovasse un minerale differente, costituente la vera spangite. Le fotografie, eseguite in parti diverse, ci dimostrano che il campione del Col. ROEBLING è in tutti i suoi punti identico, e che una sola è la zeolite in esso presente: quella che io ho potuto dimostrare identica alla phillipsite.

Mi è grato, nel terminare questi brevi cenni, il ringraziare ancora vivamente il Col. ROEBLING per avermi permesso, con la sua cortesia, di riconoscere la vera natura di un minerale del mio paese natio, completando così, per una parte almeno, un lavoro che risale agli anni, pur troppo ormai lontani, della mia giovinezza.

Torino, Istituto di Mineralogia della R. Università.

---

(1) La spangite non contiene che traccie minime di sodio, precisamente come accade nella phillipsite tipica delle leucititi romane.

Un singolare esempio di lesioni in un anello di acciaio temprato.

Nota del Dr. Ing. GUSTAVO COLONNETTI.

(Con 1 Tavola).

Il caso, su cui sto qui per richiamare l'attenzione del lettore, si è verificato durante la tempra di una serie di anelli di acciaio destinati ad essere adoperati come calibri in una piccola officina meccanica che è attualmente adibita alla fabbricazione di proiettili di piccolo calibro.

Ragioni di mal intesa economia avevano indotta la direzione di quell'officina ad utilizzare per la preparazione dei calibri dei pezzi di acciaio di svariate provenienze, residui o scarti di altre lavorazioni (1). Temprati nell'acqua fredda senza riguardi, quasi tutti quei calibri dovettero venir scartati perchè presentanti lesioni di maggiore o minore importanza.

Uno di essi, un anello a sezione meridiana rettangolare, attirò in quell'occasione la mia attenzione per un certo numero di piccole fessure identiche ed accoppiate con una certa simmetria alternativamente sull'uno e sull'altro dei due spigoli esterni: esse presentavano un andamento normale a detti spigoli e divenivano impercettibili a pochi millimetri di distanza da essi.

---

(1) Il pezzo di cui qui ci occupiamo era di un acciaio comune per proiettili e presentava la seguente composizione chimica:

C = 0,630 %
Mn = 1,269 %
Si = 0,140 %
Ph = 0,070 %
S = 0,048 %.

Un bagno in una soluzione di acido solforico a 60° C. bastò però a mettere in evidenza le lesioni in tutto il loro sviluppo. E si vide allora che quelle fessure si mantenevano normali agli spigoli solo fino verso le mezzerie delle faccie dell'anello, poi piegavano quasi ad angolo retto, e, seguendo più o meno da vicino i circoli mediani, si collegavano l'una coll'altra in catena costituendo tutte insieme un'unica linea continua e chiusa (che si vede in parte nella prima fotografia e completamente, per quanto in modo schematico, nella seconda in cui con adatto artificio si è a bella posta creata una specie di trasparenza, grazie alla quale tutte indistintamente le faccie dell'anello sono rese in vista). La superficie cilindrica interna si rivelò perfettamente sana.

Sembra pertanto possibile ricostruire la genesi del fenomeno ammettendo che, durante l'immersione nel bagno di tempra, questa superficie interna sia stata la prima a raffreddarsi e che quindi il materiale ad essa attiguo abbia per primo riacquistata una certa consistenza (o durezza, che dir si voglia) ed abbia così potuto opporre una notevole resistenza al successivo ritiro degli strati cilindrici esterni. Questi sarebbero allora stati assoggettati a tensioni circonferenziali eccessive, la resistenza del metallo sarebbe stata vinta e si sarebbero determinate quelle lesioni, simmetricamente disposte sugli spigoli esterni, di cui si è parlato da principio.

Il resto viene da sè. Turbata infatti la primitiva evidente simmetria delle tensioni interne, devono immediatamente aver avuto origine degli sforzi tangenziali, la cui distribuzione, qualitativamente assai facile ad intuirsi, giustifica completamente il successivo propagarsi e collegarsi delle primitive lesioni.

Che questo tentativo di ricostruzione del fenomeno sia in tutto corrispondente alla realtà delle cose, io non pretendo affatto di affermare. L'ho accennato così come si accenna ad una spiegazione plausibile. Ma ciò che mi premeva non era tanto di spiegare il fatto, quanto di descriverlo.

Fatti di questo genere accadono invero non raramente nella pratica, ma vengono dai più considerati come semplici curiosità prive di ogni valore scientifico. Non è sempre così: in mancanza di un metodo sperimentale per la diretta determinazione delle tensioni di tempra, certi casi di frattura debbono essere

considerati con attenzione, perchè alla incerta nostra conoscenza del delicato argomento possono indirettamente portar qualche contributo (1). È anzi da augurarsi che tutti coloro a cui siffatti casi tipici si presentano, si curino di documentarli; non ne andrebbe perduto l'eventuale contenuto istruttivo.

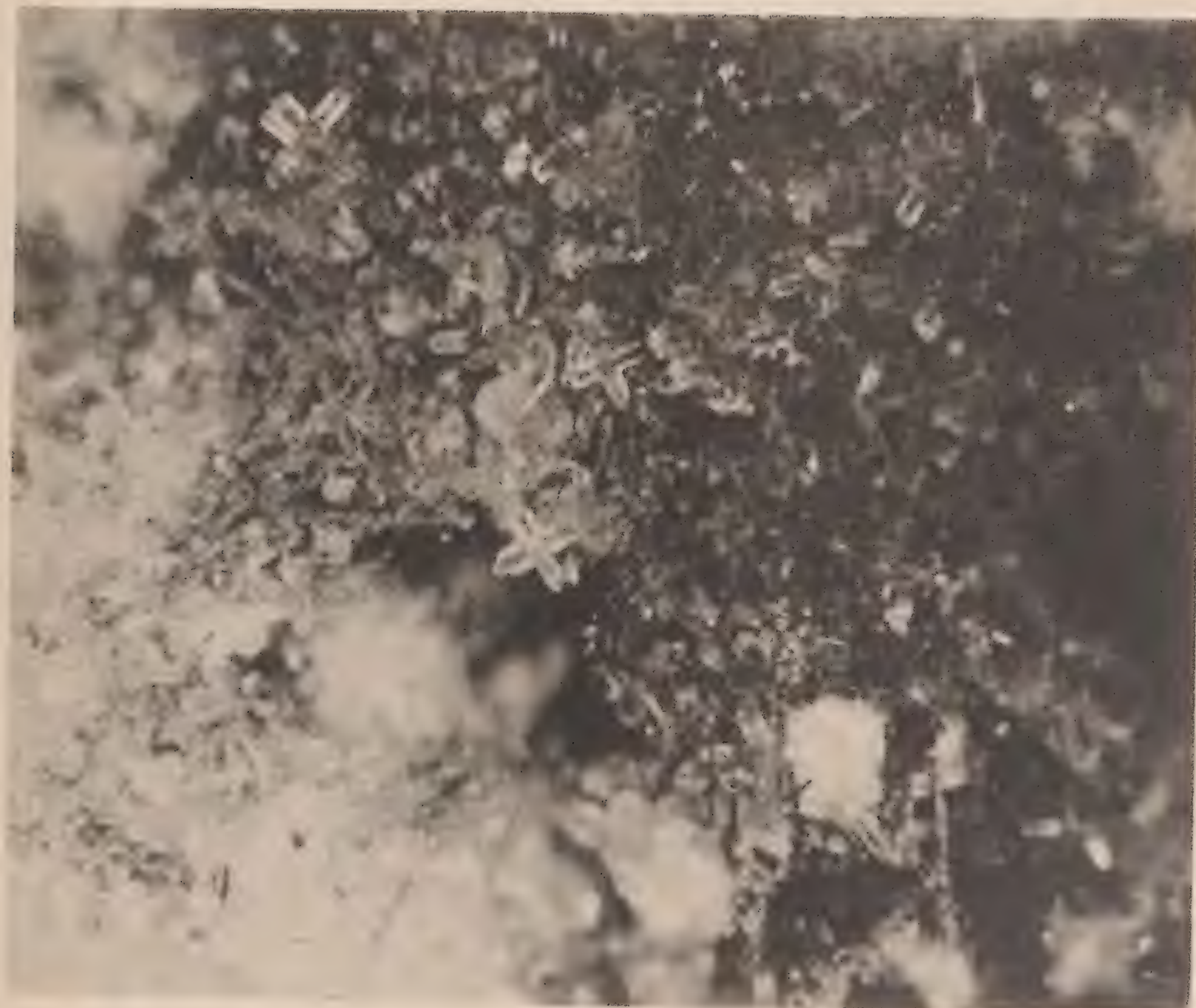
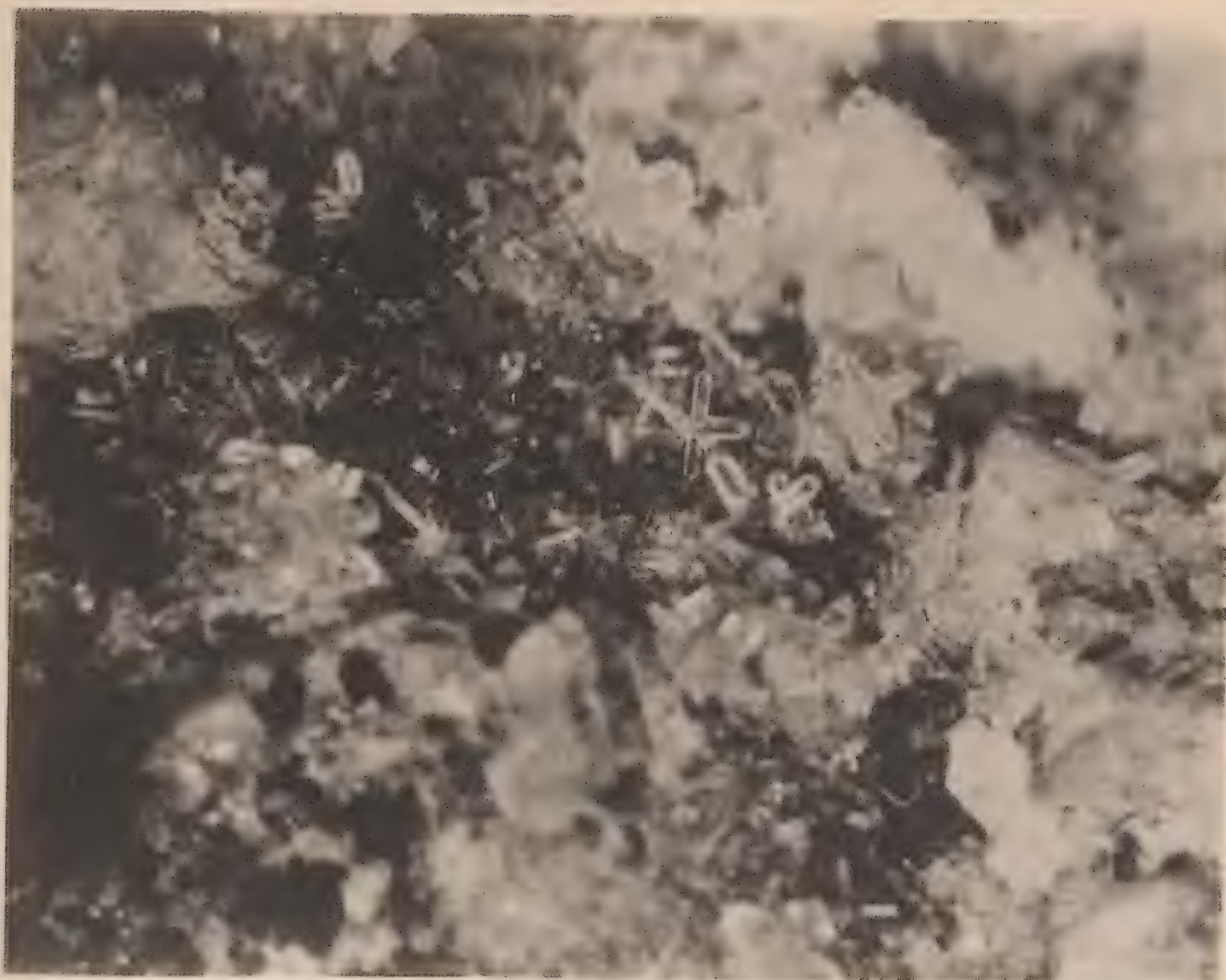
---

(1) Cfr. a questo proposito le mie note:

Sopra un caso di frattura spontanea di un acciaio temprato. " Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino ", vol. LII, 1916-17.

Su certi stati di coazione elastica che non dipendono da azioni esterne. " Rendiconti della R. Accad. dei Lincei ", serie 5ª, vol. XXVI, 2° sem. 1917.

L'Accademico Segretario
CARLO FABRIZIO PARONA

Off. Fototecnica Ing. Molfese - Torino.

G. COLONNETTI, Un singolare esempio di lesioni in un anello di acciaio temprato.

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona. Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di **C. Frati, A. Baudi di Vesme** e **C. Cipolla.**

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in-f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di **C. Cipolla, G. De Sanctis** e **P. Fedele.**

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in-4°, di 70 pagg. e 96 tav.

SOMMARIO

Presidenti della Reale Accademia delle Scienze di Torino dalla sua fondazione . . . . Pag. III
Elenco degli Accademici residenti, Nazionali non residenti, Stranieri e Corrispondenti al 31 Dicembre 1917 . . . . . „ V
Pubblicazioni periodiche ricevute dall'Accademia dal 1° Gennaio al 31 Dicembre 1917 . . . . „ XXXI
Pubblicazioni ricevute dall' Accademia dal 16 Giugno 1917 al 23 Giugno 1918 . . . . „ XLIV

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza del 18 Novembre 1917 . . Pag. 1
Rosati (Carlo). — Sulle valenze delle corrispondenze algebriche fra i punti di una curva algebrica . . . . „ 5
Pensa (Angelo). — Su alcune omografie speciali e sugli operatori omografici C, R . . . . „ 23
Guidi (Camillo). — Sulle deformazioni delle dighe a volta . „ 37
Zambonini (F.). — Sulla identità della spangite con la phillipsite (con 1 tavola) . . . . „ 47
Colonnetti (Gustavo). — Un singolare esempio di lesioni in un anello di acciaio temprato (con 1 tavola) . . . . . . „ 55

Tip. Vincenzo Bona — Torino

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. LIII, Disp. 2a, **1917-1918**.

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 3.
1918

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 2 Dicembre 1917.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE GIAMPIETRO CHIRONI
VICEPRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Senatore D'Ovidio Direttore della Classe, Naccari, Segre, Peano, Jadanza, Foà, Guareschi, Guidi, Mattirolo, Grassi, Somigliana, Fusari, Panetti e Parona Segretario.

Scusa l'assenza il Socio Salvadori.

Si legge e si approva l'atto verbale della precedente adunanza.

Il Presidente, con parola commossa, si rende interprete del pensiero di tutti esprimendo il vivo dolore per la morte immatura del nostro amato Presidente Senatore Lorenzo Camerano, e reca ai Colleghi di questa Classe le condoglianze della Classe di Scienze morali. Rammenta che ai funerali dissero nobilmente di Lui i due nostri Colleghi Naccari e Mattirolo e che egli, a nome dell'Accademia, portò l'estremo saluto alla salma dell'amico dilettissimo, che rimpiange con profonda mestizia di desiderio al ricordo delle sue virtù e delle sue alte qualità di cittadino, di scienziato e di amministratore. Alla Vedova, alla Figlia, al Genero rinnova le più sentite condoglianze.

Aggiunge che, dovendo uno dei Soci commemorare l'illustre Estinto, egli propone che ne sia affidato l'incarico al Socio Salvadori, che fra i Colleghi è il più indicato a tesserne l'elogio. La Classe approva unanime e il Segretario avrà cura di darne notizia al Socio Salvadori.

Si comunica l'elenco delle numerose condoglianze giunte alla Presidenza.

Il Socio Mattirolo presenta in omaggio due sue pubblicazioni: *Come la Città di Torino onora i Botanici piemontesi.* — *Sulla natura della colorazione rosea della calce dei muri vetusti e sui vegetali inferiori che danneggiano i monumenti e le opere d'arte.* Ne riassume i risultati e, riguardo alla prima, approfitta dell'occasione per esprimere il desiderio che, allo scopo di rendere più significativo ed istruttivo l'onore di assegnare nomi di persone illustri alle vie della Città, il Comune provveda affinchè, sulla targa, al nome della persona si aggiunga una parola od una frase che ricordi il campo di attività nel quale il personaggio si rese illustre e benemerito. — Il Socio Foà si associa alla opportuna proposta, e il Presidente si esprime nello stesso senso, ringraziando il Socio Mattirolo delle interessanti comunicazioni.

Il Socio Guareschi ricorda che in quest'anno si compie il centenario della nascita di due grandi Chimici: Francesco Selmi e Adolfo Wurtz, e così ne parla:

" In quest'anno si compie il centenario della nascita di
" due grandi chimici: Francesco Selmi e Adolfo Wurtz. Del
" primo scrissi già un'ampia biografia nel 1911 ed inserita nei
" volumi delle nostre *Memorie.*

" Adolfo Wurtz, nato in Strassburg il 26 novembre 1817
" e morto a Parigi il 12 maggio 1884, è uno dei più grandi
" chimici del secolo XIX. Egli fu l'apostolo della teoria ato-
" mica in Francia e fece conoscere l'importanza della legge di
" Avogadro. Wurtz fu l'erede in Francia delle idee di Laurent

“ e Gerhardt. La scoperta delle *amine* e delle basi *ossietileniche*,
“ dei *glicoli* od *alcoli bivalenti* o *biossidrilici*; le scoperte e le
“ ricerche sui composti del *fosforo*, dell'*idruro di rame*, dell'*alcool*
“ *butilico* ecc.; i suoi metodi di sintesi dei *radicali alcolici* (1855),
“ degli *acidi aromatici*, dell'*idrato d'amilene*, primo esempio di
“ *alcole terziario*; la *sintesi* della *glicerina*, il suo metodo di *aldo-*
“ *lizzazione* e tante altre ricerche pongono questo illustre uomo
“ fra i primi e più grandi chimici.

“ Molte sono le opere pubblicate dal WURTZ, e basti ricor-
“ dare: il grande *Dictionnaire de chimie*; l'*Histoire des doctrines*
“ *chimiques* (1868); *Leçons de chimie élémentaire; Traité de chimie*
“ *médicale; Leçons sur quelques points de philosophie chimique* (1864,
“ trad. in ital. nel “ Nuovo Cimento „); la *Théorie des atomes*
“ *dans la conception générale du monde* (1875); la *Théorie ato-*
“ *mique* (1876 e 1880); *Traité de chimie biologique* (1880); *Progrès*
“ *de l'industrie des matières colorantes artificielles* (1876). Fondò
“ nel 1858 il “ Répertoire de chimie „, che si trasformò poi
“ nel “ Bulletin de la Société chimique de Paris „.

“ WURTZ fu prima allievo di Liebig a Giessen, poi studiò
“ a Strassburg e a Parigi; fu capo dei lavori chimici alla
“ Scuola di Arti e Manifatture, professore all'Istituto agrono-
“ mico, poi, in sostituzione di Dumas, professore di chimica
“ organica e farmaceutica nella Facoltà di Medicina ed infine
“ nella Facoltà di Scienze. Nel 1881 ottenne la grande medaglia
“ Copley. Ebbe precipua parte nella fondazione dell'Associazione
“ francese per l'avanzamento delle Scienze.

“ Numerosissimi sono i suoi allievi, molti dei quali diven-
“ nero chimici illustri e che hanno continuato la sua Scuola.
“ WURTZ era uno de' più efficaci insegnanti e dei più eleganti
“ e chiari scrittori.

“ Tanto più volentieri e con animo grato scrivo queste
“ parole in omaggio alla memoria di questo grande chimico,
“ perchè le sue ricerche scientifiche e i suoi libri mi furono

" guida nei primi anni della mia carriera; era di quei Maestri " ideali per i quali si sente il desiderio ed il dovere di con- " servarne la rimembranza con gratitudine ".

Il Presidente ringrazia il Socio Guareschi per il degno omaggio reso ai due illustri, che l'Accademia si onora di aver avuto fra i suoi Membri.

Presentano per la stampa negli *Atti*:

Il Socio Peano: una Nota (seconda) del Prof. A. Pensa, *Sull'operatore omografico* R'.

Il Socio Grassi: una sua Nota, *A proposito delle due Note del Prof. Guglielmo " Sulla legge di Poisson e sulla esperienza di Clément e Desormes "*.

LETTURE

Sull'operatore omografico R'.

Nota di ANGELO PENSA (a Torino).

A complemento di una Nota già pubblicata in questi *Atti* [1], esporremo qui alcune proprietà dell'operatore omografico R'.

§ 1.

Se α, β sono omografie, ed $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ sono vettori, tenendo presente la definizione di $R'(\alpha, \beta)$, e servendoci delle sue proprietà fondamentali [2], dimostreremo le seguenti relazioni:

$$(1) \qquad R'(\alpha,\beta) = (I_1\beta - K\beta)(I_1\alpha - K\alpha) - I_1(\alpha\beta) + K\alpha . K\beta .$$

$$(1') \qquad R'(\alpha,\beta) = CK\beta . CK\alpha - CK(\beta\alpha) \text{ [3]}.$$

$$(1'') \qquad R'(\alpha,\beta) = I_2(\alpha+\beta) - I_2\alpha - I_2\beta - (I_1\alpha).K\beta - (I_1\beta).K\alpha + K(\alpha\beta+\beta\alpha) \text{ [4]}.$$

---

[1] A. Pensa, *Su alcune omografie speciali e sugli operatori omografici* C, R. “ Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino „, vol. 53.

[2] C. Burali-Forti et R. Marcolongo, *Analyse vectorielle générale* (Pavia, Mattei et C., 1913), vol. II, pag. 134. — Indicheremo, nel seguito, con A_1 ed A_2 rispettivamente il vol. I ed il vol. II di quest'opera.

[3] La (1') si può anche scrivere, sostituendo ad α, β rispettivamente $K\alpha$, $K\beta$, come segue:

$$(1''') \qquad R'(K\alpha, K\beta) = C\beta . C\alpha - C(\alpha.\beta),$$

od anche, per la (8) di pag. 134 di A_2 (cfr. A. Pensa, loc. cit., nota [3], formula [8]):

$$(1^{\text{IV}}) \qquad KR'(\alpha,\beta) = C\beta . C\alpha - C(\alpha.\beta),$$

[4] Questa formula generalizza l'espressione di $R\alpha$ data in A_1 al n. 20, colla [2].

(2) $R'(\alpha, \alpha) = 2R\alpha.$

(3) $R'(\alpha^{-1}, \beta^{-1}) = R\alpha^{-1} . R'(\alpha, \beta) . R\beta^{-1}$, ($\alpha$ e β invertibili).

(4) $R'(\alpha, \beta)\, \boldsymbol{u} = 2V(\alpha . \boldsymbol{u}\wedge . K\beta).$

(5) $R'(\alpha, \boldsymbol{u}\wedge\beta) = 2H \} V(K\beta . \alpha), \boldsymbol{u} \{ + \beta . (K\alpha \boldsymbol{u})\wedge.$

(6) $R'(\boldsymbol{u}\wedge\alpha, \boldsymbol{v}\wedge\beta) = \alpha . \} K\beta(\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}) \{ \wedge + H(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) . R'(\alpha, \beta) =$
$= - \beta . \} K\alpha(\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}) \{ \wedge + H(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) . R'(\alpha, \beta) =$
$= \frac{1}{2} \} \alpha . [K\beta(\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v})] \wedge - \beta . [K\alpha(\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v})] \wedge +$
$+ 2DH(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) . R'(\alpha, \beta) \{$ (5).

(7) $I_3(\alpha\beta) . R'(\alpha^{-1}, \beta^{-1}) = K\alpha . R'(\alpha, \beta) . K\beta$, ($\alpha$ e β invertibili).

(8) $\begin{cases} I_3\alpha . R'(\alpha, \beta) = C(R\alpha . K\beta) . R\alpha = R\alpha . C(K\beta . R\alpha). \\ I_3\beta . R'(\alpha, \beta) = C(R\beta . K\alpha) . R\beta = R\beta . C(K\alpha . R\beta). \end{cases}$

(9) $I_1 R'(R\alpha, R\beta) = I_1(R\beta . CR\alpha) = I_2\alpha . I_2\beta - I_2(\alpha . \beta).$

(10) $I_2 R'(\alpha, \beta) = I_1\alpha . I_1(K\alpha . R\beta) + I_1(\beta . RK\alpha . \beta) =$
$= I_1\alpha . I_1(K\alpha . R\beta) + I_1\beta . I_1(K\beta . R\alpha) - I_1(R\beta . CR\alpha) =$
$= I_1\alpha . I_1(K\alpha . R\beta) + I_1\beta . I_1(K\beta . R\alpha) - I_1 R'(R\alpha, R\beta).$

(11) $I_3 R'(\alpha, \beta) = I_1(K\alpha . R\beta) . I_1(K\beta . R\alpha) - I_3(\alpha . \beta).$

(12) $RR'(\alpha, \beta) = R^2(\alpha + \beta) + R^2\alpha + R^2\beta -$
$- R' \} R(\alpha + \beta), R\alpha + R\beta \{ + R'(R\alpha, R\beta).$

(13) $R'(\alpha, \beta) . K\alpha + R\alpha . K\beta = K\alpha . R'(\alpha, \beta) + K\beta . R\alpha =$
$= I_1(R\alpha . K\beta).$

(14) $I_1[K\alpha . R'(\alpha, \beta)] = 2I_1(R\alpha . K\beta).$

(15) $\begin{cases} I_3\alpha . RR'(\alpha, \beta) = RC(R\alpha . K\beta) . \alpha = \alpha . RC(K\beta . R\alpha). \\ I_3\beta . RR'(\alpha, \beta) = RC(R\beta . K\alpha) . \beta = \beta . RC(K\alpha . R\beta). \end{cases}$

(16) $R'(R\alpha, R\beta) = \beta . KR'(\alpha, \beta) . \alpha = \alpha . KR'(\alpha, \beta) . \beta =$
$= C(\alpha . RK\beta) . \alpha = C(\beta . RK\alpha) . \beta.$

Dimostrazioni. — Per la definizione dell'operatore C si ha:

$$R'(\alpha, \beta) = I_1 R'(\alpha, \beta) - CR'(\alpha, \beta) =$$

per le [7], [9] di pag. 134 di A_2, si ottiene:

$$= I_1\alpha . I_1\beta - I_1(\alpha\beta) - K\beta . CK\alpha - K\alpha . CK\beta =$$
$$= I_1\alpha . I_1\beta - I_1(\alpha\beta) - K\beta(I_1\alpha - K\alpha) - K\alpha(I_1\beta - K\beta).$$

---

(5) Da questa, per $\alpha = \beta = 1$, si ha la formula (cfr. A. Pensa, loc. cit., nota (3), formula [11]):

$$R'(\boldsymbol{u}\wedge, \boldsymbol{v}\wedge) = H(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + H(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) = 2DH(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}).$$

Sviluppando, risulta:

$$(a) \qquad R'(\alpha, \beta) = I_1 \alpha . I_1 \beta - I_1(\alpha\beta) - (I_1\alpha) . K\beta + \\ + K\beta . K\alpha - (I_1\beta) . K\alpha + K\alpha . K\beta.$$

Da questa si ottengono le (1), (1'), (1''). Infatti, ordinando si ha:

$$R'(\alpha, \beta) = (I_1 \beta - K\beta)(I_1\alpha - K\alpha) - I_1(\alpha\beta) + K\alpha . K\beta$$

che è la (1). Sostituendo in questa ad $I_1\beta - K\beta$, $I_1\alpha - K\alpha$, $I_1(\alpha\beta) - K\alpha . K\beta$ le loro espressioni $CK\beta$, $CK\alpha$, $CK(\beta\alpha)$, si ha la (1').

Nella (*a*) si sostituisca ad $I_1(\alpha\beta)$ il suo valore dato dalla [2], n. 25 di A_1: riducendo e ordinando, si otterrà la (1'').

Nella formola (1'') si ponga $\beta = \alpha$. Osservando che si ha $I_2(2\alpha) = 4 I_2 \alpha$, $K(2\alpha^2) = 2K\alpha^2$, riducendo ed applicando la [2], n. 20 di A_1, si ottiene la (2).

Applicando successivamente le (13), (14), (3) di pag. 134 di A_2, si ottiene la (3) di questo §, come segue (per α e β invertibili):

$$R\alpha^{-1} . R'(\alpha, \beta) . R\beta^{-1} = R'(\alpha^{-1} . \alpha . \beta^{-1}, \alpha^{-1} . \beta . \beta^{-1}) = \\ = R'(\beta^{-1}, \alpha^{-1}) = R'(\alpha^{-1}, \beta^{-1}).$$

Si ha la formula [6]:

$$2V(\alpha . u \wedge . \beta) = [C\beta . CK\alpha - C(K\alpha . \beta)] u.$$

Ponendo qui $K\beta$ al posto di β e applicando la (1'), si ha la (4).

Indicando con x, y due vettori qualunque non paralleli, si ha, per la definizione di $R'(\alpha, \beta)$ [7]:

$$R'(\alpha, u \wedge \beta)(x \wedge y) = (\alpha x) \wedge (u \wedge \beta y) + (u \wedge \beta x) \wedge \alpha y = \\ = (\alpha x \times \beta y - \alpha y \times \beta x) . u + \beta(u \times \alpha y . x - u \times \alpha x . y) = \\ = [y \times K\beta . \alpha x - x \times K\beta . \alpha y] u + \beta [y \times K\alpha u . x - x \times K\alpha u . y].$$

---

(6) Cfr. A. Pensa, loc. cit., § 3, formula (5).

(7) Vedi A_2, pag. 134, formula (1). — Le formule (8), (9), (11), (12), (13) di A_2, pag. 134, sono riportate, corrette di errori tipografici, in: A. Pensa, loc. cit., § 1, nota (3). A queste ci riferiamo, citando quelle.

Per la definizione del doppio vettore di una omografia (A_1, n. 8, [2]), si ottiene:

$$= 2\mathrm{V}(\mathrm{K}\beta . \alpha) \times (x \wedge y) . u + \beta (\mathrm{K}\alpha u) \wedge (x \wedge y) =$$
$$= \{ 2\mathrm{H}[\mathrm{V}(\mathrm{K}\beta . \alpha), u] + \beta . (\mathrm{K}\alpha u) \wedge \} (x \wedge y),$$

e poichè x, y sono arbitrarii, risulta di qui dimostrata la (5).

Siccome $\mathrm{R}'(\alpha, \beta) = \mathrm{R}'(\beta, \alpha)$, come risulta dalla (1''), così il primo membro della (5) si potrà scrivere $\mathrm{R}'(u \wedge \beta, \alpha)$; scambiando poi β con α, risulterà:

$$\mathrm{R}'(u \wedge \alpha, \beta) = \alpha . (\mathrm{K}\beta u) \wedge + 2\mathrm{H}[\mathrm{V}(\mathrm{K}\alpha . \beta), u].$$

In questa si ponga $v \wedge \beta$ al posto di β. Otterremo:

$$\mathrm{R}'(u \wedge \alpha, v \wedge \beta) = \alpha [\mathrm{K}(v \wedge \beta) u] \wedge + \mathrm{H} \{ 2\mathrm{V}[\mathrm{K}\alpha . v \wedge . \beta], u \}.$$

Osservando che

$$\mathrm{K}(v \wedge \beta) u = [- \mathrm{K}\beta . v \wedge] u = - \mathrm{K}\beta (v \wedge u) = \mathrm{K}\beta (u \wedge v),$$

e sostituendo a $2\mathrm{V}[\mathrm{K}\alpha . v \wedge . \beta]$ la sua espressione ricavata dalla (4), si ha:

$$\mathrm{R}'(u \wedge \alpha, v \wedge \beta) = \alpha [\mathrm{K}\beta (u \wedge v)] \wedge + \mathrm{H} \{ \mathrm{R}'(\mathrm{K}\alpha, \mathrm{K}\beta) v, u \} =$$

per la (8) di pag. 134 di A_2, e la seconda delle [2], n. 24 di A_1, risulta:

$$= \alpha [\mathrm{K}\beta (u \wedge v)] \wedge + \mathrm{H}(v, u) . \mathrm{R}'(\alpha, \beta).$$

Così è dimostrata la prima parte della (6); la seconda parte si ha di qui collo scambio di u con v, e di α con β.

Facendo la semisomma di queste due espressioni e applicando la relazione $2\mathrm{DH}(u, v) = \mathrm{H}(u, v) + \mathrm{H}(v, u)$, data al n. 12 di A_1, si ha l'ultima parte della (6).

Dalla (3) qui dimostrata, per la terza delle [2], n. 25 di A_1, si ha la (7) come segue (supposte α e β invertibili):

$$\mathrm{I}_3(\alpha . \beta) . \mathrm{R}'(\alpha^{-1}, \beta^{-1}) = \mathrm{I}_3\alpha . \mathrm{R}\alpha^{-1} . \mathrm{R}'(\alpha, \beta) . \mathrm{I}_3\beta . \mathrm{R}\beta^{-1} =$$
$$= \mathrm{K}\alpha . \mathrm{R}'(\alpha, \beta) . \mathrm{K}\beta.$$

Poichè [8] $R'(\alpha,\beta)=R'(\beta,\alpha)$ e $mR'(\alpha,\beta)=R'(m\alpha,\beta)$, ove m è un numero, si ha, ricordando anche la relazione $I_3\alpha=RK\alpha.\alpha$:

$$I_3\alpha.R'(\alpha,\beta)=R'(\beta.I_3\alpha,\alpha)=R'(\beta.RK\alpha.\alpha,\alpha)=$$

applicando ora la (14) e poi la prima delle (10) di pag. 134 di A_2, si ottiene:

$$=R'(\beta.RK\alpha,1).R\alpha=CK(\beta.RK\alpha).R\alpha=C(R\alpha.K\beta).R\alpha.$$

Si ha così la prima parte della prima delle (8). Operando con K su questa, e ricordando che $KR'(\alpha,\beta)=R'(K\alpha,K\beta)$, si ha:

$$I_3K\alpha.R'(K\alpha,K\beta)=RK\alpha.C(\beta.RK\alpha).$$

Cambiando, in questa, α e β in $K\alpha$ e $K\beta$, si ottiene la seconda parte della prima delle (8). Allo stesso modo si dimostra la seconda formola (8).

Dalla (7) di pag. 134 di A_2 si ha:

$$(b)\qquad I_1R'(R\alpha,R\beta)=I_1R\alpha.I_1R\beta-I_1(R\alpha.R\beta).$$

Osservando che $I_1(R\alpha.R\beta)=I_1(R\beta.R\alpha)$, e ricordando la definizione dell'operatore C, si ha dalla (b):

$$I_1R'(R\alpha,R\beta)=I_1[R\beta.I_1R\alpha-R\beta.R\alpha]=I_1\}R\beta(I_1R\alpha-R\alpha)\{=$$
$$=I_1\}R\beta.CR\alpha\{$$

che è la prima parte della (9). Se invece in (b) si sostituisce ad $R\alpha.R\beta$ il suo valore $R(\alpha.\beta)$, e quindi ad $I_1R\alpha$, $I_1R\beta$, $I_1R(\alpha,\beta)$ le loro espressioni $I_2\alpha$, $I_2\beta$, $I_2(\alpha.\beta)$, si ha la seconda parte della (9).

Operando con I_2 sul primo e sul secondo membro della prima delle (8) si ha (A_1, n. 10, [3]; n. 22, [1]; n. 20, [5]):

$$(I_3\alpha)^2.I_2R'(\alpha,\beta)=I_1\}RC(R\alpha.K\beta).RR\alpha\{,$$

---

[8] Come risulta rispettivamente dalle (1″) e (1).

e poichè $RR\alpha = I_3\alpha . \alpha$, e $RC\gamma = I_2\gamma + K\gamma^2$, ove γ è un'omografia [9], risulta:

$$(I_3\alpha)^2 . I_2 R'(\alpha, \beta) = I_3\alpha . I_1 \{ I_2(R\alpha . K\beta) . \alpha + K(R\alpha . K\beta) . K(R\alpha . K\beta) . \alpha \}$$
$$= I_3\alpha . I_1 \{ I_2(R\alpha . K\beta) . \alpha + \beta . RK\alpha . \beta . (RK\alpha . \alpha) \},$$

e siccome $RK\alpha . \alpha = I_3\alpha$, come risulta dalla [4], n. 20 di A_1, e poichè:

$$I_2(R\alpha . K\beta) = I_1 R(R\alpha . K\beta) = I_1(RR\alpha . RK\beta) = I_1(I_3\alpha . \alpha . RK\beta) =$$
$$= I_3\alpha . I_1(K\alpha . R\beta),$$

sarà:

$$(I_3\alpha)^2 . I_2 R'(\alpha, \beta) = (I_3\alpha)^2 . I_1 \{ I_1(K\alpha . R\beta) . \alpha + \beta . RK\alpha . \beta \},$$

da cui, sopprimendo il fattore numerico $(I_3\alpha)^2$ nei due membri [10], si ottiene:

$$I_2 R'(\alpha, \beta) = I_1\alpha . I_1(K\alpha . R\beta) + I_1(\beta . RK\alpha . \beta),$$

che è la prima parte della (10). E siccome si ha [11]:

$$I_1(\beta . RK\alpha . \beta) = I_1\beta . I_1(\beta . RK\alpha) - I_1 R'(\beta, \beta RK\alpha),$$

sostituendo nella precedente risulta:

$$(c) \qquad I_2 R'(\alpha, \beta) = I_1\alpha . I_1(K\alpha . R\beta) + I_1\beta . I_1(\beta . RK\alpha) -$$
$$- I_1 R'(\beta, \beta RK\alpha),$$

ma per le (13) e (10) di pag. 134 di A_2, si ha:

$$R'(\beta, \beta . RK\alpha) = R\beta . R'(1, RK\alpha) = R\beta . CK(RK\alpha) = R\beta . CR\alpha,$$

---

[9] Cfr. A. Pensa, loc. cit., § 2, formola (6).

[10] Con ciò si suppone che sia $I_3\alpha$ non nullo. Però la formula vale anche quando $I_3\alpha = 0$, in virtù del teorema 2° di pag. 131 di A_2.

[11] Come risulta sostituendo $RK\alpha$ ad α nella formula (Cfr. A. Pensa, loc. cit., § 3):

$$I_1(\beta . \alpha . \beta) = I_1\beta . I_1(\beta . \alpha) - I_1 R'(\beta, \beta\alpha).$$

e sostituendo in (c) si ha la seconda parte della (10):

$$I_2 R'(\alpha, \beta) = I_1 \alpha . I_1(K\alpha . R\beta) + I_1 \beta . I_1(\beta . RK\alpha) - I_1(R\beta . CR\alpha).$$

E se in questa, ad $I_1(R\beta . CR\alpha)$ si sostituisce la sua espressione $I_1 R'(R\alpha, R\beta)$ data dalla (9), si ha la terza parte della (10).

Operando con I_3 sul primo e sul secondo membro della prima delle (8), si ha, per la [3], n. 10 e la [2], n. 25 di A_1:

$$(I_1 \alpha)^3 . I_3 R'(\alpha, \beta) = I_3 R\alpha . I_3 C(R\alpha . K\beta),$$

ossia, ricordando che $I_3 R\alpha = (I_3 \alpha)^2$, ed applicando la formula ([12]) $I_3 C\gamma = I_1 \gamma . I_2 \gamma - I_3 \gamma$, ove γ è un'omografia, risulta:

$$(I_3 \alpha)^3 . I_3 R'(\alpha, \beta) = (I_3 \alpha)^2 \{ I_1(R\alpha . K\beta) . I_2(R\alpha . K\beta) - I_3(R\alpha . K\beta) \}.$$

E poichè $I_2(R\alpha . K\beta) = I_1 R(R\alpha . K\beta) = I_1(RR\alpha . RK\beta) =$ $= I_1(I_3 \alpha . \alpha . RK\beta)$, ed $I_3(R\alpha . K\beta) = I_3 K\beta . I_3 R\alpha = I_3 \beta . (I_3 \alpha)^2$, sarà:

$$(I_3 \alpha)^3 . I_3 R'(\alpha, \beta) = (I_3 \alpha)^3 \{ I_1(R\alpha . K\beta) . I_1(\alpha . RK\beta) - I_3 \beta . I_3 \alpha \}.$$

Osservando che $I_1(\alpha . RK\beta) = I_1(K\alpha . R\beta)$, e sopprimendo nei due membri il fattore $(I_3 \alpha)^3$, supposto diverso da zero ([13]), si ha la (11).

Operando con R sui due membri della identità [A_2, pag. 134, (2)]:

$$R'(\alpha, \beta) = R(\alpha + \beta) - R\alpha - R\beta,$$

e servendoci della (8), pag. 132 di A_2 ([14]), avremo:

$$\begin{aligned} RR'(\alpha, \beta) = {} & RR(\alpha + \beta) + R(R\alpha + R\beta) + \\ & + K \{ CR(\alpha + \beta) . (R\alpha + R\beta) + C(R\alpha + R\beta) . R(\alpha + \beta) \} + \\ & + I_2 \{ R(\alpha + \beta) - (R\alpha + R\beta) \} - I_2 R(\alpha + \beta) - I_2(R\alpha + R\beta). \end{aligned}$$

([12]) A. Pensa, loc. cit., § 2, formula (3).

([13]) Pel caso in cui fosse $I_3 \alpha = 0$, si veda la nota ([10]).

([14]) Cioè della formula:

$$R(\alpha + \beta) = R\alpha + R\beta - K(C\alpha . \beta + C\beta . \alpha) + I_2(\alpha + \beta) - I_2 \alpha - I_2 \beta.$$

E calcolando $R(R\alpha + R\beta)$ colla formula della nota ([14]), si ha:

$$\begin{aligned} RR'(\alpha, \beta) &= RR(\alpha + \beta) + RR\alpha + RR\beta + \\ &+ [I_2(R\alpha + R\beta) - I_2 R\alpha - I_2 R\beta - K(CR\alpha . R\beta + CR\beta . R\alpha)] + \\ &+ [I_2 \{ R(\alpha + \beta) - (R\alpha + R\beta) \} - I_2 R(\alpha + \beta) - I_2(R\alpha + R\beta) + \\ &+ K \{ CR(\alpha + \beta) . (R\alpha + R\beta) + C(R\alpha + R\beta) . R(\alpha + \beta) \}]. \end{aligned}$$

La prima parentesi quadra del secondo membro racchiude lo sviluppo di $R'(R\alpha, R\beta)$, colla formula della nota ([14]); la seconda parentesi quadra racchiude invece lo sviluppo di

$$R' \{ R(\alpha + \beta), \ -(R\alpha + R\beta) \},$$

ossia di

$$-R' \{ R(\alpha + \beta), \ (R\alpha + R\beta) \}.$$

Sostituendo, si ha la (12).

Moltiplicando a destra i due primi membri della prima delle (8) per $K\alpha$, e ricordando che $R\alpha . K\alpha = I_3 \alpha$, si ha:

$$I_3 \alpha . R'(\alpha, \beta) K\alpha = C(R\alpha . K\beta) . I_3 \alpha.$$

Si sopprima il fattore $I_3 \alpha$ nei due membri ([15]), si otterrà:

$$R'(\alpha, \beta) . K\alpha = C(R\alpha . K\beta) = I_1(R\alpha . K\beta) - R\alpha . K\beta,$$

da cui

$$R'(\alpha, \beta) . K\alpha + R\alpha . K\beta = I_1(R\alpha . K\beta).$$

Partendo invece dalla seconda forma della prima delle (8), si ottiene:

$$(d) \qquad K\alpha . R'(\alpha, \beta) + K\beta . R\alpha = I_1(R\alpha . K\beta).$$

Resta così dimostrata la (13).

Su quest'ultima relazione (*d*) si operi con I_1. Siccome, essendo m un numero, si ha $I_1 m = 3m$, così si otterrà:

$$I_1 \{ K\alpha . R'(\alpha, \beta) \} + I_1(R\alpha . K\beta) = 3 I_1(R\alpha . K\beta).$$

Riducendo, si ha la (14).

([15]) Con ciò si suppone $I_3 \alpha$ non nullo. Pel caso contrario cfr. nota ([10]).

La prima delle (8) ci dà $I_3\alpha . R'(\alpha, \beta) = C(R\alpha . K\beta) . R\alpha$. Operando con R sui due membri di questa, e ricordando le [3], [5], n. 20 di A_1, ed inoltre la $RR\alpha = I_3\alpha . \alpha$, si ha:

$$(I_3\alpha)^2 . RR'(\alpha, \beta) = RC(R\alpha . K\beta) . I_3\alpha . \alpha.$$

Di qui, dividendo i due membri per $I_3\alpha$ ([16]), si ha la prima parte della prima delle (15).

La prima delle (8) ci dà una seconda espressione per $I_3\alpha . R'(\alpha, \beta)$. Partendo da questa, e operando come nel caso precedente, si dimostra la seconda parte della prima formula (15). La seconda formula (15) si dimostra in modo analogo partendo dalla seconda delle (8).

Per α e β invertibili si ha (A_1, [4'], n. 20):

$$R'(R\alpha, R\beta) = R' \} I_3\alpha . K\alpha^{-1}, I_3\beta . K\beta^{-1} \{.$$

Per le (4) e (8) di pag. 134 di A_2, si ottiene:

$$(e) \qquad R'(R\alpha, R\beta) = I_3\alpha . I_3\beta . KR'(\alpha^{-1}, \beta^{-1}) = \\ = I_3\alpha . I_3\beta KR'(\alpha^{-1} . \beta . \beta^{-1}, \alpha^{-1} . \alpha . \beta^{-1}).$$

E poichè ([17]) $R'(\alpha\beta, \alpha\gamma) = R\alpha . R'(\beta, \gamma)$, $R'(\alpha\gamma, \beta\gamma) = R'(\alpha, \beta) . R\gamma$, così sarà:

$$R'(R\alpha, R\beta) = I_3\alpha , I_3\beta . K \} R\alpha^{-1} . R'(\beta, \alpha) . R\beta^{-1} \{ = \\ = K \} I_3\alpha . R\alpha^{-1} . R'(\beta, \alpha) . I_3\beta . R\beta^{-1} \{.$$

Siccome $I_3\alpha . R\alpha^{-1} = K\alpha$, ed $I_3\beta . R\beta^{-1} = K\beta$, così avremo:

$$R'(R\alpha, R\beta) = K \} K\alpha . R'(\beta, \alpha) . K\beta \{ = \beta . KR'(\alpha, \beta) . \alpha,$$

che è la prima delle espressioni di $R'(R\alpha, R\beta)$ date dalla (16). Per avere la seconda, si ponga $R'(\beta^{-1}, \alpha^{-1})$ al posto di $R'(\alpha^{-1}, \beta^{-1})$ nel secondo membro della (*e*), e si proceda come sopra.

([16]) Cfr. nota precedente.

([17]) Cfr. A_2, pag. 134, formule (13), (14).

Nella prima delle (8), ad α, β si sostituisca $R\alpha$, $R\beta$ rispettivamente, e si osservi che $I_3 R\alpha = (I_3\alpha)^2$; $RR\alpha = I_3\alpha . \alpha$; $KR\alpha = RK\alpha$. Si otterrà:

$$(I_3\alpha)^2 R'(R\alpha, R\beta) = (I_3\alpha)\, C \{ \alpha . RK\beta \} . I_3\alpha . \alpha .$$

Sopprimendo nei due membri di questa eguaglianza il fattore $(I_3\alpha)^2$, supposto diverso da zero [18], si ottiene la terza delle espressioni di $R'(R\alpha, R\beta)$ date dalla (16). La quarta si ottiene in modo analogo partendo dalla $I_3\alpha . R'(\alpha, \beta) = R\alpha . C(K\beta . R\alpha)$ data dalla prima delle (8). Resta così interamente dimostrata la (16).

§ 2. — Alcune formule differenziali.

Indichino α e β omografie, $\boldsymbol{a}$ un vettore costante, ed $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ vettori funzioni del punto P. Si hanno allora le seguenti relazioni:

(1) $dI_3\alpha = I_3\alpha . I_1(\alpha^{-1} . d\alpha) = -I_3\alpha . I_1(\alpha . d\alpha^{-1})$, (per α invert.),

(2) $d \log I_3\alpha = I_1(\alpha^{-1} . d\alpha) = -I_1(\alpha . d\alpha^{-1})$, (per α ivertibile),

(3) $\operatorname{grad} \log I_3\alpha \times \boldsymbol{a} = I_1\left(\alpha^{-1} . \frac{d\alpha}{dP}\boldsymbol{a}\right) = -I_1\left(\alpha . \frac{d\alpha^{-1}}{dP}\boldsymbol{a}\right)$, (per α invertibile).

(4) $dR\alpha = R'(\alpha, d\alpha)$,

(5) $dR'(\alpha, \beta) = R'(\alpha, d\beta) + R'(d\alpha, \beta)$,

(6) $\operatorname{grad} R'(\alpha, \beta) = 2V \{ \alpha . \operatorname{Rot} K\beta + \beta \operatorname{Rot} K\alpha \}$,

(7) $\operatorname{grad} R'\left(\frac{d\boldsymbol{u}}{dP}, \frac{d\boldsymbol{v}}{dP}\right) = 0$,

(8) $\operatorname{Rot} R'(\alpha, \beta) = \alpha . \operatorname{grad} \beta \wedge +$
$+ K \{ \operatorname{Rot}(K\beta . K\alpha) - (\operatorname{Rot} K\beta) . K\alpha - C\beta . \operatorname{Rot} K\alpha \} +$
$+ \beta . \operatorname{grad} \alpha \wedge + K \{ \operatorname{Rot}(K\beta . K\alpha) - (\operatorname{Rot} K\alpha) . K\beta -$
$- C\alpha . \operatorname{Rot} K\beta \}$.

Dimostrazioni. — Dalla (7), n. 7, pag. 136 di A_2 si ha:

$$dI_3\alpha = I_1(dK\alpha . R\alpha),$$

[18] Pel caso contrario cfr. nota [10].

e siccome per α invertibile si ha $\mathrm{R}\alpha = \mathrm{I}_3\alpha . \mathrm{K}\alpha^{-1}$, ed inoltre [$A_2$, pag. 136, (4)] è $d\mathrm{K}\alpha = \mathrm{K}d\alpha$, così si otterrà:

$$d\mathrm{I}_3\alpha = \mathrm{I}_3\alpha . \mathrm{I}_1(d\mathrm{K}\alpha . \mathrm{K}\alpha^{-1}) = \mathrm{I}_3\alpha . \mathrm{I}_1(\alpha^{-1} . d\alpha),$$

cioè la prima parte della (1). Per dimostrare la seconda parte basta osservare che dalla identità $\alpha . \alpha^{-1} = 1$, differenziando si ha $d\alpha . \alpha^{-1} + \alpha . d\alpha^{-1} = 0$. E quindi:

$$\mathrm{I}_1(d\alpha . \alpha^{-1}) = - \mathrm{I}_1(\alpha . d\alpha^{-1}).$$

Dalla (1) ora dimostrata, dividendo tutti i membri per $\mathrm{I}_3\alpha$, che è diverso da zero (essendo α invertibile), si ha la (2).

Per la [1'], n. 39 di A_1, si ha che se $\boldsymbol{a}$ è un vettore costante, ed m è un numero funzione di P, allora

$$\mathrm{grad}\, m \times \boldsymbol{a} = \frac{dm}{dP} \boldsymbol{a}.$$

Ad m sostituiamo $\log \mathrm{I}_3\alpha$. Avremo:

$$\mathrm{grad} \log \mathrm{I}_3\alpha \times \boldsymbol{a} = \frac{d \log \mathrm{I}_3\alpha}{dP} \boldsymbol{a} = \mathrm{I}_1\left(\alpha^{-1} \frac{d\alpha}{dP} \boldsymbol{a}\right) = - \mathrm{I}_1\left(\alpha . \frac{d\alpha^{-1}}{dP} \boldsymbol{a}\right).$$

Così è dimostrata la (3).

Per definizione si ha (A_1, n. 20, [1]), indicando con $\boldsymbol{x}$ ed $\boldsymbol{y}$ due vettori arbitrarii:

$$\mathrm{R}\alpha(\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y}) = (\alpha\boldsymbol{x}) \wedge (\alpha\boldsymbol{y}).$$

Di qui, differenziando e ricordando la definizione di R' [A_2, pag. 134, (1)], si ha:

$$d\mathrm{R}\alpha(\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y}) = (\alpha\boldsymbol{x}) \wedge d\alpha\boldsymbol{y} + (d\alpha\boldsymbol{x}) \wedge \alpha\boldsymbol{y} = \mathrm{R}'(\alpha, d\alpha)(\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y}).$$

Per l'arbitrarietà di $\boldsymbol{x}$ ed $\boldsymbol{y}$, risulta, di qui, la (4).

Indicando ancora con $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ due vettori arbitrarii, si ha, per definizione [A_2, pag. 134, (1)]:

$$\mathrm{R}'(\alpha, \beta)(\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y}) = (\alpha\boldsymbol{x}) \wedge \beta\boldsymbol{y} + (\beta\boldsymbol{x}) \wedge \alpha\boldsymbol{y}.$$

Differenziando i due membri, ed ordinando, e tenendo presente la precedente definizione di R′, si ha:

$$\begin{aligned} d\mathrm{R}'(\alpha, \beta)(x \wedge y) &= [(\alpha x) \wedge d\beta y + (d\beta x) \wedge \alpha y] + \\ &+ [(d\alpha x) \wedge \beta y + (\beta x) \wedge d\alpha y] = \mathrm{R}'(\alpha, d\beta)(x \wedge y) + \\ &+ \mathrm{R}'(d\alpha, \beta)(x \wedge y), \end{aligned}$$

e di qui, per l'arbitrarietà di x ed y, risulta la (5).

Nella formula $\operatorname{grad} \alpha \times \boldsymbol{u} = \operatorname{div}(\mathrm{K}\alpha \boldsymbol{u})$, di A_1, n. 38, [3], si ponga $\mathrm{R}'(\alpha, \beta)$ al posto di α, e $x \wedge y$ a posto di $\boldsymbol{u}$, supponendo x ed y costanti. Si otterrà:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} \mathrm{R}'(\alpha, \beta) \times (x \wedge y) &= \operatorname{div}[\mathrm{R}'(\mathrm{K}\alpha, \mathrm{K}\beta)(x \wedge y] = \\ &= \operatorname{div}[(\mathrm{K}\alpha x) \wedge \mathrm{K}\beta y + (\mathrm{K}\beta x) \wedge \mathrm{K}\alpha y], \end{aligned}$$

La prima delle [3], n. 42 di A_1 dà $\operatorname{div}(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{v}$, quindi:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} \mathrm{R}'(\alpha, \beta) \times (x \wedge y) &= (\mathrm{K}\beta y) \times \operatorname{rot}(\mathrm{K}\alpha x) - (\mathrm{K}\alpha x) \times \operatorname{rot}(\mathrm{K}\beta y) + \\ &+ (\mathrm{K}\alpha y) \times \operatorname{rot}(\mathrm{K}\beta x) - (\mathrm{K}\beta x) \times \operatorname{rot}(\mathrm{K}\alpha y). \end{aligned}$$

Pel teorema di commutazione e per la formula $\operatorname{rot}(\alpha \boldsymbol{a}) = (\operatorname{Rot} \alpha) \boldsymbol{a}$, ove $\boldsymbol{a}$ è un vettore costante, si ha:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} \mathrm{R}'(\alpha, \beta) \times (x \wedge y) &= y \times \alpha . (\operatorname{Rot} \mathrm{K}\beta) x - x \times \alpha . (\operatorname{Rot} \mathrm{K}\beta) y + \\ &+ y \times \beta . (\operatorname{Rot} \mathrm{K}\alpha) x - x \times \beta . (\operatorname{Rot} \mathrm{K}\alpha) y = \\ &= 2 \mathrm{V} [\alpha . \operatorname{Rot} \mathrm{K}\beta + \beta . \operatorname{Rot} \mathrm{K}\alpha] \times (x \wedge y). \end{aligned}$$

E poichè x e y sono arbitrarii, risulta di qui dimostrata la (6).

Per la (6) ora dimostrata si ha, indicando con $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ vettori funzioni di P:

$$\operatorname{grad} \mathrm{R}'\left(\frac{d\boldsymbol{u}}{dP}, \frac{d\boldsymbol{v}}{dP}\right) = 2 \mathrm{V} \left\{ \frac{d\boldsymbol{u}}{dP} . \operatorname{Rot} \mathrm{K} \frac{d\boldsymbol{v}}{dP} + \frac{d\boldsymbol{v}}{dP} . \operatorname{Rot} \mathrm{K} \frac{d\boldsymbol{u}}{dP} \right\} = 0,$$

perchè, per la seconda delle [6], n. 44 di A_1, sono nulli i fattori $\operatorname{Rot} \mathrm{K} \frac{d\boldsymbol{u}}{dP}$, $\operatorname{Rot} \mathrm{K} \frac{d\boldsymbol{v}}{dP}$. È quindi dimostrata la (7).

Poichè (A_1, n. 38, [4]), essendo a un vettore costante, è $(\mathrm{Rot}\,\alpha)\,a = \mathrm{rot}\,(\alpha a)$, avremo, indicando con x ed y vettori anch'essi costanti:

$$\mathrm{Rot}\,\mathrm{R}'(\alpha,\beta)\,(x \wedge y) = \mathrm{rot}\,\{(\alpha x)\wedge \beta y + (\beta x)\wedge \alpha y\} =$$

e applicando la seconda delle [3], n. 42 di A_1:

$$= \left[\mathrm{div}\,(\beta y) - \frac{d(\beta y)}{dP}\right].\alpha x - \left[\mathrm{div}\,(\alpha x) - \frac{d(\alpha x)}{dP}\right].\beta y + \\ + \left[\mathrm{div}\,(\alpha y) - \frac{d(\alpha y)}{dP}\right].\beta x - \left[\mathrm{div}\,(\beta x) - \frac{d(\beta x)}{dP}\right].\alpha y.$$

Per le formule $\mathrm{div}\,(\mathrm{K}\alpha a) = \mathrm{grad}\,\alpha \times a$, e $\frac{d(\alpha a)}{dP}x = \left(\frac{d\alpha}{dP}x\right)a$, di A_1, n. 38 e n. 36, risulterà:

$$\mathrm{Rot}\,\mathrm{R}'(\alpha,\beta)\,(x\wedge y) = (\mathrm{grad}\,\mathrm{K}\beta \times y\,.\,\alpha x - \mathrm{grad}\,\mathrm{K}\beta \times x\,.\,\alpha y) + \\ + (\mathrm{grad}\,\mathrm{K}\alpha \times y\,.\,\beta x - \mathrm{grad}\,\mathrm{K}\alpha \times x\,.\,\beta y) + \\ + \left\{\left(\frac{d\alpha}{dP}\beta y\right)x - \left(\frac{d\alpha}{dP}\beta x\right)y\right\} + \\ + \left\{\left(\frac{d\beta}{dP}\alpha y\right)x - \left(\frac{d\beta}{dP}\alpha x\right)y\right\},$$

e in virtù della prima delle (4'), pag. 137 di A_2, si ottiene:

$$\mathrm{Rot}\,\mathrm{R}'(\alpha,\beta)\,(x\wedge y) = \{\alpha\,.\,(\mathrm{grad}\,\mathrm{K}\beta)\wedge + \beta\,.\,(\mathrm{grad}\,\mathrm{K}\alpha)\wedge\}(x\wedge y) - \\ - \mathrm{K}\,\{\mathrm{C}\beta\,.\,\mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\alpha - \mathrm{Rot}\,(\mathrm{K}\beta\,.\,\mathrm{K}\alpha) + (\mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\beta)\,.\,\mathrm{K}\alpha\}(x\wedge y) - \\ - \mathrm{K}\,\{\mathrm{C}\alpha\,.\,\mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\beta - \mathrm{Rot}\,(\mathrm{K}\alpha\,.\,\mathrm{K}\beta) + (\mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\alpha)\,.\,\mathrm{K}\beta\}(x\wedge y).$$

E poichè i vettori x ed y sono arbitrarii, risulta di qui dimostrata la (8).

Torino, novembre 1917.

A proposito di due Note del Prof. Guglielmo: "Sulla legge di Poisson e sull'esperienza di Clément e Desormes„.

Nota di GUIDO GRASSI.

Il Prof. Guglielmo, in due Note pubblicate recentemente nel " Nuovo Cimento „ (1), riproduce quasi integralmente ciò che egli aveva scritto in tre Note inserite nei " Rendiconti dell'Accademia dei Lincei „ (2), e rinnova quindi la discussione su alcune mie osservazioni, pubblicate nei Rendiconti medesimi (3).

Credo opportuno ricordare l'origine di coteste osservazioni.

La 1ª Nota del Prof. Guglielmo aveva lo scopo di esporre un metodo di calcolo molto semplice per dedurre dal noto esperimento di Clément e Desormes il rapporto k fra i calori specifici di un gas a pressione costante e a volume costante, senza ricorrere al primo principio di termodinamica; vi si aggiungeva un metodo di calcolo, pure molto semplice, per dedurre dallo esperimento stesso l'equivalente meccanico della caloria; incidentalmente l'A. osservava che la formola di Poisson $pv^k =$ cost., che esprime la legge di espansione adiabatica dei gas, va con-

---

(1) " Nuovo Cimento „, 1916, ottobre, pag. 145; novembre, pag. 195.

(2) " Rend. Accad. Lincei „, Note del Prof. Guglielmo:

1ª *Sull'esperienza di Clément e Desormes*, ecc., 1° semestre 1914, pag. 698.

2ª *Sulle leggi di Poisson e dello stato aeriforme in relazione al primo principio di termodinamica*, 1° semestre 1916, pag. 117.

3ª *Intorno ad alcuni modi di calcolare l'esperienza di Clément e Desormes*, 1° semestre 1916, pag. 213.

(3) " Rend. Accad. Lincei „, Note del Prof. Guido Grassi:

1ª *Osservazioni a proposito della 1ª Nota del Prof. Guglielmo*, 1° semestre 1915, pag. 676.

2ª *Sulla legge di Poisson*, ecc., 1° semestre 1916, pag. 259.

3ª *Osservazioni alla 3ª Nota del Prof. Guglielmo*, 1° semestre 1916, pag. 619.

siderata come una conseguenza del primo principio di termodinamica e cesserebbe d'esser vera se questo non lo fosse.

Nella mia Nota 1ª feci essenzialmente tre osservazioni:

1ª Non è necessario conoscere il 1° principio di termodinamica per trovare la formola di Poisson.

2ª Il ragionamento fatto dal Prof. Guglielmo per calcolare k è inesatto, perchè non vi è tenuto conto dei lavori esterni; la formola però dà un risultato numerico prossimo al vero quando si considera, nell'esperimento supposto, un riscaldamento piccolo.

3ª Anche il ragionamento per dedurre dall'esperimento di C. e D. l'equivalente meccanico non è persuasivo; la formola esatta risulta da semplificazioni arbitrarie. Del resto non occorreva alcuna dimostrazione, essendo evidente che qualunque esperimento atto a determinare il rapporto k, serve pure a calcolare in modo semplicissimo l'equivalente meccanico, quando si conosca uno dei due calori specifici.

Alla mia 1ª osservazione il Prof. Guglielmo rispose colla sua Nota 2ª e alle altre due colla Nota 3ª. Da parte mia replicai colle altre due mie Note. La sostanza del nuovo scritto è, come dissi, quella stessa delle pubblicazioni precedenti, ma parecchie varianti ed aggiunte introdotte dall'A. nelle sue considerazioni, mi inducono a ritornare sull'argomento, richiamando anche in parte ciò che scrissi già nelle Note sopracitate, per mostrare la insussistenza delle obiezioni che il Prof. Guglielmo crede di poter opporre alla mia critica.

E comincio dalla Nota sulla legge di Poisson.

Qui l'A. cita ripetutamente il mio nome; ed io devo anzitutto spendere poche parole per difendermi da due rimproveri, ch'egli mi rivolge senza tener conto affatto di quanto io gli avevo già risposto.

Il primo rimprovero è che io non tengo conto dell'opinione di Van der Waals e Kohnstamm, i quali espressero il dubbio che nel ragionamento col quale Poisson ha ottenuto la sua formola fosse contenuta in qualche modo la legge della conservazione dell'energia. Io avevo già risposto che, avendo, secondo il mio modo di vedere, una prova diretta che la formola di Poisson si può dimostrare senza ricorrere al 1° principio, non avevo motivo di preoccuparmi più del dubbio a cui accenna

il Van der Waals; soggiungo ora che l'essermi occupato di rimovere quel dubbio mi pare che significhi appunto tener conto della osservazione di Van der Waals; che se, tenendone conto, mi son persuaso che il dubbio non va risolto come vorrebbe il Prof. Guglielmo, ciò non implica alcun disprezzo per quell'A., il quale probabilmente sarebbe del mio parere, come lo sono parecchi altri altrettanto e anche più autorevoli.

E passo al secondo rimprovero di non aver presente la dimostrazione di Clausius. Posso assicurare il Prof. Guglielmo che comperai il libro, che egli cita, del Clausius (*Mechanische Wärmetheorie*) e proprio la 2ª edizione, quando uscì nel 1876, e nell'insegnamento della Termodinamica, che feci per molti anni, molto mi servii di quel libro.

Ma si direbbe che il Prof. Guglielmo voglia approfittare dell'occasione per insegnarmi questo punto della termodinamica; poichè dice: " Sebbene quella dimostrazione sia notissima, molto " facile da rammentare e da ritrovare, credo opportuno ripro- " durla „. E dopo questo preambolo scrive delle formole inutili e sbaglia nella loro interpretazione.

Nella Nota 2ª ai Lincei egli aveva riportate le formole che qui sono contrassegnate $(2)^{bis}$ e (3) a pagine 146 e 147, accompagnandole colla osservazione che le (3) sono tre forme del principio d'equivalenza. Io gli feci notare che le prime due sono veramente espressioni del 1° e anche del 2° principio di termodinamica, ma che la terza non ha a che fare nè col 1° nè col 2° principio. Ora il Prof. Guglielmo non solo ripete il medesimo errore, ma lo moltiplica. Infatti, scritta l'equazione fondamentale, che esprime la prima legge di termodinamica, cioè la

$$dq = du + p\,dv \tag{1}$$

spiega che, con opportune sostituzioni, questa può prendere le tre forme seguenti:

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} dq &= c_v\,dT + (c_p - c_v)\frac{\partial T}{\partial v}\,dv \\ dq &= c_p\,dT - (c_p - c_v)\frac{\partial T}{\partial p}\,dp \\ dq &= c_p\frac{\partial T}{\partial v}\,dv + c_v\frac{\partial T}{\partial p}\,dp \end{aligned} \right.$$

e non pensa che, avendo eliminato la energia interna u e l'equivalente meccanico, sottinteso nella (1), ora nessuna di queste tre equazioni esprime più il 1° principio; nè il Clausius ha mai detto ciò.

A questo punto l'A., non si capisce con quale scopo, richiama una delle cosidette equazioni di Thomson [1], dedotte dal 2° principio, e trasforma le prime due equazioni (2) in modo che queste vengono a rappresentare il 1° ed il 2° principio; la terza rimane invariata; si hanno cioè le tre equazioni:

$$(2)^{bis} \quad \begin{cases} dq = c_v dT + T \dfrac{\partial p}{\partial T} dv \\ dq = c_p dT - T \dfrac{\partial v}{\partial T} dv \\ dq = c_p \dfrac{\partial T}{\partial v} dv + c_v \dfrac{\partial T}{\partial p} dp . \end{cases}$$

Nel caso dei gas queste divengono:

$$(3) \quad \begin{cases} dq = c_v dT + p\, dv = c_v dT + \dfrac{RT}{v} dv \\ dq = c_p dT - v\, dp = c_p dT - \dfrac{RT}{p} dp \\ dq = \dfrac{1}{R} (c_p p\, dv + c_v v\, dp) . \end{cases}$$

Ma subito l'A. soggiunge che queste si possono ottenere senza ricorrere alla formola di Thomson; cosicchè non si capisce che cosa significhino e quale scopo abbiano cotali trasformazioni. Avverte quindi che le tre espressioni della legge di Poisson

$$(4) \qquad T v^{k-1} = \text{cost.} \qquad T^k p^{k-1} = \text{cost.} \qquad p v^k = \text{cost.}$$

si possono considerare come derivate rispettivamente dalle (3), ma che si può passare dall'una all'altra mediante la equazione caratteristica

$$pv = RT = (c_p - c_v)\, T.$$

---

[1] Si avverta che vi è un errore di stampa.

In tutto questo discorso domina sempre lo stesso equivoco; la terza delle (3) non contiene il 1° principio, e perciò questo non sarebbe contenuto nella $pv^k = \text{cost.}$, ma sarebbe contenuto nelle altre due forme; il che sembra una contradizione. Ma contradizione non c'è, perchè quando dalla prima delle (3) si vuol ricavare la prima delle (4), bisogna ricorrere all'equazione di Mayer, quella che il Prof. Guglielmo scrive $R = c_p - c_v$, dove è sottinteso l'equivalente meccanico eguale a 1. Ne risulta che dalla prima delle (3) vien eliminato l'equivalente meccanico e si ha un'equazione che non è più un'espressione del 1° principio.

Si noti poi che per passare dall'una all'altra delle (4) basta la $pv = RT$ senza aggiungervi la $R = c_p - c_v$; come dice il Prof. Guglielmo per far credere che occorra sempre introdurre la 1ª legge.

Che poi le equazioni (2) non contengano il 1° principio risulta evidente dalla possibilità di ricavarle dalle solite relazioni tra i coefficienti nelle espressioni di dq con un artifizio semplice di calcolo, che non vi introduce alcun nuovo concetto fisico. Basta scrivere la dq sotto le tre forme

$$(5) \qquad \begin{cases} dq = c_v dT + l\,dv \\ dq = c_p dT + h\,dp \\ dq = m\,dp + n\,dv \end{cases}$$

e col metodo indicato dallo stesso Prof. Guglielmo a pag. 151 (dove riporta il calcolo che egli attribuisce a Bertrand e a Poincaré) si trovano subito le tre equazioni (2).

Che poi differenziando una delle (4), cioè la equazione di Poisson, si ritrovi l'espressione del principio d'equivalenza, l'A. lo afferma; manca soltanto la dimostrazione, che sarei curioso di vedere.

E così devo soggiungere che non è vero ciò che sembra così evidente al Prof. Guglielmo, che nello studio delle trasformazioni adiabatiche tanto vale far uso della formola di Poisson quanto far uso delle equazioni del 1° principio colla condizione $dq = 0$.

Non comprendo come il Prof. Guglielmo, che ha rilevato

il dubbio di Van der Waals e si sforza di trovare in Clausius un sostegno alla sua tesi, mentre effettivamente il Clausius non se ne occupa, non abbia cercato negli autori anche l'opinione contraria alla sua. Avrebbe trovato che sessant'anni prima del Van der Waals, o del suo allievo Kohnstamm, la questione era stata discussa dal Cazin, l'autore notissimo delle esperienze fatte col metodo di Clément e Desormes per determinare il rapporto k.

Ma poi fu nettamente messo in evidenza come va considerata la questione dal Verdet. Nelle sue *Leçons sur la théorie mécanique de la chaleur* (1868) si trova che egli stabilisce le tre espressioni (5) di dq e le relazioni che devono necessariamente sussistere fra i sei coefficienti (c_v, c_p, l, h, m, n) prima di qualunque accenno alla 1ª legge di termodinamica. La formola di Poisson è dimostrata al § 103, dopo fatta l'applicazione delle due leggi fondamentali allo studio dei gas; ma al Verdet non è sfuggito che questo procedimento può lasciare il lettore in dubbio sul carattere del risultato, e subito dopo dedica un paragrafo (§ 105) a sciogliere tale dubbio.

" Questa formola, dice il Verdet, era stata stabilita da " Laplace e Poisson assai prima che apparisse la teoria mec- " canica del calore. Essi l'ottenevano molto semplicemente am- " mettendo che il rapporto dei due calori specifici fosse indi- " pendente dalla temperatura e dalla pressione, ciò che le " esperienze di Gay-Lussac e di Welter tendevano a stabilire. " Infatti, *qualunque idea ci si faccia sulla natura del calore*, si " ha sempre l'equazione

$$c_v dt + l dv = 0$$

" e il valore di l sodisfa sempre all'eguaglianza

$$l = \frac{c_p - c_v}{\alpha v}(1 + \alpha t), \tag{6}$$

" si ha quindi

$$\frac{1}{\alpha}\left(\frac{c_p}{c} - 1\right)\frac{dv}{v} + \frac{dt}{1 + \alpha t} = 0. \tag{7}$$

" Se si ammette che il rapporto $c_p : c_v$ è costante, questa " equazione sarà immediatamente integrabile e condurrà alla " relazione precedente ", che è la formola di Poisson.

E questo è in sostanza il procedimento del Bertrand, che secondo il Prof. Guglielmo dovrebbe invece condurre al principio d'equivalenza, senza supporre l'equivalenza fra calore e lavoro, perchè si è fissato in mente che la terza delle equazioni $(2)^{bis}$ è una espressione del 1° principio e non si cura di quanto io scrissi nella mia Nota 2ª a questo riguardo.

In quella equazione tanto dq quanto i calori specifici si possono esprimere con unità termiche qualsiansi, perchè non vi appare, nè esplicito nè sottinteso, l'equivalente meccanico del calore; l'equazione esprime soltanto che una quantità di calore è uguale alla somma di due altre quantità di calore. Invece le prime due delle $(2)^{bis}$ contengono veramente il 1° principio; ma in esse, per rendere omogenei i termini, va sottinteso che i termini dq, $c_v dT$, $c_p dT$ sono moltiplicati per l'equivalente meccanico, il cui valore numerico è supposto eguale a 1, perchè l'A. ha preferito adottare le unità meccaniche anche per il calore.

Al quale proposito faccio osservare che per la questione attuale, dove si tratta appunto di vedere quali sono le formole da considerare come espressioni del principio d'equivalenza, sarebbe stato molto meglio mettere sempre in evidenza l'equivalente meccanico.

Nella terza delle $(2)^{bis}$ la omogeneità esiste indipendentemente dalla esistenza dell'equivalente meccanico.

Il Prof. Guglielmo poi crede di trovare altre obiezioni, ma in fondo ripete le stesse cose con diverse parole, come del resto sono costretto a fare anch'io per seguire il suo discorso. Egli dice a pagina 152: Nella equazione (8) cioè nella

$$dq = c_v dT + l\,dv \tag{8}$$

o $l = p$, e si ha l'equazione della prima legge, o l è diverso da p e allora la (8) è falsa, cosicchè io, secondo il prof. Guglielmo, mi proporrei di dedurre una legge vera da una premessa falsa.

Questo sembra un ragionamento, ed all'A. è parso anche degno di esser ripetuto due volte con diverse parole; ma di ragionamento ha soltanto l'apparenza. Che applicando il principio d'equivalenza alla (8) si venga a scoprire che quel coef-

ficiente l si può esprimere in funzione di altri coefficienti fisici, è questo precisamente un vantaggio che ci procura la conoscenza di quella legge. Ora siccome applicando la seconda legge si trova che $l = T\frac{\partial p}{\partial T}$, seguendo il modo di ragionare del Prof. Guglielmo si dovrebbe dire: nella equazione (8) o si ammette $l = T\frac{\partial p}{\partial T}$ e la (8) diventa identica all'equazione che esprime il 2° principio; o l è diverso, e allora la (8) è falsa. Si giungerebbe quindi alla conseguenza che la (8) esprime anche il 2° principio.

Curiosa poi è l'osservazione che l'A. fa a pagina 153; a meno che egli abbia voluto scherzare. Pare che in certi procedimenti di calcolo egli sospetti un tranello; certi termini che vengono travestiti, come egli dice, poi vengono eliminati e scompaiono, lo mettono in imbarazzo; per salvarsi da questi tranelli bisogna tener ben presente la relazione $R = c_p - c_v$, la quale ha una proprietà singolare, che *sussiste anche se si vuol ignorarla.* E così credo che scherzi quando parla di sostituire al segno d'eguaglianza quello di disuguaglianza per concludere che io sbaglio a credere che in certe formole non c'entra il 1° principio di termodinamica.

D'altra parte egli attribuisce al calcolo effetti troppo meravigliosi, virtù che esso non possiede. Dice che per ottenere l'equazione del 1° principio, senza supporre l'equivalenza fra calore e lavoro, basta basarsi sulla esatta definizione *matematica* (perchè *matematica*?) dei calori specifici, sull'equazione caratteristica dei gas, *e sulle relazioni fra differenziali totali e parziali.* Eppure tutti sanno, compreso il Prof. Guglielmo, che per trovare il principio d'equivalenza c'è voluto qualche altra cosa, non soltanto, ma che i differenziali totali e parziali non hanno contribuito molto a quella scoperta.

Delle considerazioni che fa poi l'A. a pagina 154 sulle trasformazioni dei gas, merita di essere rilevata la conclusione, perchè veramente mi pare che chiarisca meglio l'equivoco.

Dice dunque l'A. che qualsiasi relazione la quale contenga il rapporto k in funzione di p, v, T, *senza* dq, può considerarsi come una forma o una conseguenza della 1ª legge per $dq = 0$. Si stenta a capire la cosa in generale e si dubita che sia male

espressa; ma l'A. si spiega con un esempio, che cioè la $pv = RT$ si può scrivere, ponendo $R = c_p - c_v$,

$$q = c_p T = c_v T + pv,$$

donde si ha pure

$$p\,dv + v\,dp = (c_p - c_v)\,dT,$$

relazione identica a quella che si ottiene dalle equazioni della equivalenza. Ma pare che egli non s'accorga che il principio d'equivalenza è compreso unicamente nella $R = c_p - c_v$, la quale contiene come fattore sottinteso l'equivalente meccanico, e nessuno può negare che se si prende un'equazione e vi si introduce una condizione voluta da un determinato principio, si otterrà un'altra equazione, che conterrà ciò che vi si è introdotto; ma così non si dimostra che quel principio vi era contenuto anche prima.

Non si comprende poi lo scopo dell'A. quando all'ultimo riprende la solita relazione $R = c_p - c_v$ e la scrive sotto la forma

$$c_p - c_v = \frac{pv}{T} = p\,\frac{\partial v}{\partial T},$$

poi soggiunge che da questa si ottiene

$$dq = c_p\,dT = c_v\,dT + p\,dv \tag{9}$$

affermando che questa corrisponde alla prima delle equazioni (3). Sembra che abbia dimenticato la regola dei differenziali totali e parziali, e abbia creduto di poter porre in generale

$$p\,\frac{\partial v}{\partial T}\,dT = p\,dv;$$

ciò che è vero solo nel caso che sia la pressione costante; ma allora il dq dell'equazione (9) non è più quello della (3); e se il dq è lo stesso, non può più essere uguale a $c_p dT$.

Ma, ripeto, tutto questo discorso non ha scopo e tutte le considerazioni dell'A. non provano nulla di ciò che egli si era proposto di spiegare relativamente alla dimostrazione della formola di Poisson.

In conclusione, fatta pure astrazione da tutte le inesattezze sopra rilevate, il Prof. Guglielmo, a parer mio, confonde due cose che vanno invece ben distinte: la questione se sia necessario ricorrere al principio d'equivalenza per dimostrare la formola di Poisson; e la necessità che, per esser vera, la formola stessa non sia in disaccordo col detto principio. Questa seconda tesi non ha bisogno di esser dimostrata; tutte le leggi fisiche devono andar d'accordo col principio della conservazione della energia, almeno finchè non venga dimostrato che anche questo sia soltanto una legge limite, o comunque inesatto. Perciò non v'ha dubbio che la formola di Poisson non debba dar luogo a conseguenze contradditorie al principio d'equivalenza.

Ma quando il Prof. Guglielmo vuol sostenere che la formola di Poisson non si può dimostrare senza premettere la 1ª legge di termodinamica, e che quest'ultima è espressa dalle equazioni (2), io ritengo fermamente ch'egli abbia torto, e mi sembra di aver mostrato abbastanza chiaramente che le sue obiezioni siano mal fondate.

Passo alla Nota 2ª, quella *Sul modo di calcolare l'esperienza di Clément e Desormes.*

L'A., dopo aver esposto il suo metodo, dedica una gran parte della sua Nota a ribattere alcune obiezioni, che non si sa donde provengano; egli cita in qualche luogo alcune parole del suo contradditore, senza dire chi sia e dove le abbia scritte. Per chiarire questo punto dirò dunque che il Prof. Guglielmo intende riferirsi alle osservazioni che io gli feci colle mie Note ai Lincei, sopracitate, e specialmente nella 1ª e 3ª. Ben inteso che ne riporta soltanto qualcheduna che crede di poter meglio confutare. Ma il curioso è che, dopo avere in questa nuova Nota modificato la spiegazione del suo metodo di calcolo nel senso che io gli avevo indicato, ciononostante persiste a voler combattere la mia critica.

Nella sua Nota 1ª (ai Lincei) egli aveva voluto dimostrare che dall'esperienza di Clément e Desormes si può dedurre il rapporto k senza far uso nè della legge di Poisson, nè della 1ª legge di termodinamica. In quella Nota egli scriveva senz'altro la formola

$$c_p (1 - \partial T) = c_v \tag{1}$$

senza accennare menomamente alle quantità di calore equivalenti ai lavori esterni; egli inoltre diceva chiaramente che il gas, dopo essersi riscaldato di 1° a volume costante, si espandeva *adiabaticamente*. Tutto il discorso conduceva a ritenere la formola (1) come esatta; l'approssimazione appariva soltanto in seguito nel calcolo della variazione di temperatura ∂T coi dati ricavati dall'esperienza.

La mia critica si riduceva ad osservare che il ragionamento era incompleto; per completarlo bisognava tener conto dei lavori esterni e per conseguenza ricorrere al 1° principio; ciò che era contrario all'intenzione dell'A. Soggiungevo che la formola (1), quantunque inesatta, poteva all'A. esser sembrata corrispondente al vero, per essersi egli limitato a considerare nell'esperimento supposto il riscaldamento di 1°; allora la piccolissima differenza fra il lavoro di espansione adiabatica e quello di espansione isobarica fa sì che il risultato numerico sia assai prossimo al vero.

Ora il Prof. Guglielmo corregge precisamente la sua dimostrazione seguendo il mio suggerimento; dice che vuol limitarsi a considerare il caso di variazioni piccolissime, tanto piccole da poter ritenere trascurabile la differenza fra i due suddetti lavori. Presenta quindi la sua formola (1) non più come esatta, ma come approssimata.

Senonchè mostra di pretendere che queste varianti si dovevano sottintendere, come evidenti, e fra le altre noto la seguente: nel descrivere l'esperimento dice che il gas, dopo essere stato scaldato a volume costante, si lascia dilatare *molto rapidamente*; mentre prima aveva detto *adiabaticamente*. La variante non può aver altro scopo che di avvertire che la trasformazione può non essere adiabatica, e quindi sarebbe un errore ragionare come se fosse adiabatica. Ma subito dopo è detto che la quantità di calore spesa nelle prime due fasi dell'esperimento è soltanto c_v; dunque necessariamente nella seconda fase la trasformazione deve essere adiabatica; se no ci sarebbero altri scambi di calore e la cosa si complicherebbe.

Qui e anche in altro luogo della sua Nota il Prof. Guglielmo osserva giustamente che nell'esperimento effettivo l'espansione non è mai adiabatica genuina, ma solo approssimata, per ragioni notissime. Ma tutto questo discorso non fa che confer-

mare quanto io dissi fin da principio, perchè io non ho mai messo in dubbio che la formola (1) nelle condizioni ora supposte dia una buona approssimazione.

Il dire poi (pag. 197) che la mia obiezione, contro quella prima dimostrazione, si farebbe svanire del tutto col semplice artifizio di considerare un riscaldamento infinitesimo, non ha senso, trattandosi di stabilire la formola per calcolare un esperimento effettivo, il quale si ridurrebbe a star a guardare un pallone pieno di un gas che non si espande, che non si restringe, non cambia di temperatura, non riceve calore e non ne perde; da un esperimento simile non pare che si possano ricavare elementi per determinare il rapporto k.

L'A. volendo dimostrare con altri argomenti che il suo modo di ragionare è giusto, dice che, sebbene egli per semplificare la dimostrazione creda opportuno di considerare una trasformazione piccolissima, ciò non esclude che si possa ottenere il rapporto k anche considerando trasformazioni non piccole, tenendo conto dell'equivalenza.

A prima giunta non si vede perchè l'A. trovi il bisogno di ricordare in questa occasione una cosa notissima; ma la spiegazione si trova alla fine, dove, appena scritta la formola che esprime il valore di k, egli fa notare che quello è (pag. 203) *lo stesso valore che si ottiene col calcolo di Poisson*. Pare dunque che egli creda di aver trovato quella formola senza servirsi della legge di Poisson; dico *pare*, perchè se non fosse così, non si comprenderebbe la ragione di esporre in questo punto una dimostrazione prolissa e inutile, mentre egli stesso aveva riprodotto nella sua Nota 1ª la semplicissima dimostrazione basata sulla formola di Poisson.

Dunque, ripeto, si deve ritenere che qui l'A. ha creduto di non essersi servito della formola di Poisson. Ora ciò è davvero sorprendente, perchè egli calcola il lavoro esterno nella trasformazione adiabatica servendosi appunto della legge di Poisson; chè altro non è il sostituire al volume specifico v la espressione $p_2^{1/k} v_2 p^{-1/k}$, come egli fa a pagina 202.

Dopo ciò l'A. soggiunge che questo modo di ottenere k è più semplice di quello prima esposto, ma suppone che sia già nota l'equivalenza fra calore e lavoro; e qui c'è un doppio equivoco.

Quando nel primo calcolo si considerano come uguali prossimamente i due lavori esterni (adiabatico e isobarico), l'A. crede che ciò non implichi la conoscenza del principio d'equivalenza. A mio parere questo è un equivoco. Quei lavori dovrebbero entrare nel computo precisamente perchè equivalenti a quantità di calore, e il ragionamento per cui si conclude che si possono ritenere eguali con molta approssimazione (s'intende le quantità di calore corrispondenti ai lavori) per essere legittimo deve presupporre l'equivalenza fra calore e lavoro.

Al contrario quando l'A. dice che il calcolo fatto colla formola di Poisson suppone che sia già nota l'equivalenza fra calore e lavoro, ricade nel solito equivoco relativo a quella formola.

Nell'ultima parte della Nota calcola l'equivalente meccanico E coi dati forniti dall'esperimento di Clément e Desormes, e mostra che il suo metodo conduce alla formola (c) (pag. 210), che è la relazione esatta fra i calori specifici e l'equivalente E.

Ora, sebbene l'A. abbia voluto spiegare qui il suo metodo più ampiamente che nella sua 1ª Nota (quella che io avevo criticata), io trovo sempre che la spiegazione non persuade. Egli calcola il lavoro speso per comprimere il gas come se la trasformazione fosse a pressione costante, e il calore equivalente come se si trattasse del lavoro in una trasformazione adiabatica; trova perciò una espressione di E approssimata. Approfitta poi di un'altra espressione approssimata che dà il rapporto k, e combinando le due trova la formola esatta che dà il valore di E. Ma se non si sapesse prima qual'è la formola esatta, non si avrebbe alcun indizio per riconoscere che le due approssimazioni si debbano compensare esattamente.

L'Accademico Segretario
CARLO FABRIZIO PARONA

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona. Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di **C. Frati**, **A. Baudi di Vesme** e **C. Cipolla.**

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in-f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di **C. Cipolla**, **G. De Sanctis** e **P. Fedele.**

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in-4°, di 70 pagg. e 96 tav.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza del 2 Dicembre 1917 . *Pag.* 59

Pensa (Angelo). — Sull'operatore omografico R′ . . . „ 63

Grassi (Guido). — A proposito di due Note del Prof. Guglielmo: " Sulla legge di Poisson e sull'esperienza di Clément e Desormes „ „ 76

Tip. Vincenzo Bona - Torino

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. LIII, DISP. **3a**, **1917-1918**.

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 3.
1918

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 16 Dicembre 1917.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE ENRICO D'OVIDIO
DIRETTORE DELLA CLASSE

Sono presenti i Soci Naccari, Segre, Peano, Jadanza, Guareschi, Guidi, Mattirolo, Grassi, Somigliana e Parona Segretario.

Scusano l'assenza il Vice Presidente Senatore Chironi e i Soci Salvadori e Panetti.

Si legge e si approva il verbale della precedente adunanza.

Si comunicano le lettere delle Signore Vedova Carle e Vedova Camerano, che ringraziano delle condoglianze espresse dalla Presidenza.

Il Socio Mattirolo ricorda all'Accademia, come nel venturo mese di febbraio Hugo de Vries, compiendo il suo 70° anno di età, sia obbligato dalla Legge Olandese a ritirarsi dall'insegnamento ufficiale, e come gli scienziati olandesi abbiano deliberato di rendergli onore in tale occasione con manifestazioni di carattere internazionale. Il Socio Mattirolo, ricordando le insigni benemerenze di questo scienziato eminente in tutti i campi delle scienze naturali, propone che anche l'Accademia nostra prenda parte a tali onoranze con l'invio di un indirizzo che gli rechi l'omaggio del nostro antico sodalizio. Il Prof. Guareschi appoggia la proposta Mattirolo, facendo altresì osservare come i lavori di De Vries abbiano giovato anche alle discipline chimiche e servito alle ricerche di Vant'Hoff.

Il Presidente ringrazia dell'opportuna proposta, e si delibera che la Presidenza si accorderà col Socio Mattirolo sul modo migliore per attuarla.

Il Segretario comunica che il Socio Salvadori ha risposto che, pur ringraziando la Classe, non può assolutamente per motivi di salute assumersi l'impegno di commemorare il nostro compianto ed illustre Presidente Senatore Camerano. La Classe prende atto a malincuore della risposta, e, dopo uno scambio di idee fra i Soci, delibera di rinviare ad altra adunanza la scelta del collega in sostituzione del Socio Salvadori.

Presentano per la stampa negli atti:

Il Socio Peano: due Note, l'una del Prof. C. Burali-Forti, *Alcuni sistemi di linee su di una superficie*, l'altra del Dott. Ernesto Boverio, *Sopra la derivazione dei canali.*

Il Socio D'Ovidio: una Nota del Prof. Gustavo Sannia, *Le serie di potenze di una variabile sommate col metodo di Borel generalizzato* (I).

Il Socio Guidi: la sua Nota *Sul calcolo dell'arco elastico senza cerniere.*

Il Socio Grassi: una Nota del Sig. A. G. Rossi, *Un trasformatore dinamico per correnti alternate* (IV).

LETTURE

Alcuni sistemi di linee su di una superficie.

Nota di C. BURALI-FORTI.

Conservo le notazioni della mia memoria *Fondamenti per la geometria differenziale su di una superficie* [" Rend. Palermo ", T. XXXIII (1912)] che citerò con la lettera M.

L'omografia $2\sigma - I_1\sigma$.

1. — Nelle ricerche seguenti si presenterà spesso l'omografia vettoriale $2\sigma - I_1\sigma$ (essendo $\sigma = d\boldsymbol{N}/dP$, cfr. M.) e sarà utile enunciarne subito le proprietà principali.

(1) $K(2\sigma - I_1\sigma) = 2\sigma - I_1\sigma$, (1′) $V(2\sigma - I_1\sigma) = 0$,

(2) $I_1(2\sigma - I_1\sigma) = - I_1\sigma$, (2′) $C(2\sigma - I_1\sigma) = - 2\sigma$,

(2″) $2\sigma - I_1\sigma = - 2C^{-1}\sigma$,

(2_1) $I_2(2\sigma - I_1\sigma) = 4I_2\sigma - (I_1\sigma)^2 = -(\mathcal{N}_1 - \mathcal{N}_2)^2$,

($2_1'$) $I_3(2\sigma - I_1\sigma) = I_1\sigma \,.\, (\mathcal{N}_1 - \mathcal{N}_2)^2$,

(3) $(2\sigma - I_1\sigma)^2 = (I_1\sigma)^2 - 4I_2\sigma + 4I_2\sigma \,.\, H(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{N}) =$
$= (\mathcal{N}_1 - \mathcal{N}_2)^2 + 4\mathcal{N}_1\mathcal{N}_2 \,.\, H(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{N})$,

(3′) $\}(2\sigma - I_1\sigma)x\{^2 = (\mathcal{N}_1 - \mathcal{N}_2)^2 \,.\, x^2$, per x vettore normale ad $\boldsymbol{N}$,

(4) $R(2\sigma - I_1\sigma) = I_1\sigma \,.\, (2\sigma - I_1\sigma) + 4I_2\sigma \,.\, H(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{N})$,

(5) $(2\sigma - I_1\sigma)(\boldsymbol{N} \wedge x) = - \boldsymbol{N} \wedge (2\sigma - I_1\sigma)x$, per x vettore arbitrario.

essendo $\mathcal{N}_1$, $\mathcal{N}_2$ le *curvature normali* nelle *direzioni principali* del punto generico P della superficie. Supporremo sempre che si abbia $\mathcal{N}_1 \gtreqless \mathcal{N}_2$.

Dall'algoritmo sviluppato in A. V. G., vol. I [*Analyse vectorielle générale* di C. BURALI-FORTI e R. MARCOLONGO, Mattei, Pavia] e da M. risultano in modo ovvio le sette formule (1), (2). La (2'') esprime che $2\sigma - I_1\sigma$ vale $-2C^{-1}\sigma$, ma è più comoda la notazione esplicita $2\sigma - I_1\sigma$.

La prima forma della (3) risulta subito effettuando il quadrato e tenendo presente la nota espressione di σ^2 [M., n. 5, (6)]. La seconda forma si ottiene ricordando che [M., n. 27, (2)]

$$\mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_2 = I_1\sigma, \ \mathcal{N}_1\mathcal{N}_2 = I_2\sigma.$$

Per ottenere la (4) basta osservare che per m numero e α omografia si ha facilmente

$$R(m+\alpha) = m^2 + m\mathrm{CK}\alpha + R\alpha$$

e tener conto [M., n. 5, (5)] della espressione di $R\sigma$.

Per la (5) si ha successivamente [A. V. G., vol. I, p. 36; M., n. 5, (2)]

$$\begin{aligned}(2\sigma - I_1\sigma)(\boldsymbol{N}\wedge x) &= \boldsymbol{N}\wedge \mathrm{C}(2\sigma - I_1\sigma)x - \{(2\sigma - I_1\sigma)\boldsymbol{N}\}\wedge x \\ &= -2\boldsymbol{N}\wedge\sigma x + I_1\sigma.\boldsymbol{N}\wedge x = -\boldsymbol{N}\wedge(2\sigma - I_1\sigma)x.\end{aligned}$$

Giova tener presente, come risulta dalla $(2_1')$, che $2\sigma - I_1\sigma$ è omogr. degenere solamente quando la superficie considerata è una *sfera* o un *piano* ($\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_2$ in tutto il campo), oppure è di *area minima* ($I_1\sigma = 0$) o negli ombelichi.

Doppi sistemi di linee, di equazioni differenziali $dP \times \alpha dP = 0$, $dP \wedge \alpha dP = 0$.

2. TEOR. 1°. — *Se α è omografia vettoriale funzione del punto generico P variabile comunque in una superficie, allora la equazione differenziale*

$$(a) \qquad dP \times \alpha dP = 0$$

individua due sistemi reali ∞^1 di linee sulla superficie solamente quando

$$(a') \qquad \boldsymbol{N} \times \mathrm{RD}\alpha\boldsymbol{N} \gtreqless 0$$

in ogni punto P della superficie.

Esprimendo P in funzione di due variabili numeriche u, v, osservando che $dP \times \alpha dP = 0$ equivale a $dP \times \mathrm{D}\alpha dP = 0$ e che $dP = P'_u du + P'_v . dv$ [M., § IX] si ha

$$dP \times \mathrm{D}\alpha dP = P'_u \times \mathrm{D}\alpha P'_u . du^2 + 2 P'_u \times \mathrm{D}\alpha P'_v . du\, dv + \\ + P'_v \times \mathrm{D}\alpha dP'_v . dv^2 = 0$$

che da per du/dv valori reali solamente quando

$$\begin{vmatrix} P'_u \times \mathrm{D}\alpha P'_v, & P'_u \times \mathrm{D}\alpha P'_u \\ P'_v \times \mathrm{D}\alpha P'_v, & P'_v \times \mathrm{D}\alpha P'_u \end{vmatrix} = (P'_u \wedge P'_v) \times \mathrm{R}\mathrm{D}\alpha (P'_v \wedge P'_u) \gtreqless 0;$$

ma $P'_u \wedge P'_v$ è parallelo ad $\boldsymbol{N}$ e quindi la condizione (a') è dimostrata.

Teor. 2°. — *Se α è omogr. vett. funzione di P sulla superficie ed è tale che $\boldsymbol{N} \wedge \mathrm{K}\alpha \boldsymbol{N} = 0$ in tutto il campo (il che equivale a $\boldsymbol{N} \times \alpha dP = 0$ per dP arbitrario), allora la equaz. diff.*

$$(b) \qquad dP \wedge \alpha dP = 0$$

individua due sistemi reali ∞^1 di linee sulla superficie solamente quando

$$(b') \qquad \boldsymbol{N} \times \mathrm{R} \,\}\, \boldsymbol{N} \wedge (2\alpha - \mathrm{I}_1\alpha) + (\alpha \boldsymbol{N}) \wedge \{\, \boldsymbol{N} \gtreqless 0$$

in tutto il campo di variazione di P.

Essendo dP ed αdP normali ad $\boldsymbol{N}$ (condizione $\boldsymbol{N} \wedge \mathrm{K}\alpha\boldsymbol{N} = 0$), la condizione (b) equivale ad $\boldsymbol{N} \times dP \wedge \alpha dP = 0$, cioè a $dP \times (\boldsymbol{N} \wedge \alpha) dP = 0$. Siamo così ricondotti al Teor. 1° cambiando α in $\boldsymbol{N} \wedge \alpha$. Osservando [A. V. G.] che

$$\mathrm{D}(\boldsymbol{N} \wedge \alpha) = \boldsymbol{N} \wedge \alpha - \}\, \mathrm{V}(\boldsymbol{N} \wedge \alpha) \,\{ \wedge = \boldsymbol{N} \wedge \alpha - \frac{1}{2} (\mathrm{C}\alpha \boldsymbol{N}) \wedge = \\ = \frac{1}{2} \}\, 2 \boldsymbol{N} \wedge \alpha - \mathrm{I}_1 \alpha . \boldsymbol{N} + (\alpha \boldsymbol{N}) \wedge \{ = \\ = \frac{1}{2} \}\, \boldsymbol{N} \wedge (2\alpha - \mathrm{I}_1\alpha) + (\alpha \boldsymbol{N}) \wedge \{$$

dalla condizione (a') risulta subito la (b') (*).

(*) Nella equazione $dP \wedge \sigma dP = 0$ delle *linee di curvatura* si ha $\alpha = \sigma$ che soddisfa alla ipotesi $\boldsymbol{N} \wedge \mathrm{K}\sigma \boldsymbol{N} = 0$, perchè $\sigma \boldsymbol{N} = 0$ e $\mathrm{K}\sigma = \sigma$, e soddisfa pure alla (b'). Invero si ha
$\mathrm{R} \,\}\, \boldsymbol{N} \wedge (2\sigma - \mathrm{I}_1\sigma) + (\sigma \boldsymbol{N}) \wedge \{\, \boldsymbol{N} = \mathrm{H}(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{N})\, \mathrm{R}(2\sigma - \mathrm{I}_1\sigma) \boldsymbol{N} = -(\mathfrak{K}_1 - \mathfrak{K}_2)^2 \boldsymbol{N}$.

3. — Siccome per la *curvatura normale* $\mathcal{N}$ e per la *torsione geodetica* $\mathcal{T}$ nella direzione dP si ha [M., n. 18, (1)]

$$dP \times \sigma dP = \mathcal{N}\,(dP)^2,$$
$$\boldsymbol{N} \times dP \wedge \sigma dP = -\,dP \times (\boldsymbol{N} \wedge \sigma)\, dP = \mathcal{T}\,(dP)^2,$$

risulta subito che:

Le equazioni differenziali dei doppi sistemi ∞^1 *di linee aventi curvatura normale* $\mathcal{N}$ *o torsione geodetica* $\mathcal{T}$, *sono rispettivamente*

$$(6) \qquad dP \times (\sigma - \mathcal{N})\, dP = 0\,, \qquad dP \times (\mathcal{T} + \boldsymbol{N} \wedge \sigma)\, dP = 0.$$

Per queste le condizioni (a'), (b') del n. 2 assumono, dópo un calcolo ovvio (cfr. formule precedenti e M.), rispettivamente, le forme

$$(6') \qquad (\mathcal{N} - \mathcal{N}_1)(\mathcal{N} - \mathcal{N}_2) \lesseqgtr 0\,, \qquad \mathcal{T}^2 \lesseqgtr (\mathcal{N}_1 - \mathcal{N}_2)^2/4 \text{ (*)},$$

vale a dire, come è ben noto [M., n. 24, (2) per $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ direzioni principali], $\mathcal{N}$ *può variare da* $\mathcal{N}_1$ *ad* $\mathcal{N}_2$ e $\mathcal{T}$ *può variare, in valore assoluto, da* 0 *a* $(\mathcal{N}_1 - \mathcal{N}_2)/2$ [Per la relazione $\mathcal{N}^2 + \mathcal{T}^2 = \mathcal{N}\,\mathrm{I}_1\sigma - \mathrm{I}_2\sigma$ tra $\mathcal{N}$ e $\mathcal{T}$ in una stessa direzione, cfr. M., n. 20, (2), (3)].

Per $\mathcal{N} = 0$ e $\mathcal{N} = 2\mathrm{I}_2\sigma/\mathrm{I}_1\sigma$ si hanno le *assintotiche* e le *caratteristiche* (tangenti, in P generico, ai due diametri coniugati di egual lunghezza della indicatrice di Dupin), che, per la (6′), esistono, rispettivamente, quando $\mathrm{I}_2\sigma \lesseqgtr 0$, $\mathrm{I}_2\sigma \gtreqless 0$. Per $\mathcal{N} = \mathrm{I}_1\sigma/2$ si hanno le linee che bisecano, in ogni punto P, le linee di curvatura e per la (6′) esistono sempre (per la superficie di *area minima*, $\mathrm{I}_1\sigma = 0$, sono le *assintotiche*). Per $\mathcal{T} = 0$ e $\mathcal{T} = (\mathcal{N}_1 - \mathcal{N}_2)/2$ si hanno di nuovo le linee di curvatura e le loro bisettrici, sempre esistenti (**).

(*) Per la prima delle (6) si ha $\mathrm{R}(\sigma - \mathcal{N}) = \mathrm{R}\sigma - \mathcal{N}\,.\,\mathrm{C}\sigma + \mathcal{N}^2$ e quindi $\boldsymbol{N} \times \mathrm{R}(\sigma - \mathcal{N})\,\boldsymbol{N} = \mathcal{N}^2 - \mathrm{I}_1\sigma\,.\,\boldsymbol{N} + \mathrm{I}_2\sigma = (\mathcal{N} - \mathcal{N}_1)(\mathcal{N} - \mathcal{N}_2)$. Per la seconda

$$\mathrm{RD}(\mathcal{T} + \boldsymbol{N} \wedge \sigma) = \mathrm{R}\left\{ \mathcal{T} + \frac{1}{2}\boldsymbol{N}\wedge\,(2\sigma - \mathrm{I}_1\sigma) \right\}$$
$$= \mathcal{T}^2 + \frac{1}{2}\,\mathcal{T}\,.\,(2\sigma - \mathrm{I}_1\sigma)\,.\,\boldsymbol{N}\wedge + \frac{1}{4}\,\mathrm{H}(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{N})\,.\,\mathrm{R}(2\sigma - \mathrm{I}_1\sigma);$$
$$\boldsymbol{N} \times \mathrm{RD}\,(\mathcal{T} + \boldsymbol{N}\wedge\sigma)\,\boldsymbol{N} = \mathcal{T}^2 - (\mathcal{N}_1 - \mathcal{N}_2)^2/4.$$

(**) Si noti che per $\mathcal{N} = \mathrm{I}_1\sigma/2$ e $\mathcal{N} = 2\mathrm{I}_2\sigma/\mathrm{I}_1\sigma$ la prima delle (6) diviene $dP \times (2\sigma - \mathrm{I}_1\sigma)\, dP = 0$, $\quad dP \times (\mathrm{I}_1\sigma\,.\,\sigma - 2\mathrm{I}_2\sigma)\, dP = dP \times (\sigma^2 - \mathrm{I}_2\sigma)\, dP = 0.$

4. — Se nel punto generico P si indica con δP uno spostamento normale a dP, allora ponendo sulle (a), (b) del n. 2 $\boldsymbol{N}\wedge\delta P$ al posto di dP si ottengono le equazioni differenziali delle *traiettorie ortogonali* dei doppi sistemi (a), (b). Osservando allora che (tenendo conto delle condizioni poste nei Teoremi del n. 2)

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{N}\wedge\delta P)\times\alpha(\boldsymbol{N}\wedge\delta P) &= (\boldsymbol{N}\wedge\delta P)\times\}\boldsymbol{N}\wedge\mathrm{CK}\alpha\delta P+\delta P\wedge\mathrm{K}\alpha\boldsymbol{N}\{\\ &= \delta P\times\mathrm{CK}\alpha\delta P-\boldsymbol{N}\times\alpha\boldsymbol{N}.(\delta P)^2\\ &= \delta P\times\}\mathrm{C}\alpha-\boldsymbol{N}\times\alpha\boldsymbol{N}\{\delta P,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{N}\wedge\delta P)\wedge\alpha(\boldsymbol{N}\wedge\delta P) &= \ldots = \boldsymbol{N}\times\delta P\wedge\mathrm{CK}\alpha\delta P.\boldsymbol{N}-\\ &-\delta P\times\boldsymbol{N}\wedge\mathrm{K}\alpha\boldsymbol{N}.\delta P=-\boldsymbol{N}\times\delta P\wedge\mathrm{K}\alpha\delta P.\boldsymbol{N}\end{aligned}$$

risulta subito che:

Sotto le condizioni poste nei teor. del n. 2, le equazioni differenziali dei sistemi TRAIETTORIE ORTOGONALI *dei sistemi (a), (b) sono*

$$(a'')\quad \delta P\times(\mathrm{C}\alpha-\boldsymbol{N}\times\alpha\boldsymbol{N})\delta P=0,\qquad (b'')\quad \delta P\wedge\mathrm{K}\alpha\delta P=0\ (*).$$

È chiaro che i sistemi (a), (a'') coincidono, cioè le linee di uno dei sistemi (a) sono le traiettorie ortogonali dell'altro, solamente quando per x vettore arbitrario normale ad $\boldsymbol{N}$ si ha

$$(\mathrm{C}\alpha x-\boldsymbol{N}\times\alpha\boldsymbol{N}.x)\wedge\alpha x=0,\ \text{cioè},\ (\mathrm{I}_1\alpha-\boldsymbol{N}\times\alpha\boldsymbol{N})(x\wedge\alpha x)=0,$$

vale a dire:

Escluso il caso che α *sia un numero per i vettori normali ad* $\boldsymbol{N}$, *allora il sistema (a) è* TRAIETTORIA ORTOGONALE DI SE STESSO *solamente quando*

$$\mathrm{I}_1\alpha=\boldsymbol{N}\times\alpha\boldsymbol{N}.$$

(*) Se, ad es., per il sistema (a) si pone $\alpha=\tau+\boldsymbol{N}\wedge\sigma$, sistema delle linee di torsione geodetica τ, si ha

$$\mathrm{I}_1\alpha=3\tau,\qquad \mathrm{C}\alpha=2\tau-\boldsymbol{N}\wedge\sigma,\qquad \boldsymbol{N}\times\alpha\boldsymbol{N}=\tau,$$

e quindi la (a'') diviene

$$\delta P\times(-\tau+\boldsymbol{N}\wedge\sigma)\delta P=0,$$

cioè dà il doppio sistema delle linee di torsione geodetica $-\tau$, come era facile prevedere (teorema di Bonnet). Per $\alpha=2\sigma-\mathrm{I}_1\sigma$ i sistemi (a), (a'') coincidono; come pure per $\alpha=\sigma$ coincidono i sistemi (b), (b'').

Dalla (b'') risulta subito che: *Il sistema* (b) *è traiettoria ortogonale di se stesso solamente quando* α *è una dilatazione* (*).

5. — La questione precedente si può generalizzare. Sia β una omogr. funzione del punto P e tale che $\boldsymbol{N} \wedge \mathrm{K}\beta\boldsymbol{N} = 0$, cioè tale che βdP è normale ad $\boldsymbol{N}$ per dP spostamento arbitrario. In tale ipotesi consideriamo gli spostamenti dP, δP tali che dP sia parallelo a $\beta\delta P$, e i sistemi che si ottengono da (a) e (b) sotto tale condizione. Allora è ovvio che le equazioni differenziali dei sistemi che si ottengono da (a) e (b) nel modo ora indicato sono

$$(a''') \quad \delta P \times \mathrm{K}\beta . \alpha . \beta\delta P = 0 , \qquad (b''') \quad (\beta\delta P) \wedge \alpha\beta\delta P = 0.$$

Se inoltre si suppone che β non sia degenere, $\mathrm{I}_3\beta \neq 0$, allora operando nella (b''') con $\mathrm{RRK}\beta$ la (b''') assume la forma [A. G. V., vol. I, p. 38, (4)]

$$(b_1''') \quad \delta P \wedge \mathrm{RK}\beta . \alpha . \beta\delta P = 0.$$

Per $\beta = \boldsymbol{N}\wedge$ dalle (a'''), (b''') risultano ancora le (a''), (b'').

Per θ numero costante e $\beta = \cos\theta + \operatorname{sen}\theta . \boldsymbol{N}\wedge$ le (a'''), (b''') dànno le *traiettorie sotto l'angolo* θ dei sistemi doppi (a), (b). Ma si può supporre θ funzione di P e allora in ogni punto P della superficie si hanno linee che si tagliano sotto un angolo θ dipendente dalla posizione del punto P (**).

(*) Le due condizioni ora considerate sono, ad es., verificate, rispettivamente, per $\alpha = 2\sigma - \mathrm{I}_1\sigma$ e per $\alpha = \sigma$, come deve avvenire.

(**) Giova notare che questi risultati non possono esser dati in modo semplice ed esplicito dall'ordinario metodo analitico, poichè questo non ha le omografie σ, $\boldsymbol{N}\wedge$, ... o, almeno, le contiene sotto forma complessa di invarianti dipendenti dalle due *forme differenziali*, che, naturalmente, non intervengono nel nostro calcolo assoluto.

Direzioni isocline od isogone (*).

6. — Diremo che due direzioni normali ad $\boldsymbol{N}$ sono *isocline* od *isogone* quando esse sono *simmetriche*, o alle *direzioni principali* in P, ovvero alle *bisettrici delle direzioni principali.*

È noto che due direzioni normali ad $\boldsymbol{N}$ sono isocline od isogone solamente quando, in quelle direzioni, sono *eguali* le *curvature normali* ovvero le *torsioni geodetiche* (**).

Siano ora x, y vettori *unitari* (il che toglie nulla alla generalità) normali ad $\boldsymbol{N}$. La condizione di eguaglianza delle curvature normali nelle direzioni di x ed y è [M., n. 18, (1)]

$$(\alpha') \qquad \mathcal{N}_x = \mathcal{N}_y : = : x \times \sigma x - y \times \sigma y = 0;$$

ma si ha, osservando che $x \times \sigma y = y \times \sigma x$, perchè σ è dilatazione,

$$x \times \sigma x - y \times \sigma y = x \wedge y \times (x \wedge \sigma y) + x \wedge y \times (y \wedge \sigma x);$$

(*) Queste denominazioni abbreviative sono state introdotte da G. Sannia e R. Occhipinti, "Rend. Palermo", T. XXV, pp. 283-290 e T. XXXVI, pp. 29-34.

Le relazioni tra due spostamenti dP, δP isoclini od isogoni sono, sotto forma assoluta,

$$\boldsymbol{N} \times \delta P \wedge (2\sigma - I_1\sigma)\, dP = 0, \qquad \delta P \times (2\sigma - I_1\sigma)\, dP = 0$$

che, come vedremo, permettono di esprimere δP in funzione di dP e risolvere varie questioni geometriche. Le precedenti relazioni sono date, dai citati autori, sotto la solita forma analitica, mediante E, F, G, D, D', D'', che non permette di separare δu, δv da du, dv, cioè δP da dP; vien risoluto il problema analitico, determinare l'equazione differenziale cui soddisfano le coordinate del punto generico P in funzione di coordinate u, v isocline od isogone.

(**) Se φ è l'angolo che una direzione fa con una direzione principale, allora [M., n. 24]

$$\mathcal{N} = (\mathcal{N}_1 - \mathcal{N}_2)\cos^2\varphi + \mathcal{N}_2, \qquad \mathcal{T} = (\mathcal{N}_2 - \mathcal{N}_1)\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi,$$

e di qui si deduce subito quanto abbiamo affermato.

e poichè $x \wedge y$ è parallelo ad $\boldsymbol{N}$, come $x \wedge \sigma y$ ed $y \wedge \sigma x$, la condizione (α') diviene

$$(\alpha) \qquad \mathcal{N}_x = \mathcal{N}_y : = : x \wedge \sigma y + y \wedge \sigma x = 0.$$

Notando ora che [A. V. G., vol. I, p. 36]

$$0 = \sigma(x \wedge y) = - x \wedge \sigma y - y \wedge \mathrm{C}\sigma x, \text{ cioè, } x \wedge \sigma y = - y \wedge \mathrm{C}\sigma x$$

la (α) diviene

$$(7) \qquad \mathcal{N}_x = \mathcal{N}_y : = : y \wedge (2\sigma - \mathrm{I}_1\sigma)\, x = 0$$

Basta osservare che se le direzioni di x e y sono *isocline*, le direzioni di $\boldsymbol{N} \wedge x$ ed y, ovvero di x ed $\boldsymbol{N} \wedge y$, sono *isogone*, per concludere che:

$$(8) \qquad \mathcal{T}_x = \mathcal{T}_y : = : y \times (2\sigma - \mathrm{I}_1\sigma)\, x = 0 \quad (*)$$

e si ha quindi il teorema:

Le omografie $2\sigma - \mathrm{I}_1\sigma$, $\boldsymbol{N} \wedge (2\sigma - \mathrm{I}_1\sigma)$, *e soltanto queste e le loro multiple, applicate ad una direzione (vettore) normale ad* $\boldsymbol{N}$ *producono la direzione* ISOCLINA *od* ISOGONA *rispettivamente.*

Se x, y sono vettori unitari normali ad $\boldsymbol{N}$, allora dalla (3') e dalle (7), (8) risulta che: y *è l'isoclino o l'isogono di* x, *e viceversa, solamente quando*

$$(9) \qquad y = \pm \frac{1}{\mathcal{N}_1 - \mathcal{N}_2} (2\sigma - \mathrm{I}_1\sigma)\, x,$$

o anche

$$x = \pm \frac{1}{\mathcal{N}_1 - \mathcal{N}_2} (2\sigma - \mathrm{I}_1\sigma)\, y,$$

(*) Come corrispondente della (α) si ha

$$\mathcal{T}_x = \mathcal{T}_y : = : \boldsymbol{N} \times x \wedge \sigma x - \boldsymbol{N} \times y \wedge \sigma y = 0 : = : x \wedge \sigma x - y \wedge \sigma y = 0$$

cui si può dare la forma (8) osservando che [*M.*, n. 24, (2) riferendosi alle direzioni principali e n. 27]

$$\mathcal{T}_x = \mathcal{T}_y : = : \mathcal{N}_x + \mathcal{N}_y = \mathrm{I}_1\sigma$$

e che

$$x \wedge y \times \{ x \wedge \sigma x - y \wedge \sigma y \} = 2 y \times \sigma x - (\mathcal{N}_x + \mathcal{N}_y)\, x \times y = y \times (2\sigma - \mathcal{N}_x - \mathcal{N}_y)\, x.$$

(10) $$y = \pm \frac{1}{\mathcal{N}_1 - \mathcal{N}_2} \boldsymbol{N} \wedge (2\sigma - \mathrm{I}_1\sigma)\, x,$$

o anche

$$y = \pm \frac{1}{\mathcal{N}_1 - \mathcal{N}_2} \boldsymbol{N} \wedge (2\sigma - \mathrm{I}_1\sigma)\, y \text{ (*)}.$$

7. — La *direzione coniugata* di x, normale ad $\boldsymbol{N}$, è [M., n. 29] $\boldsymbol{N} \wedge \sigma x$; quindi la direzione *isoclina* od *isogona* di x sarà pure coniugata alla direzione x solamente quando, rispettivamente,

$$(\boldsymbol{N} \wedge \sigma x) \wedge (2\sigma - \mathrm{I}_1\sigma)\, x = 0, \quad (\boldsymbol{N} \wedge \sigma x) \wedge \{ \boldsymbol{N} \wedge (2\sigma - \mathrm{I}_1\sigma)\, x \} = 0,$$

vale a dire, sviluppando,

$$(\sigma x) \times (2\sigma - \mathrm{I}_1\sigma)\, x = 0, \quad \boldsymbol{N} \times (\sigma x) \wedge (2\sigma - \mathrm{I}_1\sigma)\, x = 0,$$

ovvero sviluppando e tenendo presenti [M.] le espressioni di σ^2, $\mathcal{N}_x$, $\mathcal{T}_x$ e supposto, per semplicità, $x^2 = 1$

$$\mathcal{N}_x = 2\mathrm{I}_2\sigma / \mathrm{I}_1\sigma, \qquad \mathrm{I}_1\sigma \,.\, \mathcal{T}_x = 0;$$

in conseguenza si hanno i teoremi:

La direzione ISOCLINA *di x è pure coniugata di x solamente quando x è direzione* CARATTERISTICA. — *La direzione* ISOGONA *di x è pure* CONIUGATA *di x in questi soli casi: la superficie è di* AREA MINIMA $(\mathrm{I}_1\sigma = 0)$ *e allora x è direzione* ARBITRARIA; *la superficie non è di area minima* $(\mathrm{I}_1\sigma \neq 0)$ *e allora x è soltanto* DIREZIONE PRINCIPALE $(\mathcal{T}_x = 0)$.

Se invece si vuole che la *coniugata* della direzione x e la *isoclina* o la *isogona* di x siano *ortogonali*, allora si avrà, rispettivamente,

$$\boldsymbol{N} \wedge \sigma x \times (2\sigma - \mathrm{I}_1\sigma)\, x = 0, \quad \boldsymbol{N} \wedge \sigma x \times \{ \boldsymbol{N} \wedge (2\sigma - \mathrm{I}_1\sigma)\, x \} = 0$$

che sviluppate dànno (cfr. calcolo precedente)

$$\mathrm{I}_1\sigma \,.\, \mathcal{T}_x = 0, \qquad \mathcal{N}_x = 2\mathrm{I}_2\sigma / \mathrm{I}_1\sigma,$$

come era facile prevedere. Si possono enunciare due teoremi analoghi ai precedenti.

(*) In virtù della (3) si passa dalla 1ª alla 2ª forma della (9), (10) o viceversa, applicando $2\sigma - \mathrm{I}_1\sigma$ ai due membri.

8. — Se φ è l'angolo che il vettore (unitario) x normale ad $\boldsymbol{N}$ fa col vettore *isoclino* od *isogono*, per la (3') si ha subito

$$x \times (2\sigma - \mathrm{I}_1\sigma)\, x = (\mathcal{N}_1 - \mathcal{N}_2) \cos\varphi\,,$$
$$x \times \boldsymbol{N} \wedge (2\sigma - \mathrm{I}_1\sigma)\, x = (\mathcal{N}_1 - \mathcal{N}_2) \cos\varphi$$

da cui sviluppando:

$$(11) \qquad 2\mathcal{N}_x = (\mathcal{N}_1 - \mathcal{N}_2) \cos\varphi\,, \qquad 2\mathcal{T}_x = (\mathcal{N}_1 - \mathcal{N}_2) \cos\varphi.$$

Per $\varphi = \pi/2$ si ha $\mathcal{N}_x = \mathrm{I}_1\sigma/2$, $\mathcal{T}_x = 0$, cioè: *x è parallelo alle bisettrici delle direzioni coniugate (per le isocline) ovvero è parallelo alle direzioni principali (per le isogone) affinchè esso sia normale al suo isoclino od isogono,* come era facile prevedere.

Per φ arbitrario le (11) determinano $\mathcal{N}_x$ e $\mathcal{T}_x$, nei due casi, e quindi [M.] anche le direzioni x che formano con l'isoclina o l'isogona l'angolo φ dato.

Le (11) risolute rispetto a $\cos\varphi$ dànno l'angolo che x, dato, fa con la direzione isoclina od isogona. Calcolato $\mathrm{sen}\,\varphi$ indi $\cos(\varphi/2)$ ovvero $\mathrm{sen}(\varphi/2)$ si ha pure l'angolo, $\varphi/2$, che x fa con le direzioni principali o con le loro bisettrici; non scriviamo tali formule, che si ottengono in modo ovvio (*).

(*) Accenniamo ad una via indiretta per ottenere i risultati del n. 6. Posto

$$\boldsymbol{y} = \cos\varphi \,.\, x + \mathrm{sen}\,\varphi \,.\, \boldsymbol{N} \wedge x$$

ed osservando che, per essere $\sigma(\boldsymbol{N} \wedge x) = \boldsymbol{N} \wedge \mathrm{C}\sigma x$, si ha

$$\sigma \boldsymbol{y} = \cos\varphi \,.\, \sigma x + \mathrm{sen}\,\varphi\, \boldsymbol{N} \wedge \mathrm{C}\sigma x\,,$$

e con calcolo ovvio abbiamo

$$\mathcal{N}_y = \boldsymbol{y} \times \sigma \boldsymbol{y} = \mathcal{N}_x \cos^2\varphi + (\mathrm{I}_1\sigma - \mathcal{N}_x)\,\mathrm{sen}^2\varphi + 2\,\mathcal{T}_x\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi$$
$$\mathcal{T}_y = \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{y} \wedge \sigma \boldsymbol{y} = \mathcal{T}_x \cos^2\varphi - \mathcal{T}_x\,\mathrm{sen}^2\varphi + (\mathrm{I}_1\sigma - 2\mathcal{N}_x)\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi;$$

quindi perchè si abbia $\mathcal{N}_x = \mathcal{N}_y$, ovvero $\mathcal{T}_x = \mathcal{T}_y$, deve essere

$$\mathrm{tg}\,\varphi = 2\,\mathcal{T}_x/(2\mathcal{N}_x - \mathrm{I}_1\sigma)\,, \qquad \mathrm{tg}\,\varphi = -(2\mathcal{N}_x - \mathrm{I}_1\sigma)/(2\,\mathcal{T}_x).$$

Risulta allora [*M.*, n. 20, (4)], operando soltanto per la prima, ad es.,

$$\boldsymbol{y} = \rho \,\}\, (2\mathcal{N}_x - \mathrm{I}_1\sigma)\, x + 2\,\mathcal{T}_x \,.\, \boldsymbol{N} \wedge x \,\{ = \rho\, [2 \,\}\, \mathcal{N}_x x + \mathcal{T}_x \,.\, \boldsymbol{N} \wedge x \,\{ - \mathrm{I}_1\sigma \,.\, x] =$$
$$= \rho\,(2\sigma - \mathrm{I}_1\sigma)\, x.$$

Ciò conferma intanto che l'omogr. $2\sigma - \mathrm{I}_1\sigma$ dà la direzione isoclina; quadrando e tenendo presente la (3') si ha $\rho^2 (\mathcal{N}_1 - \mathcal{N}_2)^2 = 1$ e si ritrova la (9).

Sistemi isoclini od isogoni.

9. — Siano γ, γ_1 due sistemi ∞^1 di linee della superficie. Diremo che γ e γ_1 sono *isoclini* od *isogoni* quando le direzioni delle tangenti nel punto generico P alle due linee, di γ e γ_1, che passano per P sono *isocline* od *isogone*.

Se $f(dP) = 0$, *essendo* $f(dP)$ *una funzione* OMOGENEA *di* dP, *è la equazione differenziale di un sistema* γ, *allora la equazione diff. del sistema isoclino od isogono di* γ *è*

$$f((2\sigma - I_1\sigma)\,\delta P) = 0\,, \quad \textit{ovvero} \quad f(\boldsymbol{N} \wedge (2\sigma - I_1\sigma)\,\delta P) = 0\,. \tag{12}$$

Ciò risulta immediatamente dalle (9), (10), essendo dP, δP gli spostamenti, in P, lungo γ e γ_1.

Se, come spesso avviene, la equazione $f(dP) = 0$ dà due o più sistemi ∞^1 di linee, allora le (12) dànno pure due o più sistemi ∞^1, che sono gli isoclini o gli isogoni dei primitivi sistemi (*).

10. — *Stando le ipotesi del n. 2, i doppi sistemi* (*a*), (*b*) *hanno per sistemi* ISOCLINI *quelli di equazioni differenziali*

$$\left\{\begin{aligned} &\delta P \times (2\sigma - I_1\sigma)\,\alpha\,(2\sigma - I_1\sigma)\,\delta P = 0\,, \\ &\delta P \wedge (2\sigma - I_1\sigma)\,\alpha\,(2\sigma - I_1\sigma)\,\delta P = 0\,. \end{aligned}\right. \tag{13}$$

(*) Se l'equazione del sistema γ è $\varphi + \text{cost.}$, allora l'equazione del sistema γ_1 è $\psi = \text{cost.}$, con ψ numero (come φ) funzione di P, che resta definito dalla equazione differenziale [M.]

$$\frac{\operatorname{Grad}\psi}{\operatorname{mod}\operatorname{Grad}\psi} = \frac{1}{\mathfrak{N}_1 - \mathfrak{N}_2}\,(2\sigma - I_1\sigma)\,\frac{\operatorname{Grad}\varphi}{\operatorname{mod}\operatorname{Grad}\varphi} \quad \text{(per le \textit{isocline})},$$

$$\frac{\operatorname{Grad}\psi}{\operatorname{mod}\operatorname{Grad}\psi} = \frac{1}{\mathfrak{N}_1 - \mathfrak{N}_2}\,\boldsymbol{N} \wedge (2\sigma - I_1\sigma)\,\frac{\operatorname{Grad}\varphi}{\operatorname{mod}\operatorname{Grad}\varphi} \quad \text{(per le \textit{isogone})}.$$

Queste equazioni sono riduttibili alla forma generica

$$\operatorname{Grad}\psi \times \boldsymbol{N} \wedge \boldsymbol{u} = 0$$

con $\boldsymbol{u}$ vettore funzione di P e normale ad $\boldsymbol{N}$, equaz. diff. lineare del primo ordine, il cui integrale non è, in massima, esprimibile mediante $\boldsymbol{u}$.

Infatti: $\delta P = h(2\sigma - I_1\sigma)\,dP$, sostituendo nelle ($a$), ($b$), applicando alla prima il teorema di commutazione e operando nella seconda con $R(2\sigma - I_1\sigma)$ si ottengono le (13).

Nelle stesse ipotesi ed essendo α *commutabile con* σ, *allora ognuno dei doppi sistemi* (a), (b) *è formato da sistemi isoclini.*

Infatti, essendo $\alpha\sigma = \sigma\alpha$, si ha

$$(2\sigma - I_1\sigma)\,\alpha\,(2\sigma - I_1\sigma)\,\delta P = \alpha\,(2\sigma - I_1\sigma)^2\,\delta P = (\mathcal{N}_1 - \mathcal{N}_2)^2 . \alpha\delta P$$

e le (13) coincidono con le (a), (b).

11. — *Stando le ipotesi del n. 2, i doppi sistemi* (a), (b) *hanno per sistemi* ISOGONI *quelli di equazioni differenziali*

$$(14)\quad \begin{cases} \delta P \times \}(2\sigma - I_1\sigma)(C\alpha - \boldsymbol{N} \times \alpha\boldsymbol{N})(2\sigma - I_1\sigma)\{\,\delta P = 0, \\ \delta P \wedge [\,\}1 + H(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{N})\{\,(2\sigma - I_1\sigma)\,K\alpha\,(2\sigma - I_1\sigma)]\,\delta P = 0. \end{cases}$$

Si deve avere

$$(\alpha)\quad dP = h . \boldsymbol{N} \wedge (2\sigma - I_1\sigma)\delta P, \text{ da cui } \boldsymbol{N} \wedge dP = -h(2\sigma - I_1\sigma)\delta P.$$

Scrivendo (a) sotto la forma $dP \times K\alpha dP = 0$ si ha per il sistema isogono

$$\}\boldsymbol{N} \wedge (2\sigma - I_1\sigma)\delta P\{ \times K\alpha\,\}\boldsymbol{N} \wedge (2\sigma - I_1\sigma)\delta P\{ = 0,$$
$$\}\boldsymbol{N} \wedge (2\sigma - I_1\sigma)\delta P\{ \times \}\boldsymbol{N} \wedge C\alpha.(2\sigma - I_1\sigma) + (2\sigma - I_1\sigma)\delta P \wedge \alpha\boldsymbol{N}\{ = 0,$$
$$(2\sigma - I_1\sigma)\delta P \times C\alpha(2\sigma - I_1\sigma)\delta P - \boldsymbol{N} \times \alpha\boldsymbol{N}.\}(2\sigma - I_1\sigma)\delta P\{^2 = 0,$$

da cui, con un'altra trasformazione ovvia, si ha la prima delle (14).

Essendo, per ipotesi, $\boldsymbol{N} \wedge K\alpha\boldsymbol{N} = 0$, si può alla ($b$) dare la forma $(\boldsymbol{N} \wedge dP) \wedge (\boldsymbol{N} \wedge \alpha dP) = 0$; ma $\boldsymbol{N} \wedge \alpha dP = CK\alpha(\boldsymbol{N} \wedge dP) - (\alpha\boldsymbol{N}) \wedge dP$ e quindi la (b) diviene

$$(\boldsymbol{N} \wedge dP) \wedge \}CK\alpha(\boldsymbol{N} \wedge dP) - (\alpha\boldsymbol{N}) \wedge dP\{ = 0;$$

applicando la seconda (α) al primo termine e la prima al secondo si ha

$$\}(2\sigma - I_1\sigma)\delta P\{ \wedge \}CK\alpha.(2\sigma - I_1\sigma) + (\alpha\boldsymbol{N}) \wedge . \boldsymbol{N} \wedge .(2\sigma - I_1\sigma)\{\delta P = 0,$$
$$\}(2\sigma - I_1\sigma)\delta P\{ \wedge \}K\alpha.(2\sigma - I_1\sigma) + H(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{N}).K\alpha.(2\sigma - I_1\sigma)\{\delta P = 0;$$

operando con $R(2\sigma - I_1\sigma)$ ed osservando che $2\sigma - I_1\sigma$ è commutabile con $H(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{N})$ si ha la seconda (14).

Nelle stesse ipotesi, essendo α *commutabile con* σ *e* $\alpha \boldsymbol{N} = 0$, *allora le* (14) *divengono*

$$(14') \qquad \delta P \times C\alpha\delta P = 0, \qquad \delta P \wedge K\alpha\delta P = 0$$

che dànno i sistemi (*a*), (*b*) *solo per* $I_1\alpha = 0$, $V\alpha = 0$, *rispettivamente.*

Ciò risulta facilmente dalle (14), osservando in particolare che se α è commutabile con σ anche $K\alpha$ è commutabile con σ, perchè operando con K nella condizione $\alpha\sigma = \sigma\alpha$ si ottiene $\sigma . K\alpha = K\alpha . \sigma$.

Osservazione. — Per l'omografia $\alpha = \mathcal{T} + \boldsymbol{N} \wedge \sigma$ (cfr. n. 3) si ha ovviamente

$$I_1\alpha = 3\mathcal{T}, \qquad C\alpha = 2\mathcal{T} - \boldsymbol{N} \wedge \sigma. \qquad \boldsymbol{N} \times \alpha\boldsymbol{N} = \mathcal{T}$$

e per x vettore arbitrario normale ad $\boldsymbol{N}$, pure con calcolo ovvio,

$$(2\sigma - I_1\sigma)\,\alpha\,(2\sigma - I_1\sigma)\,x = -(\mathcal{N}_1 - \mathcal{N}_2)^2(-\mathcal{T} + \boldsymbol{N} \wedge \sigma)\,x,$$
$$(2\sigma - I_1\sigma)(C\alpha - \boldsymbol{N} \times \alpha\boldsymbol{N})(2\sigma - I_1\sigma)\,x = (\mathcal{N}_1 - \mathcal{N}_2)^2(\mathcal{T} + \boldsymbol{N} \wedge \sigma)\,x.$$

Il doppio sistema $dP \times (\mathcal{T} + \boldsymbol{N} \wedge \sigma)\,dP = 0$ formato dalle linee di torsione geodetica $\mathcal{T}$, ha dunque per sistema *isoclino* (cfr. n. 10) il sistema avente $\delta P \times (-\mathcal{T} + \boldsymbol{N} \wedge \sigma)\,\delta P = 0$ per equazione differenziale, come era facile prevedere (teorema di Bonnet), poichè formato dalle linee di torsione geodetica $-\mathcal{T}$.

Invece dalla seconda delle formule precedenti e dalla prima delle (14) del n. 10 risulta che il doppio sistema delle linee di torsione geodetica $\mathcal{T}$ è auto-isogono, come deve ovviamente avvenire. Ne segue, come del resto era evidente *a priori*, che le condizioni di auto-isogonità date nel secondo teorema del n. 11 sono sufficienti, ma *non* necessarie.

Possono essere oggetto di studio interessante le condizioni necessarie e sufficienti cui deve soddisfare α (generica del n. 2) affinchè i sistemi (*a*), (*b*) del n. 2 siano auto-isoclini, auto-isogoni.

La traduzione di tutte le formule di questa Nota in formule dell'algebra-geometrica ordinaria conduce a formule illeggibili, in generale, e quindi non presenta alcun interesse.

Sopra la derivazione dei canali.

Nota del Dott. ERNESTO BOVERIO.

Il Prof. Cisotti, nella Memoria *Sopra la derivazione dei canali*, pubblicata nella " Zeitschrift für Mathematik u. Physik „ (anno 1911, p. 137 e segg.), ha trovato una notevole formula che può venire utilmente applicata quando si tratta di aprire nel fianco di un canale (canale principale) un secondo canale (canale derivato). Egli studia il problema in due dimensioni, con che si ha il notevole vantaggio di poter ricorrere all'ausilio della rappresentazione conforme.

Nella trattazione del problema egli ha applicato il metodo sviluppato dal Levi-Civita nella Memoria *Scie e leggi di resistenza* (" Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo „, anno 1907, t. 23, pagg. 1-37), perciò ne usa gli stessi parametri, alcuni dei quali non hanno relazione diretta con gli elementi del moto da lui studiato.

Recentemente il prof. Boggio, a proposito di un altro problema trattato dal Cisotti (*), *nel quale intervengono soltanto linee libere*, ha fatto vedere, nel lavoro: *Sul problema delle vene confluenti* (" Atti Accademia Scienze Torino „, vol. L, a. 1914-15, pagg. 1103 e segg.), quale partito si potesse trarre dalla considerazione, alla maniera di Kirckhoff, del campo rappresentativo dei vettori velocità delle particelle liquide in moto, e come ciò semplificasse notevolmente la trattazione del problema, facendo anzi intervenire solo dei parametri strettamente attinenti al problema considerato, e nella natura del problema stesso.

In questo mio lavoro applico il procedimento del Professore Boggio al problema sopra citato, studiato dal Cisotti, re-

(*) Cisotti, *Vene confluenti* (" Annali di Matem. „, a. 1915, pp. 285-341).

lativo alla derivazione semplice dei canali, e *nel quale intervengono solo pareti rigide*, mostrando come la trattazione del problema risulti grandemente semplificata. Così, ad es., mentre i parametri del Levi-Civita, usati dal Cisotti, lo portano alla considerazione di una striscia con un taglio, il quale campo è di complicata rappresentazione conforme su un semipiano, col procedimento da me seguìto trovo che il campo rappresentativo dei vettori velocità è un angolo, che, notoriamente, si sa rappresentare in modo semplicissimo su un semipiano.

Inoltre — come pure ha fatto il prof. Boggio circa alcune formule del Cisotti — io trovo che la formula accennata in principio, stabilita dal Cisotti, è conseguenza necessaria dell'ipotesi che la velocità in un certo punto delle pareti rigide è nulla; in tal modo apparisce chiaro anche il significato fisico di tale formula, mentre nel lavoro del Cisotti essa è desunta come conseguenza di calcoli analitici. Per maggior generalità suppongo che il canale principale abbia a valle della derivazione una larghezza diversa che a monte.

In un lavoro successivo tratterò il caso in cui si abbia un numero qualunque di derivazioni.

1. — Posizione del problema.

Immaginiamo un liquido che scorre in un canale rettilineo (canale principale) a sponde verticali ed a fondo orizzontale. Da una delle sponde, ad es., dalla sinistra, si stacchi un secondo canale pure rettilineo (canale derivato). Il moto del liquido (fluido incompressibile, omogeneo, la cui densità costante assumeremo eguale ad 1) sia irrotazionale ed avvenga nei due canali per piani paralleli, orizzontali, senza differenza sensibile dall'uno all'altro di essi; allora basterà studiare quello che avviene nel piano σ di una sezione piana orizzontale. Se si suppone inoltre che il fenomeno abbia carattere di stazionarietà, tutto sarà pure indipendente dal tempo.

La regione S del moto, nel piano σ, è limitata (vedi fig. 1) dai tre pezzi di pareti rigide $\omega, \omega_1 + \mu_1$, $\omega_2 + \mu_2$, essendo $\omega, \omega_1, \omega_2$ le sezioni (fatte col piano σ) delle sponde del canale principale, e μ_1, μ_2 le sezioni delle sponde del canale derivato.

Le pareti rigide e parallele μ_1 e μ_2 si riattaccano a ω_1 e ω_2 rispettivamente nei punti O e B; OB costituisce l'apertura del canale derivato. La sponda ω si estende indefinitamente nei due sensi; ω_1, ω_2 e μ_1, μ_2 si estendono indefinitamente a partire dai punti O e B, come mostra la fig. 1.

La corrente del canale principale proviene dall'infinito (praticamente da distanza abbastanza grande da OB) tra ω e ω_2, fino a che, giunta all'altezza dell'apertura OB del canale derivato si bipartisce: una parte va a formare la corrente del

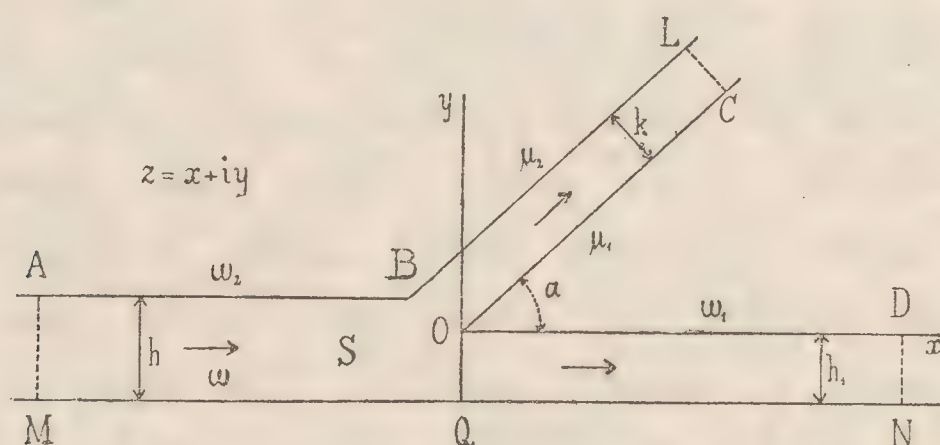



Fig. 1.

canale derivato stesso, e scorre tra μ_1 e μ_2; la rimanente continua a scorrere nell'alveo principale tra ω e ω_1. Il filetto liquido che colpisce in O il profilo rigido $\omega_1 + \mu_1$ rimane momentaneamente arrestato, indi si bipartisce e prosegue scorrendo lungo ω_1 e μ_1. Il filetto liquido che scorre aderente alla parete ω_2, giunto in B cambia bruscamente direzione seguendo la parete rigida μ_2; nel punto B la velocità è infinitamente grande. Tutti gli altri filetti vengono più o meno deviati; nessuno subisce arresti.

Chiamiamo α l'angolo (misurato in radianti) che le sponde del canale derivato, considerate nel verso della corrente, formano con quelle del canale principale, considerate pure nel verso della rispettiva corrente.

Indichiamo poi con h, h_1, k le larghezze, con q, q_1, q_2 le portate, con c, c_1, c_2 le velocità asintotiche rispettivamente nel canale principale a monte e a valle della derivazione, e nel canale derivato.

Tra queste costanti sussistono le evidenti relazioni:

$$(1) \qquad q = ch, \quad q_1 = c_1 h_1, \quad q_2 = c_2 k, \quad q = q_1 + q_2.$$

2. — Equazioni del problema.

Assumiamo nel piano σ del moto una coppia di assi $x\,y$ coll'origine nel punto O della sponda ω_1, l'asse x coincidente con ω_1 e diretto nel senso della corrente, e l'asse y diretto dalla stessa banda, rispetto all'asse x, del canale derivato. Siano u, v le componenti della velocità di un punto generico P; allora, avendo supposto che il moto del liquido sia irrotazionale, esisteranno il potenziale di velocità φ e la funzione di corrente ψ, che sono funzioni uniformi, armoniche, coniugate, legate alle u, v dalle relazioni

$$(2) \qquad d\varphi = u\,dx + v\,dy, \qquad d\psi = -v\,dx + u\,dy,$$

che definiscono φ e ψ ciascuna a meno di una costante additiva: possiamo fissare tali costanti in modo che sia $\varphi = 0$ in O, e $\psi = 0$ in Q, essendo Q l'intersezione dell'asse Oy colla parete ω. Ponendo

$$(3) \qquad z = x + iy, \quad w = u - iv, \quad f = \varphi + i\psi, \quad (i = \sqrt{-1}),$$

in virtù delle (1), w ed f risultano funzioni della variabile complessa z e le (2) stesse si possono compendiare nell'unica equazione:

$$(4) \qquad \frac{df}{dz} = w.$$

Inoltre, per l'ipotesi fatta che la velocità sia nulla nel punto O, avremo

$$(5) \qquad w = 0, \qquad \text{per } z = 0,$$

e $V = \mathrm{mod}\, w > 0$, in ogni altro punto dello spazio S.

Vediamo ora le condizioni ai limiti. Sopra ogni linea di flusso la funzione di corrente ψ deve, come è noto, assumere un valore costante, diverso da linea a linea; e la portata della corrente compresa tra due di queste linee è data dalla differenza tra i corrispondenti valori della ψ. Perciò, siccome le pareti rigide che limitano il campo S sono linee di flusso, segue

che la ψ è costante su ciascuno dei tre rami del contorno: ω, $\omega_1 + \mu_1$, $\omega_2 + \mu_2$.

Intanto per l'ipotesi fatta che nel punto Q di ω sia $\psi = 0$, risulta

$$\psi = 0 \qquad \text{su } \omega; \tag{6}$$

poi, ricordando le convenzioni relative alle portate, avremo:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \psi = q & \text{su } \omega_2 + \mu_2 \\ \psi = q_1 & \text{su } \omega_1 + \mu_1 . \end{array} \right. \tag{7}$$

Quanto al potenziale di velocità φ, è facile vedere che esso cresce costantemente e indefinitamente sopra ogni linea di flusso, assumendo tutti i valori crescenti da $-\infty$ a $+\infty$ quando si proceda nel senso del moto. Per quello che si è detto, si può concludere che $f = \varphi + i\psi$ è funzione regolare dei punti z del campo S del moto situati a distanza finita; diviene infinita all'infinito e sul contorno la sua parte immaginaria soddisfa alle (6) e (7). Il problema di moto considerato è quindi ridotto alla determinazione delle funzioni f e w.

3. — Piano rappresentativo delle velocità.

Rappresentiamo nel piano complesso $w = u - iv$ i valori che assume la funzione $w(z)$ al variare di z entro il campo S. Anzitutto osserviamo che, supposti gli assi coordinati u, v del piano w paralleli agli assi x, y del piano z, se P' è il punto del piano w di affissa w, e P'' è il suo simmetrico (fig. 2) rispetto all'asse reale, l'affissa di P'' sarà $w' = u + iv$, quindi il vettore $P'' - O'$ è eguale al vettore velocità $\boldsymbol{v}$ del punto corrispondente P del piano z. Questo ci permette di dire che il campo w è il campo rappresentativo dei vettori velocità dei punti del campo S.

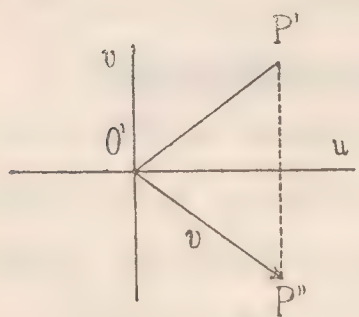



Fig. 2.

Ciò premesso, quando z descrive (vedi fig. 1) la parete ω_1, dal punto O all'infinito nel verso del moto, la velocità cresce da zero al valore c_1, ed è diretta secondo il verso della cor-

rente, che è anche quello assunto come positivo per l'asse x e perciò anche per l'asse u, quindi il corrispondente punto w descrive il tratto $O'D' = c_1$ dell'asse reale del piano w. Se z descrive la parete ω dall'infinito a valle all'infinito a monte, la velocità varierà crescendo dal valore c_1 al valore $c > c_1$, conservando la direzione ed il verso dell'asse $O'u$, quindi il corrispondente punto w descriverà il tratto $D'A' = c - c_1$ dell'asse reale del piano w. Se ora il punto z si muove dal punto all'infinito a monte di ω_2 (che è anche quello della parete ω_1, parallela ad ω_2) nel verso del moto e percorrendo ω_2, la velocità, conservando sempre direzione e verso dell'asse $O'u$, crescerà dal valore c al valore ∞ che essa raggiunge nel punto B; quindi il corrispondente punto w descriverà il tratto $A'B'_\infty$, dell'asse reale del piano w. Facciamo ora descrivere al punto z il tratto μ_2 dal punto B all'infinito a valle; allora la velocità decrescerà da infinito al valore c_2 e la sua direzione formerà un angolo α colla direzione dell'asse Ox, perciò il punto corrispondente w si muoverà su una semiretta r' passante per l'origine del piano w e inclinata di $-\alpha$ sulla direzione positiva dell'asse $O'u$, e ne descriverà il tratto dall'infinito al punto C' situato a distanza c_2 dall'origine. Se infine il punto z descrive il rimanente tratto μ_1 di pareti rigide, dal punto all'infinito a valle all'origine O, la velocità decrescerà da c_2 a zero, essendo sempre inclinata di α sulla direzione positiva dell'asse Ox, perciò il corrispondente punto w descriverà il tratto $C'O'$ della semiretta r'. In conclusione, quando z descrive l'intero contorno del campo S, il corrispondente punto w descrive le semirette che limitano l'angolo α (fig. 3), e le origini delle coordinate nei due piani si corrispondono. Ai punti z del campo S corrispondono poi punti della regione angolare Σ.

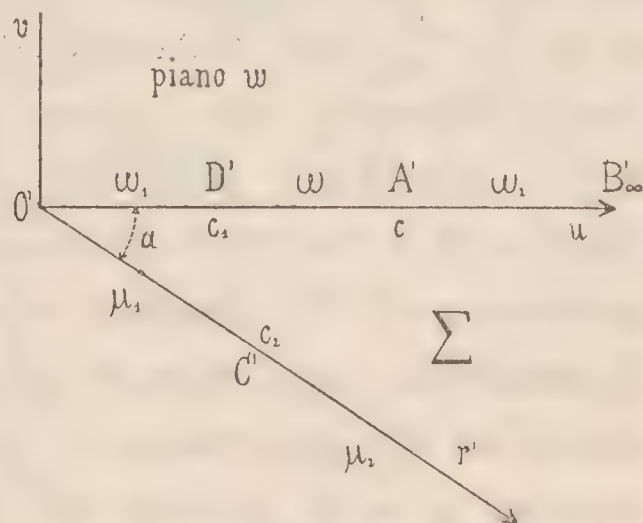



Fig. 3.

La teoria delle funzioni di variabile complessa ci assicura dell'esistenza di una relazione funzionale $w = w(z)$, la quale stabilisce la rappresentazione conforme del campo S sull'angolo Σ. Considerando, reciprocamente, z come funzione dell'argomento w,

il campo in cui si dovrà far variare w è la regione angolare Σ (contorno compreso), ed in tale campo la z è funzione uniforme e regolare, tranne quando w tende ad uno dei punti A', C', D', nel qual caso mod z cresce indefinitamente.

Poichè, come vedemmo, f è funzione regolare di z, immaginando z espresso mediante w, si potrà considerare f come funzione di w, finita e continua in tutto l'angolo Σ, e sopra il suo contorno, salvo che nei punti A', D', C', ove essa diviene infinita. Inoltre la parte immaginaria di questa funzione f dovrà soddisfare, sui vari tratti del contorno di Σ corrispondenti alle pareti rigide del campo S, alle condizioni (6), (7).

4. — Trasformazione in un semipiano.

Per poter costrurre la funzione $f(w)$ che soddisfa alle condizioni poste, ci conviene trasformare il campo w in un semipiano. Poniamo perciò

$$W = w^n, \qquad \text{dove } n = \pi/\alpha; \tag{8}$$

allora è facile vedere che se w descrive l'angolo Σ, il punto W descrive il semipiano delle ordinate negative. Infatti, posto $w = Ve^{-i\vartheta}$, ove θ rappresenta evidentemente l'angolo (contato positivamente nel verso antiorario) che il vettore velocità fa colla direzione positiva dell'asse Ox, ne segue $W = V^n e^{-in\theta}$, perciò se w descrive il semiasse reale positivo, cioè $\theta = 0$, l'argomento di W risulta nullo, quindi il corrispondente punto W descriverà, nel proprio piano, il semiasse reale positivo. Se W descrive la semiretta r', cioè $\theta = \alpha$, l'argomento di W risulta eguale a $-\pi$, quindi W descrive il semiasse reale negativo. Se poi w si muove comunque nell'angolo Σ, allora V varia da zero ad ∞, e θ da zero ad α, quindi mod W varierà pure da zero ad ∞, ed il suo argomento da zero a $-\pi$, quindi all'angolo Σ corrisponderà il semipiano W di ordinate negative (fig. 4). All'origine nel piano w corrisponde l'origine nel semipiano W. A norma della (8), potremo riguardare f come funzione della W, finita e continua in tutto il semipiano W, e sopra la retta che

lo limita, salvo che nei punti A'', D'', C'', corrispondenti ai punti A', D', C' dell'angolo Σ, in cui diviene infinita. Le ascisse dei punti A'', D'', C'' sono rispettivamente per la (8): c^n, c_1^n, $-c_2^n$.

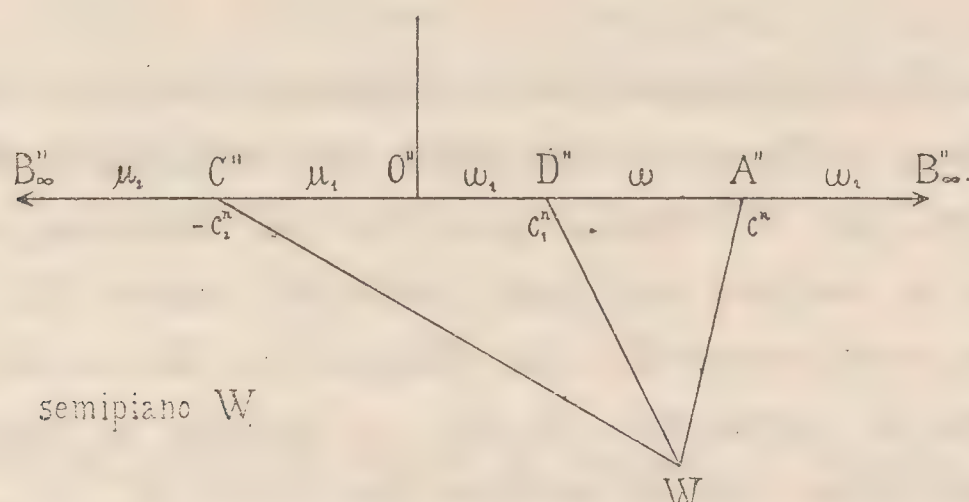



Fig. 4.

Inoltre la parte immaginaria di questa funzione $f(W)$ dovrà soddisfare, sui tratti dell'asse reale del campo W, corrispondenti ai tratti del contorno di S, alle (6) e (7).

5. — Costruzione della funzione $f(W)$.

Veniamo ora alla costruzione di una funzione $f(W)$ che soddisfa alle condizioni poste. Intanto richiamiamo una convenzione sul segno degli angoli. Siano OA, OB due semirette uscenti da un punto O; diremo che l'angolo $\widehat{AOB}$ è positivo o negativo, secondo che per portare la semiretta OA a sovrapporsi alla OB si fa rotare la OA, intorno ad O, nel verso antiorario, ovvero nel verso orario. Ciò premesso, siano M_1, M_2 due punti qualunque dell'asse reale del campo W, ed m_1, m_2 le loro ascisse (fig. 5); sia P' un punto qualunque del semipiano negativo W (o dell'asse reale di esso) di affissa W. Il numero complesso $\frac{m_2 - W}{m_1 - W}$ ha per modulo il quoto r dei moduli, e per argomento la differenza σ degli argomenti dei numeri com-

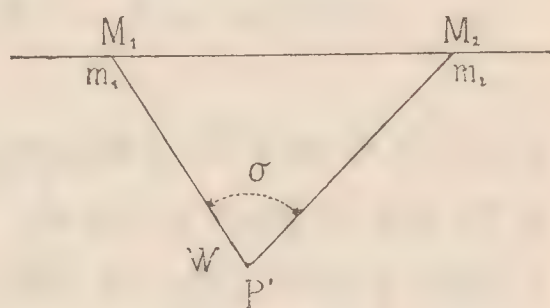



Fig. 5.

plessi $m_2 - W$, ed $m_1 - W$, la quale differenza è eguale all'angolo $M_1 P' M_2$. Avremo cioè:

$$\log \frac{m_2 - W}{m_1 - W} = \log (r e^{i\sigma}) = \log r + i\sigma ,$$

intendendo di considerare per la funzione a primo membro quel ramo di essa, uniforme e regolare nel semipiano W, che si riduce a zero per W reale, positivo ed infinitamente grande. Se P' viene a cadere sull'asse reale del campo W, si ha $\sigma = 0$, oppure $\sigma = -\pi$, secondo che (supposto M_1 a sinistra di M_2) P' è esterno al segmento $M_1 M_2$, o interno a detto segmento. Se ora ricordiamo che le ascisse dei punti A'', D'', C'' sono rispettivamente c^n, c_1^n, $-c_2^n$, e consideriamo la funzione

$$(9) \qquad f(W) = iq + \frac{q}{\pi} \log \frac{c^n - W}{-c_2^n - W} - \frac{q_1}{\pi} \log \frac{c_1^n - W}{-c_2^n - W} ,$$

che, tenendo presente la (8), si può anche scrivere:

$$(9') \qquad f(w) = iq + \frac{q}{\pi} \log \frac{w^n - c^n}{w^n + c_2^n} - \frac{q_1}{\pi} \log \frac{w^n - c_1^n}{w^n + c_2^n} ,$$

vediamo che essa è la funzione cercata, perchè i coefficienti delle parti immaginarie dei due ultimi termini che la compongono, valgono, per quanto ora si è detto, rispettivamente:

$$\begin{array}{llll} -q \text{ su } \omega; & 0 \text{ su } \omega_2 + \mu_2; & -q \text{ su } \omega_1 + \mu_1; \\ 0 \;\text{»}\; \text{»}; & 0 \;\text{»}\; \text{»}; & q_1 \;\text{»}\; \text{»}; \end{array}$$

perciò il coefficiente ψ della parte immaginaria di f vale: 0 su ω; q su $\omega_2 + \mu_2$; q_1 su $\omega_1 + \mu_1$; le (6), (7) risultano così soddisfatte. Come punti M_1 ed M_2 abbiamo preso per il secondo termine del secondo membro della (9) rispettivamente C'' ed A'', e per il terzo termine C'' e D''.

6. — Relazioni tra le costanti del problema.

È facile stabilire un'importante relazione fra le larghezze e le portate del canale principale e del derivato. Osserviamo, per questo, che la (4) si può scrivere anche

$$(4') \qquad \frac{df}{dW}\,\frac{dW}{dz}=w\,,$$

e che $\frac{dW}{dz}$ non si annulla entro il campo S, perchè la rappresentazione (conforme) tra il campo S del moto ed il semipiano W di ordinate negative non ha punti singolari. Perciò dalla (4′) si deduce:

$$(10) \qquad \frac{df}{dW}=0 \qquad \text{per } W=0\,.$$

Ora, dalla (9) si ricava:

$$\frac{df}{dW}=\frac{q}{\pi}\left(\frac{1}{W-c^n}-\frac{1}{W+c_2{}^n}\right)-\frac{q_1}{\pi}\left(\frac{1}{W-c_1{}^n}-\frac{1}{W+c_2{}^n}\right);$$

perciò, per la (9) e per la quarta delle (1), si ha dalla (10):

$$(11) \qquad \frac{q_1}{c_1{}^n}-\frac{q_2}{c_2{}^n}=\frac{q}{c^n}\,,$$

relazione notevole e semplice tra le portate e le velocità. Poniamo:

$$k/h=\lambda\,, \qquad h_1/h=\mu\,, \qquad q_2/q=\chi$$

e ricordiamo le (1) ed avremo:

$$\frac{c_1}{c}=\frac{q_1}{q}\,\frac{h}{h_1}=\frac{1}{\mu}\left(\frac{q-q_2}{q}\right)=\frac{1}{\mu}(1-\chi)\,,$$

$$\frac{c_1}{c_2}=\frac{q_1}{q_2}\,\frac{k}{h_1}=\frac{\lambda}{\mu}\,\frac{q-q_2}{q_2}=\frac{\lambda}{\mu\chi}(1-\chi)\,,$$

$$\frac{c_2}{c}=\frac{\chi}{\lambda}\,.$$

Dalla (11) si ricava poi:

$$\chi = \frac{q_2}{q} = -\frac{c_2{}^n}{c^n} + \frac{q - q_2}{q}\,\frac{c_2{}^n}{c_1{}^n}\,,$$

da cui, tenuto conto delle relazioni precedenti:

$$\chi = -\frac{\chi^n}{\lambda^n} + (1-\chi)\,\frac{\mu^n \chi^n}{\lambda^n (1-\chi)^n}\,;$$

di qui, ricavando λ, e ricordando che $n = \pi/\alpha$, risulta:

$$\lambda = \left\{ \mu^{\frac{\pi}{\alpha}} \left(\frac{\chi}{1-\chi}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}-1} - \chi^{\frac{\pi}{\alpha}-1} \right\}^{\frac{\alpha}{\pi}}, \tag{12}$$

formula finale, che lega i rapporti delle larghezze e delle portate del canale principale a monte ed a valle della derivazione, e del canale derivato, e l'angolo di derivazione.

Se, come fa il Cisotti, si suppone che la larghezza del canale principale sia la stessa a monte ed a valle della derivazione, si ha $h = h_1$, cioè $\mu = 1$, e dalla (12) si ha subito la relazione cui giunge il Cisotti nella sua Memoria.

Come ben si vede, la (12) è immediata e necessaria conseguenza dell'ipotesi fisica fatta, che cioè ci fosse nel campo del moto un punto O in cui la velocità fosse nulla.

Torino, dicembre 1917.

Le serie di potenze di una variabile sommate col metodo di Borel generalizzato.

Nota Iª di GUSTAVO SANNIA (a Cagliari).

INTRODUZIONE

1. — In una recente Nota [1] ho trattato delle *serie di funzioni*, interpretandole, anzicchè con l'ordinario metodo di sommazione, col *metodo di Borel generalizzato* (brevemente: *metodo Bg*) [2]. In questa Nota ed in una successiva studierò più particolarmente le *serie di potenze* di una variabile del tipo [3]

$$u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \dots + u_n z^n + \dots \tag{1}$$

2. — Interpretata col metodo ordinario, la (1) ha un significato, cioè una somma, nel *cerchio di convergenza* γ.

Il Borel col suo *metodo di sommazione esponenziale* [4], limitato però nel suo sviluppo con condizioni molto restrittive, ne

---

[1] *Le serie di funzioni sommate col metodo di Borel generalizzato* („Atti della R. Accademia dei Lincei „, vol. XXVI, serie 5ª, 2° sem., fasc. 4°).

[2] Ho esposto questo metodo nella Memoria: *Nuovo metodo di sommazione delle serie, estensione del metodo di Borel* (Accolta dal „Circolo Matematico di Palermo „ per la inserzione nei *Rendiconti* alla ripresa della loro pubblicazione). La indicherò con una M.

Ne ho dato un sunto nella Nota: *Generalizzazione del metodo di Borel per la sommazione delle serie* („Atti della R. Accad. dei Lincei „, vol. XXVI, serie 5ª, 1° sem., fasc. 11°).

Questa Nota, che indicherò con una N, è sufficiente per intendere il presente lavoro.

[3] Che non è *il più generale tipo di serie di potenze* (ad esponenti interi, crescenti non negativi), come si può essere tentati di dire (cfr. il n° 11 e l'osservazione del n° 13), ma è il più importante.

[4] E. Borel, *Leçons sur les séries divergentes*, cap. III (Gauthier-Villars, Paris, 1901).

ha esteso il significato in una regione α più ampia di γ, che può dirsi una *stella* (alla Mittag-Leffler) che ha per *centro* il punto $O\,(z=0)$, essendo luogo di segmenti uscenti da O (*raggi* della stella), finiti o non, ed eventualmente anche nulli ([1]).

Il Praghmen ([2]), applicando il metodo esponenziale senza limitazioni, ha ottenuto una stella σ_0, molto più ampia di α. Però in σ_0 vanno perdute alcune proprietà importanti di cui la (1) godeva in γ e in α. Così: non in tutti i punti interni a σ_0 sono sommabili col metodo esponenziale le serie derivate di (1) e la serie che si ottiene moltiplicando due date con la nota regola di Cauchy.

Ora noi, applicando il metodo *Bg*, non solo estenderemo il significato della (1) in una stella σ molto più ampia di γ, α e σ_0, ma (quel che più importa) riguadagneremo nel contempo le proprietà perdute nel passaggio da α a σ_0.

3. — Otterremo anzitutto una successione illimitata (in due sensi) di *stelle di sommabilità*

$$\ldots,\ \sigma_{-2},\ \sigma_{-1},\ \sigma_0,\ \sigma_1,\ \sigma_2,\ \ldots, \tag{2}$$

in ciascun punto delle quali (almeno se è interno in senso stretto) la (1) ha una *somma*. Esse son tali che *ciascuna contiene la seguente* (senza escludere la coincidenza), e perciò ammettono due *stelle-limite* σ e τ, la prima che le contiene tutte e la seconda che è in tutte contenuta.

La stella σ (a parte il contorno) *è il luogo dei punti del piano complesso ove la* (1) *ha una somma col metodo* Bg.

Che questa estensione di significato della (1) sia molto ampia, risulta da ciò: che, fra le stelle da noi costruite, la σ_0 è quella stessa del Praghmen e la più piccola τ coincide con quella α del Borel.

([1]) Il Borel ha esplicitamente considerata la stella α nel caso in cui il raggio di convergenza della serie (1) non è nullo, chiamandola *poligono di sommabilità*.

([2]) " Comptes Rendus ", t. 132 (1901), p. 1396.

Vedi anche una Nota di Hardy (in " Trans. of the Cambridge Phil. Society ", vol. XIX, 1904, p. 297) ed il trattato del Bromwich, *An introduction to the theory of infinite series*, ni 109-111 (Macmillan and Co, London, 1908).

Ma la stella σ è notevole non solo per la sua grande ampiezza.

Per le applicazioni è importante che *in* σ *si possono applicare alla* (1) *le regole ordinarie del calcolo algebrico e infinitesimale* (come nel cerchio di convergenze γ e nella stella $\alpha \equiv \tau$). In particolare, si può applicare la suddetta regola di Cauchy e si può derivare o integrare la (1) termine a termine; anzi le stelle σ e τ [1] relative alle serie derivate o integrali coincidono con le corrispondenti di (1) (come il cerchio di convergenza γ).

4. — La serie (1) e le sue successive derivate definiscono dunque altrettante funzioni di z, che indicheremo con $u(z)$, $u'(z)$, $u''(z)$, ..., nel medesimo campo σ (salvo eccezioni al contorno). Vedremo che:

La funzione $u^{(k)}(z)$ *in ogni punto* z *di* σ *ove esiste, escluso* O, *rappresenta la derivata di ordine* k *di* $u(z)$, *presa però soltanto secondo il raggio di* σ *che passa pel punto.*

Ciò assicura *la continuità di* $u(z)$ *secondo il raggio che passa pel punto* z in tutti i punti z interni a σ in senso stretto ed in quei punti del contorno ove $u'(z)$ esiste (escluso però sempre il punto O).

Vedremo poi che la detta continuità sussiste anche in quei punti z del contorno di σ ove $u'(z)$ non esiste, *purchè esista* $u(z)$ [2].

Circa il punto O, fin qui escluso, vedremo che: *nel punto* O *la* $u(z)$ *è continua secondo ogni raggio della stella* σ_1 *che non sia nullo, ammette la derivata prima presa secondo ogni raggio della stella* σ_3 *che non sia nullo, ammette la derivata seconda presa secondo ogni raggio della stella* σ_5 *che non sia nullo, e così via; queste derivate valgono*

$$u'(0) = u_1, \qquad u''(0) = 2!\, u_2, \qquad u'''(0) = 3!\, u_3, \ldots$$

e sono perciò indipendenti dal raggio secondo cui vengon prese [3].

---

[1] Ed in certo senso anche le (2).

[2] Il che costituisce una larghissima estensione di un ben noto teorema di Abel.

[3] Sicchè, se nessun raggio di σ_1 è nullo (cioè se O è interno in senso stretto a σ_1), la $u(z)$ ammette la derivata prima presa secondo qualsiasi

Or dunque, *solo quando nessuna delle stelle* (2) *si riduce al suo centro* O ([1]) *si può asserire che* u (z) *ammette in* O *le derivate di tutti gli ordini, ciascuna però presa secondo una semiretta (almeno) opportuna uscente da* O. Ed allora la (1) è per la $u(z)$ la *serie di Taylor* (in senso lato) relativa al punto O.

Se ne deduce (come nel caso ordinario) che *una funzione* u (z) *non puo ammettere più di uno sviluppo in serie di potenze di* z *del tipo* (1) *le cui stelle* (2) *non si riducano al centro* O, *e che i coefficienti di questo sviluppo son nulli solo quando la* u (z) *è identicamente nulla.*

Tutto ciò evidentemente rende particolarmente atte alle applicazioni quelle serie (1) che ammettono le stelle (2) di sommabilità mai riducentisi al centro O.

Tali sono in particolare le serie il cui cerchio di convergenza γ non si riduce al centro (serie ordinariamente considerate) e quelle la cui stella $\alpha \equiv \tau$ non si riduce al centro (serie considerate dal Borel), perchè γ è contenuto in α e questa è contenuta in tutte le stelle (2).

Quanto precede fa apparire la possibilità di rappresentare funzioni, non solo analitiche, ma molto più generali, mediante serie del tipo (1) (che pure è il più semplice tipo di sviluppo in serie per una funzione), purchè queste siano interpretate col metodo *Bg*. E ciò pone sempre più in luce la grande potenza di questo metodo di sommazione.

5. — Nella trattazione mi sono giovato degli stessi procedimenti già seguìti dagli Autori citati, opportunamente modificandoli e generalizzandoli, ma vi ho apportato maggior rigore ([2]).

---

direzione nel punto O ed uguale a u_1; ma da ciò non segue l'esistenza della derivata prima ordinaria nel punto O. Lo stesso dicasi delle altre derivate.

([1]) E quindi ammette almeno un raggio non nullo. Notiamo che basterebbe riferirsi alle sole stelle σ_3, σ_5, σ_7, ...; ma queste non si riducono al centro O solo quando lo stesso si verifica per *tutte* le stelle (2), pel fatto che ciascuna stella (2) contiene le seguenti.

([2]) Avendo rilevato alcune sviste e qualche dimostrazione non rigorosa. Le farò notare nei punti opportuni, perchè, lasciandole inosservate, inducono ad affermare risultati che oltrepassano, e di molto, quelli qui enunciati (Cfr. la nota al n° 25).

Nel § 1 ho raccolto le necessarie definizioni e quelle proprietà (aritmetiche) della serie (1) che discendono immediatamente dalla teoria generale delle serie numeriche, svolta in M ed N; nei rimanenti ho dimostrato quelle che spettano in modo particolare alla (1), come inerenti al suo carattere funzionale.

Esse si possono dedurre tutte da alcune proprietà relative alla convergenza, semplice o uniforme, di certi integrali impropri, che perciò ho raccolte in quattro lemmi nel § 2. Quelle relative alla convergenza semplice sono sufficienti per la determinazione delle varie stelle di sommabilità della (1) (§§ 3 e 4), quelle relative alla convergenza uniforme intervengono nella determinazione delle stelle analoghe delle serie derivate (§ 5) e nella dimostrazione delle proprietà della funzione $u(z)$ nel campo σ (§ 6).

6. — Il Borel, tanto nello studio delle serie numeriche, quanto nello studio delle serie di potenze, si è invece giovato esclusivamente della convergenza *assoluta*, che ha costantemente imposta ai suoi integrali, limitando così la portata del suo metodo esponenziale. Io avevo già gradualmente tolta questa limitazione dalla teoria delle serie numeriche, in due Note [1] e nella Memoria M, però avevo espresso il dubbio [2] che essa potesse essere indispensabile per lo studio delle serie di funzioni e, in particolare, delle serie di potenze. Ora questo dubbio svanisce del tutto, in seguito alla Nota citata in principio del n° 1 ed al presente lavoro, nei quali non ho mai invocata la convergenza assoluta degli integrali che entrano in gioco, con gran vantaggio della generalità.

---

[1] *Nuova trattazione del metodo di Borel per la sommazione delle serie* (" Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino ", vol. 52, 1916-17, p. 67).

Sul metodo di Borel per la sommazione delle serie (" Atti della R. Acc dei Lincei ", vol. XXVI, serie 5ª, 1° sem., fasc. 3°).

[2] In una nota al n° 5 della prima Nota.

§ 1. — Sommabilità di vario ordine e proprietà aritmetiche della (1).

7. — Secondo la teoria generale, per sommare la (1) col metodo *Bg*, si dovrà (M, n[i] 4-9; N, n° 1) anzitutto considerare la *serie associata (di ordine zero)*

$$u^{(0)}(a, z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n \frac{a^n}{n!} \tag{4}$$

per valori *positivi* di a (zero incluso) ed in generale la *serie associata di ordine* r (r intero)

$$u^{(r)}(a, z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{n+r} z^{n+r} \frac{a^n}{n!} \quad (^1), \tag{5}$$

che se ne deduce, termine a termine, derivandola (se $r > 0$) o integrandola (se $r < 0$) rispetto ad a r volte.

Se per un valore (complesso) fissato di z esiste un intero r tale che la (5) sia una trascendente intera rispetto ad a e l'*integrale associato di ordine* r

$$\int_0^{\infty} e^{-a} u^{(r)}(a, z)\, da \qquad (a \geq 0 \tag{6}$$

sia convergente, si dirà che la (1) è *sommabile* (B, r) (ossia *col metodo di Borel di ordine* r) nel punto z, e che ha per *somma*

$$u(z) = U_{r-1}(z) + \int_0^{\infty} e^{-a} u^{(r)}(a, z)\, da, \tag{7}$$

ove

$$\begin{aligned} U_{r-1}(z) &= 0, \text{ se } r \leq 0, \\ U_{r-1}(z) &= u_0 + u_1 z + \dots + u_{r-1} z^{r-1} \text{ se } r > 0 \quad (^2). \end{aligned} \tag{8}$$

---

(1) Giusta una convenzione fatta in generale, attribuiremo il valore *zero* a quei termini il cui coefficiente ha l'indice $n+r$ negativo (M, n° 4; N, n° 1).

(2) Della somma $u(z)$ si può dare un'altra espressione, del tutto equivalente (*M*, n° 8), della quale però qui non faremo uso:

$$u(z) = \lim_{a=\infty} e^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} U_{n+r-1}(z) \frac{a^n}{n!}. \tag{a}$$

Che se poi la convergenza dell'integrale (6) è uniforme lungo una linea o dentro un'area, diremo che la (1) è sommabile (B, r) *uniformemente* lungo la linea o dentro l'area.

8. — *Quando la* (1) *è sommabile con uno dei metodi*

$$\ldots, (B, -2), (B, -1), (B, 0), (B, 1), (B, 2), \ldots \tag{9}$$

lo è pure con tutti i precedenti e con ugual somma, ma non coi seguenti in generale (M, n^i 13 e 14; N, n° 2); perciò sono lecite le seguenti ulteriori definizioni:

La (1) è *sommabile Bg* (ossia *col metodo di Borel generalizzato*) in un punto z quando ivi è sommabile con qualcuno dei metodi (9), ed è *sommabile Bt* (cioè *totalmente sommabile*) quando è sommabile con tutti i metodi (9) [1].

9. — *Se in un punto* z *la* (1) *è convergente con somma* u(z), *è pure sommabile* (B, r) *per ogni* r (*ossia è sommabile* Bt) *e con ugual somma* (M, n° 10; N, n° 2).

Dunque la (1) è sommabile *Bg* (anzi *Bt*) almeno nel punto $O\,(z=0)$.

Affinchè la (1) sia sommabile *Bg* in qualche punto $z \neq 0$, è necessario che ivi almeno una delle sue serie associate sia una trascendente intera rispetto ad a: *allora tali sono tutte le serie associate ed in ogni punto* z.

Supponiamo infatti che la (5), per un certo r ed un certo $z_0 \neq 0$, sia una trascendente intera rispetto ad a. Allora è tale anche per ogni altro valore di r, perchè cambiare r equivale a derivare o integrare la (5) termine a termine rispetto ad a

[1] L'originario metodo esponenziale del Borel è il metodo $(B, 0)$. Le condizioni restrittive imposte dal Borel (ed alle quali abbiamo più volte alluso nell'*Introduzione*) consistono in ciò: nell'esigere che l'integrale (6) (non solo sia convergente per $r=0$, ma) sia *convergente assolutamente e per ogni* $r \geq 0$.

Quando esse son soddisfatte in un punto z, diremo col Borel che ivi la (1) è *assolutamente sommabile.* Ed allora essa è certamente sommabile (B, r) per ogni $r \geq 0$, e quindi anche (n° 8) per ogni $r < 0$. Dunque: *quando la* (1) *è assolutamente sommabile, è pure sommabile Bt* (e non viceversa, in generale).

un certo numero di volte. Ed è tale anche per ogni altro valore $z \neq 0$, perchè si ha identicamente

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_{n+r}\, z^{n+r} \frac{a^n}{n!} = \left(\frac{z}{z_0}\right)^r \sum_{n=0}^{\infty} u_{n+r}\, z_0^{n+r} \frac{b^n}{n!} \qquad \left(b = a\frac{z}{z_0}\right)$$

e la seconda serie è, per ipotesi, una trascendente intera rispetto a b.

10. — Dalla teoria generale delle serie numeriche segue che (M, § 3; N, n° 3): *se per un valor di* z *la serie* (1) *è sommabile* (B, r) *con somma* u (z), *tali sono anche*

$$(10) \qquad ku_0 + ku_1 z + ku_2 z^2 + \ldots,$$

$$(11) \qquad u_0 + u_1 z + \ldots + u_{n-1} z^{n-1} + (u_n + k)\, z^n + u_{n+1} z^{n+1} + \ldots$$

ed hanno per somma ku (z) *e* u (z) + kz^n *rispettivamente (e viceversa); se inoltre*

$$(12) \qquad v_0 + v_1 z + v_2 z^2 + \ldots$$

è sommabile (B, s) *con somma* v (z), *la serie-somma*

$$(13) \qquad (u_0 + v_0) + (u_1 + v_1)\, z + (u_2 + v_2)\, z^2 + \ldots$$

è sommabile (B, r) *se* r $\leq$ s *ed ha per somma* u (z) + v (z), *e la serie-prodotto* (*di* Cauchy)

$$(1) \qquad w_0 + w_1 z + w_2 z^2 + \ldots \qquad (w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \ldots + u_n v_0)$$

è sommabile (B, t) *ed ha per somma* u (z) v (z), *ove* t = r + s — 1 *se* r *e* s *non sono positivi ed è uguale al non maggiore dei due numeri* r *e* s *se uno almeno è positivo.*

Quindi: *se la* (1) *è sommabile* Bg (*o* Bt), *tali sono anche le* (10) *e* (11) (*e viceversa*); *e se* (1) *e* (2) *sono sommabili* Bg (*o* Bt), *tali sono anche le* (13) *e* (14).

11. — La soppressione di un termine a_n da una serie $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ sommabile (B, r) con somma a la rende sommabile $(B, r-1)$ con somma $a - a_n$ (M, n° 20; N, n° 3, IV);

dunque è lecito sopprimere dalla (1) tutti quei termini che avessero il coefficiente nullo, *perchè in numero finito*, senza che ciò alteri nè la sommabilità Bg (o Bt), nè la sua somma.

Ma *non è lecito*, in generale, sopprimere i detti termini quando sono in numero *infinito*: sia perchè non vi è alcun teorema che autorizzi tale soppressione, sia perchè essa trasformerebbe una serie del tipo (1) in un'altra del tipo più generale

$$(14)' \qquad u_0 z^{e_0} + u_1 z^{e_1} + u_2 z^{e_2} + \ldots,$$

ove gli esponenti sono interi, non negativi, crescenti con n E la sua maggiore generalità non è soltanto formale [1], ma effettiva, come vedremo (n° 13, osservazione). D'altronde, la soppressione dei termini nulli, anche se in numero finito, può talvolta riuscire inopportuna: così conviene sempre ripristinare i termini soppressi quando si debbono moltiplicare due serie di potenze con la regola di CAUCHY; altrimenti si ottiene non più una serie di potenze, ma una serie *di polinomii* in generale [2].

§ 2. — Lemmi.

12. — I [3]. *Sia* $\varphi(\theta)$ *una funzione positiva e continua in un intervallo finito* (θ_0, θ_1) *ed* $f(b, \theta)$ *una funzione integrabile rispetto a* $b \geq 0$ *per ogni* θ *di* (θ_0, θ_1): *se l'integrale improprio*

$$(15) \qquad \int_0^\infty e^{-\frac{b}{\varphi(\theta)}} f(b, \theta)\, db$$

è convergente uniformemente nell'intervallo (θ_0, θ_1), *l'integrale*

$$(16) \qquad \int_0^\infty e^{-\frac{b}{\varrho}} f(b, \theta)\, db$$

---

[1] Come accade quando alle serie si dà l'interpretazione ordinaria.

[2] E ciò qualunque sia il metodo di sommazione che si adoperi, incluso l'ordinario.

[3] Geometricamente espresso: *se l'integrale* (16) *è uniformemente convergente lungo un arco finito di curva di equazione polare* $\rho = \varphi(\theta)$, *lo è pure nell'area ricoperta dai raggi vettori dei punti dell'arco* (*escluso il polo* O).

è convergente uniformemente nell'area

$$\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1, \qquad 0 < \rho \leq \varphi(\theta). \tag{17}$$

L'integrale

$$J(\alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta e^{-\frac{b}{\varrho}} f(b, \theta)\, db \qquad (0 < \alpha < \beta)$$

può scriversi

$$J(\alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta e^{b\left[\frac{1}{\varphi(\theta)} - \frac{1}{\varrho}\right]} e^{-\frac{b}{\varphi(\theta)}} f(b, \theta)\, db.$$

Il primo fattore dell'integrando è, in ogni punto $M(\rho, \theta)$ dell'area (17), una funzione di b, che è positiva e decrescente nell'intervallo di integrazione, quindi, applicando il secondo teorema della media, si ha

$$J(\alpha, \beta) = e^{\alpha\left[\frac{1}{\varphi(\theta)} - \frac{1}{\varrho}\right]} \int_\alpha^\gamma e^{-\frac{b}{\varphi(\theta)}} f(b, \theta)\, db \qquad (\alpha < \gamma < \beta).$$

Ora osserviamo che il fattore esterno all'integrale è positivo e non supera 1 in ogni punto M dell'area (17); inoltre, per la supposta convergenza uniforme di (15) in (θ_0, θ_1), dato $\epsilon > 0$, esiste un $\alpha > 0$ (indipendente da θ) tale che per ogni $\gamma > \alpha$ e per ogni θ in (θ_0, θ_1) il modulo dell'integrale sia minore di ϵ. Dunque sarà $|J(\alpha, \beta)| < \epsilon$ per il detto valore di α, per ogni $\beta > \alpha$ e per ogni punto M dell'area (17), e perciò l'integrale (16) sarà uniformemente convergente in quest'area.

II. *Sia* $f(b)$ *una funzione integrabile per* $b \geq 0$ *e* ρ_0 *un numero positivo: se l'integrale*

$$\int_0^\infty e^{-\frac{b}{\varrho_0}} f(b)\, db \tag{18}$$

è convergente, l'integrale

$$\int_0^\infty e^{-\frac{b}{\varrho}} f(b)\, db \tag{19}$$

è convergente uniformemente nell'intervallo $(0 + 0, \rho_0)$ [1].

---

[1] Il PRAGHMEN (loc. cit.) aveva già dimostrata la convergenza *semplice* di (19).

Si dimostra come il precedente, del quale del resto è un caso limite per $\theta_0 = \theta_1$ e $\rho_0 = \varphi(\theta)$.

III. *Sia* f(b) *una funzione integrabile per* $b \geq 0$ *e* ρ_0 *un numero positivo: se l'integrale* (18) *è convergente, l'integrale*

$$\int_0^\infty e^{-\frac{b}{\varrho}} bf(b)\, db$$

è convergente per $0 < \rho < \rho_0$.

Fissato per ρ un valore tale che sia $0 < \rho < \rho_0$, consideriamo un numero α maggiore di $m = 1 : \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right)$ e formiamo l'integrale

$$J(\beta, \alpha) = \int_\alpha^\beta e^{-\frac{b}{\varrho}} bf(b)\, db = \int_\alpha^\beta b e^{-b\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right)} e^{-\frac{b}{\varrho_0}} f(b)\, db \qquad (\beta > \alpha).$$

Il prodotto dei primi due fattori dell'integrando costituisce una funzione di b che è decrescente per $b > m$ (poichè, come è facile verificare, la sua derivata è negativa per $b > m$), e poichè inoltre è positiva, è necessariamente limitata per $b > m$: sia M il suo limite superiore.

Applicando il secondo teorema della media, si ha

$$J(\alpha, \beta) = \alpha e^{-\alpha\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right)} \int_\alpha^\gamma e^{-\frac{b}{\varrho}} f(b)\, db \qquad (\alpha < \gamma \lesseqgtr \beta),$$

quindi

$$|J(\alpha, \beta)| \leq M \left| \int_\alpha^\gamma e^{-\frac{b}{\varrho_0}} f(b)\, db \right|.$$

Ma, per la supposta convergenza di (18), dato $\epsilon > 0$, si può trovare un $\alpha > m$ tale che, per ogni $\gamma > \alpha$, il secondo fattore del secondo membro risulti minore di $\epsilon : M$; quindi sarà $|J(\alpha, \beta)| < \epsilon$, e ciò prova che (20) è convergente per il valore fissato di ρ.

IV. Viceversa: *se l'integrale* (20) *è convergente per* $\rho = \rho_0 > 0$, *l'integrale* (19) *è convergente per* $0 < \rho \leq \rho_0$.

Fissato un valore di ρ tale che sia $0 < \rho \leq \rho_0$, consideriamo l'integrale

$$J(\alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta e^{-\frac{b}{\varrho}} f(b)\, db = \int_\alpha^\beta \frac{1}{b} e^{-b\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right)} b e^{-\frac{b}{\varrho_0}} f(b)\, db$$

ove $0 < \alpha < \beta$. Il prodotto dei primi due fattori dell'integrando costituisce una funzione di b che evidentemente è positiva e decrescente, e perciò limitata, nell'intervallo di integrazione. Detto M il suo limite superiore, la dimostrazione si prosegue come per il lemma precedente, applicando cioè ad $J(\alpha, \beta)$ il teorema della media e poi invocando la supposta convergenza di (20) per $\rho = \rho_0$.

§ 3. — **Teorema fondamentale.**

13. — *Se la serie* (1) *è sommabile* (B, r) *in un punto* M_0 *del piano complesso, diverso da* O, *lo è su tutto il segmento* OM_0; *ed uniformemente, purchè si escluda un intorno di* O *se* $\mathrm{r} \leq 0$.

Dall'ipotesi segue che la (5) è una trascendente intera rispetto ad a per $z = z_0$ (affisso di M_0), quindi (n° 11) tale sarà pure per ogni altro valore di z. La si può scrivere

$$u^{(r)}(a, z) = z^r \sum_{n=0}^{\infty} u_{n+r} \frac{(az)^n}{n!}, \tag{21}$$

da cui risulta che

$$u^{(r)}(a, z) = z^r u^{(r)}(az, 1) \qquad (\text{per } z \neq 0 \text{ se } r < 0)\ [1], \tag{22}$$

e quindi che l'integrale (6) può scriversi

$$z^r \int_0^\infty e^{-a} u^{(r)}(az, 1)\, da. \tag{23}$$

Giusta l'enunciato, dobbiamo dimostrare che, se esso è convergente in M_0, lo è su tutto OM_0; ed uniformemente, purchè si escluda un intorno di O se $r \leq 0$.

Sia θ l'argomento comune ai punti di OM_0, ρ_0 il modulo

---

[1] Poichè già sappiamo che la (1) è sommabile (B, r) per ogni r in $O\,(z = 0)$, possiamo senz'altro escludere questo punto dalle nostre considerazioni.

di M_0 e ρ quello di un punto generico di OM_0; sicchè, escludendo il punto O, è $0 < \rho \leq \rho_0$. Posto

$$(24) \qquad z = \rho e^{i\theta}, \qquad \rho a = b,$$

l'integrale (23) diventa

$$(25) \qquad \rho^{r-1} e^{ri\theta} \int_0^\infty e^{-\frac{b}{\varrho}} u^{(r)} (b e^{i\theta}, 1) \, db:$$

e noi dobbiamo dimostrare che, se esso è convergente per $\rho = \rho_0$, lo è in tutto l'intervallo $(0 + 0, \rho_0)$; ed uniformemente, nello stesso intervallo o in (h, ρ_0) (ove h è un numero positivo comunque piccolo), secondo che è $r > 0$ o $r \leq 0$.

Basta dimostrarlo, p. e., per la sua parte reale, che (come il coefficiente di i della sua parte immaginaria) è un integrale del tipo

$$(26) \qquad \rho^{r-1} \int_0^\infty e^{-\frac{b}{\varrho}} f(b) \, db \quad (^1),$$

che differisce solo pel fattore ρ^{r-1} dall'integrale (19) considerato nel lemma II del n° 12. Poichè (26), e quindi (19), è convergente per $\rho = \rho_0$, segue (per il lemma) che (19) sarà convergente uniformemente in $(0 + 0, \rho_0)$.

Da ciò si deduce la convergenza (semplice) di (26) nello stesso intervallo.

E si può dedurne anche quella uniforme, *a patto però che il fattore* ρ^{r-1}, *per cui* (26) *differisce da* (19), *si conservi limitato nell'intervallo* (2): ora ciò si verifica certamente se $r > 0$; ma se $r \leq 0$, si verifica solo nell'intervallo parziale (h, ρ_0), ove $0 < h < \rho_0$.

Corollario. — *Se la serie* (1) *è sommabile* Bg (*o* Bt) *in un punto* M_0 *diverso da* O, *lo è su tutto il segmento* OM_0.

---

(1) $f(b)$ è una trascendente intera. Dipende anche da θ, ma θ è costante su OM_0.

(2) Non tenendo conto di ciò, si verrebbe a concludere che: *se la* (1) *è sommabile* (B, r) *in* M_0, *lo è ed uniformemente su tutto* OM_0 (senza eccezioni). È ciò che ha fatto Hardy (loc. cit., p. 44) e poi Bromwich (loc. cit., n° 111) per il caso $r = 0$ (il solo fin qui considerato).

Poichè, giusta l'ipotesi e le definizioni del n° 8, la (1) è sommabile con qualche metodo (con tutti i metodi) (9) in M_0, e quindi su tutto il segmento OM_0.

Osservazione. — La dimostrazione del teorema fondamentale [1] si regge anzitutto sulla formola (22), la quale mostra che la serie associata di ordine r alla (1) dipende da *una sola* variabile (la az), a prescindere dal fattore z^r che è costante nell'integrazione (6). Ora ciò non si verifica per la serie associata di ordine r

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_{n+r}\, z^{e_{n+r}} \frac{a^n}{n!} \tag{27}$$

alla serie (14)', di tipo più generale della (1) [2].

Dunque la teoria che sviluppiamo per le serie del tipo (1) non vale anche per quelle del tipo (14)' [3], che perciò è *effettivamente* più generale del tipo (1). (Cfr. in proposito il n° 11).

---

[1] Come anche altre dimostrazioni (quella, p. e., del n° 19).

[2] Si verifica solo quando gli esponenti formano una progressione aritmetica: $e_n = np + q$. Ma allora la (14)', a prescindere dal fattore z^q, si riduce subito al tipo (1), ponendovi $z^p = \xi$.

[3] Almeno fino a prova contraria.

Sul calcolo dell'arco elastico senza cerniere.

Nota del Socio C. GUIDI.

Nel calcolo dell'arco elastico senza cerniere, secondo la teoria dell'ellisse di elasticità, il baricentro elastico del semiarco e l'antipolo dell'asse verticale y passante pel baricentro elastico di tutto l'arco, rispetto all'ellisse di elasticità del semiarco, hanno una notevole importanza, che vogliamo mettere in evidenza colla presente breve Nota.

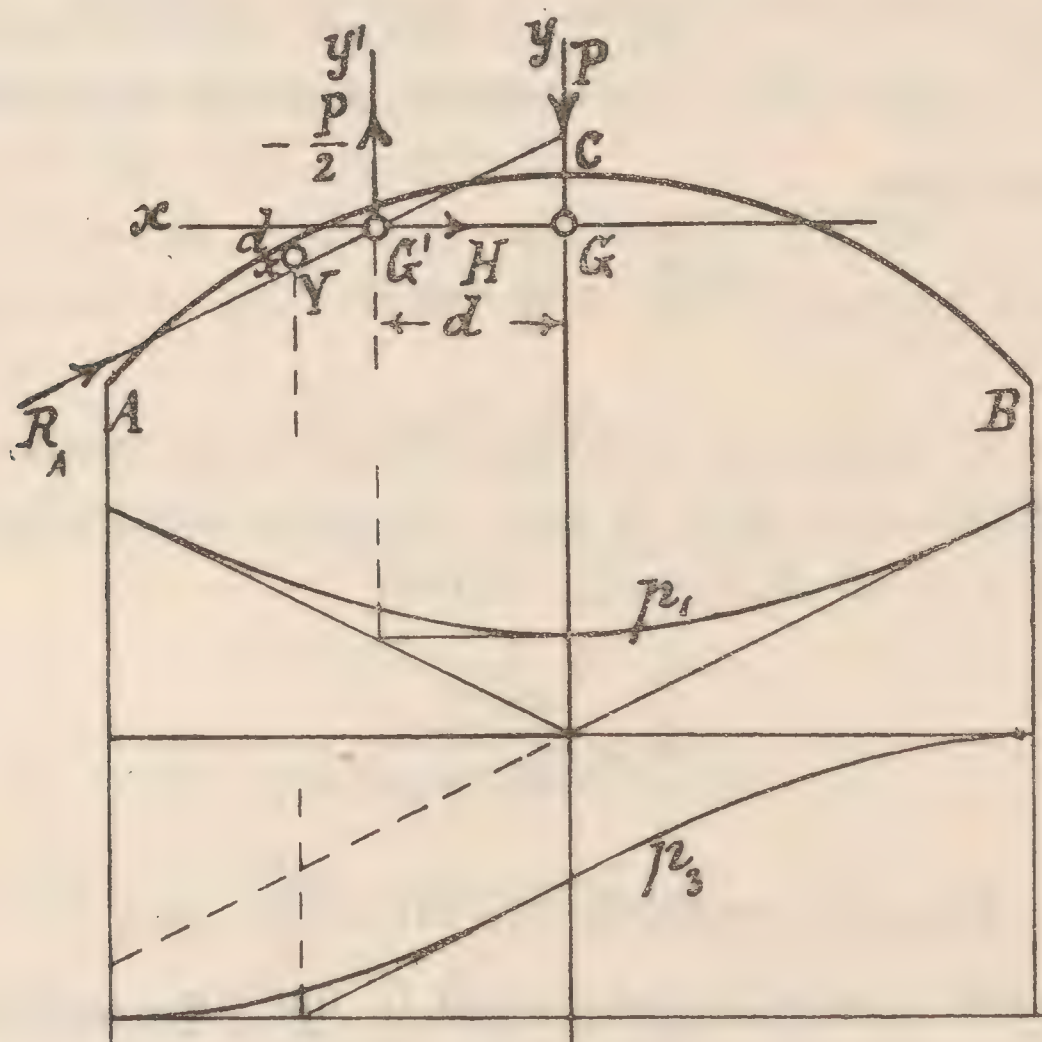



Fig. 1.

Innanzi tutto la costruzione di questi due punti è molto semplice. Se (fig. 1) del primo poligono p_1, dei noti cinque poligoni funicolari che servono al calcolo grafico dell'arco secondo la suddetta teoria, si prolunga il lato in corrispondenza dell'asse y fino ad intersecare il primo, la verticale per il punto

d'intersezione deve contenere il baricentro elastico G' del semiarco; ma tale punto deve cadere anche sull'asse x, quindi resta determinato. Analogamente, se del poligono p_3 si prolunga il lato in corrispondenza dell'asse y fino ad intersecare il primo, la verticale per il punto d'intersezione deve contenere l'antipolo Y dell'asse y rispetto all'ellisse di elasticità del semiarco; basta quindi comporre le forze del poligono p_3 in un'altra direzione per individuare il punto Y.

Orbene, per un carico isolato applicato al vertice, il semiarco AC può riguardarsi come incastrato in C e cimentato in A dalla reazione R_A e poichè l'imposta A non subisce rotazione, così la R_A *deve passare pel baricentro elastico* G' *del semiarco*. Questa proprietà offre una facile verifica per le *linee d'intersezione e d'inviluppo.*

Per la stessa condizione di carico lo spostamento orizzontale di A, e per conseguenza anche di G' invariabilmente connesso con A, dev'essere nullo, e però decomposta la R_A in G' nella $-\frac{P}{2}$ e nella H si deve avere, secondo la teoria dell'ellisse di elasticità,

$$H\mathbf{J}_x - \frac{P}{2}\mathbf{J}_{xy'} = 0$$

nella quale $\mathbf{J}_x$ indica il momento d'inerzia del *semiarco* elastico rispetto all'asse x, e $\mathbf{J}_{xy'}$ il suo momento centrifugo rispetto agli assi x, y'; ma $\mathbf{J}_{xy'} = \mathbf{J}_{xy}$, quindi

$$H = \frac{P}{2}\,\frac{\mathbf{J}_{xy}}{\mathbf{J}_x}. \tag{1}$$

Questa formola concorda coll'altra ben nota $H = \frac{\Sigma M_0 w y}{\mathbf{J}_x}$. Ora, indicando con d la distanza di G' dall'asse y, con d_x quella di Y dall'asse x e con Σw la somma dei pesi elastici pel *semiarco*, si ha

$$\mathbf{J}_{xy} = \Sigma w \,.\, d \,.\, d_x$$

e coi noti simboli della trattazione grafica dell'arco

$$\mathbf{J}_x = \xi \Sigma w \,.\, \lambda_4 \,.\, n,$$

quindi la (1) diviene

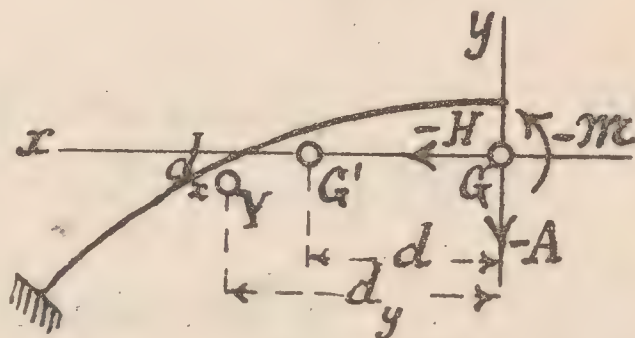
$$H = \frac{P}{2} \frac{d \, . \, d_x}{\xi \lambda_4 \, . \, n}, \tag{2}$$

nella quale λ_4 ed n sono da leggersi nella scala delle lunghezze come d e d_x.

La (2) offre una verifica dell'ordinata media del noto poligono p_5.

La conoscenza dei punti G' ed Y offre anche il modo di calcolare facilmente le ordinate della linea d'influenza dell'abbassamento del vertice, linea di cui abbiamo dato la costruzione grafica nelle nostre *Lezioni sulla Teoria dei ponti*.

Fig. 2.

Infatti per un carico unitario in una posizione qualunque sul semiarco destro siano $-\mathfrak{M}$, $-A$, $-H$ i parametri della spinta che il detto semiarco esercita contro quello sinistro (fig. 2); secondo la teoria dell'ellisse di elasticità, indicando con $\mathfrak{G}'$ il peso elastico del semiarco, per effetto di $-\mathfrak{M}$ il vertice s'innalza di

$$\delta' = \mathfrak{M} \, . \, \mathfrak{G}' . \, d,$$

per effetto di $-A$ il vertice si abbassa di

$$\delta'' = A \, . \, \mathfrak{G}' . \, d \, . \, d_y,$$

per effetto di $-H$ il vertice s'innalza di

$$\delta''' = H \, . \, \mathfrak{G}' . \, d \, . \, d_x,$$

quindi l'abbassamento del vertice è dato da

$$\delta = \mathfrak{G}' . \, d \, (A d_y - H d_x - \mathfrak{M}). \tag{3}$$

Per un arco circolare omogeneo di sezione costante, di cui sia r il raggio dell'asse geometrico, e ρ il raggio d'inerzia della sezione trasversale rispetto all'asse di flessione, le distanze d, d_x e d_y, ed i momenti $\mathbf{J}_x$ e $\mathbf{J}_{xy}$ sono facilmente calcolabili.

Infatti colle indicazioni della fig. 3 e notando che, per essere l'arco omogeneo e di sezione costante, il peso elastico elementare è proporzionale all'elemento ds di arco, e quindi il baricentro elastico del semiarco coincide col centro di gravità del suo asse geometrico, si ha:

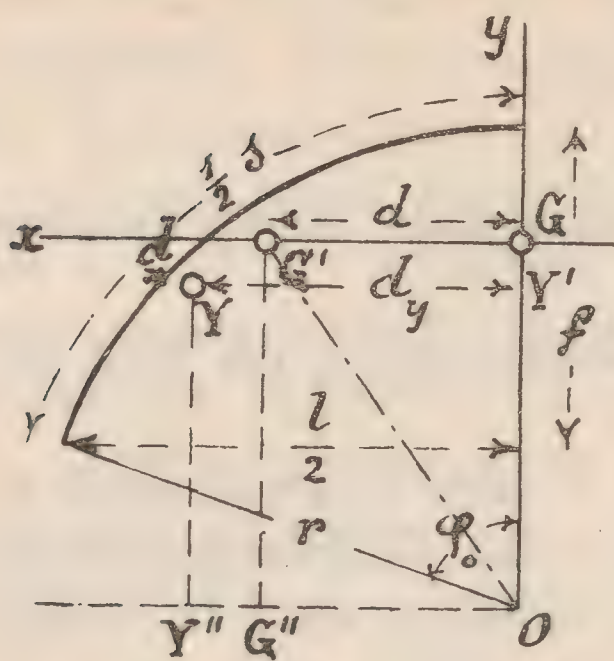



Fig. 3.

$$OG' = r \frac{r \operatorname{sen} \frac{\varphi_0}{2}}{r \frac{\varphi_0}{2}} = r \frac{\operatorname{sen} \frac{\varphi_0}{2}}{\frac{\varphi_0}{2}},$$

$$(4) \qquad d = GG' = OG' \operatorname{sen} \frac{\varphi_0}{2} = r \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{\varphi_0}{2}}{\frac{\varphi_0}{2}},$$

$$d_y = YY' = \frac{\int_0^{\varphi_0} ds . r \operatorname{sen}\varphi . \left(r + \frac{\rho^2}{r}\right) \operatorname{sen}\varphi}{r\varphi_0 . r \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{\varphi_0}{2}}{\frac{\varphi_0}{2}}} = r\left(1 + \frac{\rho^2}{r^2}\right) \frac{\int_0^{\varphi_0} \operatorname{sen}^2 \varphi d\varphi}{2 \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi_0}{2}},$$

ossia

$$(5) \qquad d_y = r\left(1 + \frac{\rho^2}{r^2}\right) \frac{\frac{\varphi_0}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2\varphi_0}{4}}{2 \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi_0}{2}}.$$

Si ha poi

$$G'G'' = OG' \operatorname{sen}\left(90 - \frac{\varphi_0}{2}\right) = r \frac{\operatorname{sen} \frac{\varphi_0}{2} \cos \frac{\varphi_0}{2}}{\frac{\varphi_0}{2}} = r \frac{\operatorname{sen} \varphi_0}{\varphi_0},$$

$$YY'' = \frac{\int_0^{\varphi_0} ds . r \operatorname{sen}\varphi . \left(r + \frac{\rho^2}{r}\right) \cos\varphi}{r\varphi_0 . r \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{\varphi_0}{2}}{\frac{\varphi_0}{2}}} = r\left(1 + \frac{\rho^2}{r^2}\right) \frac{\int_0^{\varphi_0} \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi \, d\varphi}{2 \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi_0}{2}},$$

ossia

$$YY'' = r\left(1 + \frac{\rho^2}{r^2}\right) \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi_0}{4 \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi_0}{2}},$$

e quindi

$$(6)\qquad d_x = G'G'' - YY'' = r\,\frac{\operatorname{sen}\varphi_0}{\varphi_0}\left[1-\left(1+\frac{\rho^2}{r^2}\right)\frac{\varphi_0\operatorname{sen}\varphi_0}{2(1-\cos\varphi_0)}\right].$$

Inoltre, indicando con J il momento d'inerzia della sezione trasversale dell'arco rispetto all'asse di flessione, e con E il modulo di elasticità del materiale, si ha

$$\mathbf{J}_x = \frac{1}{EJ}\left(\int_0^{\varphi_0} ds\,.\,r\cos\varphi\,.\left(r+\frac{\rho^2}{r}\right)\cos\varphi - r\varphi_0\,\overline{G'G''}^2\right) =$$
$$= \frac{1}{EJ}\left[r^3\left(1+\frac{\rho^2}{r^2}\right)\int_0^{\varphi_0}\cos^2\varphi\,d\varphi \qquad - r\varphi_0\,\overline{G'G''}^2\right],$$

ossia

$$(7)\qquad \mathbf{J}_x = \frac{1}{EJ}\left[r^3\left(1+\frac{\rho^2}{r^2}\right)\left(\frac{\operatorname{sen}2\varphi_0}{4}+\frac{\varphi_0}{2}\right) - r\varphi_0\,\overline{G'G''}^2\right].$$

Si ha poi

$$(8)\qquad \mathbf{J}_{xy} = \frac{r\varphi_0}{EJ}\,\overline{GG'}\,(\overline{G'G''} - \overline{YY''}).$$

Ovvero, notando che

$$\varphi_0 = \frac{s}{2r};\qquad \frac{\operatorname{sen}2\varphi_0}{2} = \operatorname{sen}\varphi_0\cos\varphi_0 = l\,\frac{r-f}{2r^2};\qquad 2\,\frac{\operatorname{sen}^2\varphi_0}{\varphi_0} = \frac{l^2}{rs};$$
$$\frac{\operatorname{sen}^2\frac{\varphi_0}{2}}{\frac{\varphi_0}{2}} = \frac{1-\cos\varphi_0}{\varphi_0} = \frac{2f}{s};\qquad \operatorname{sen}\varphi_0 = \frac{l}{2r};$$

le (4), (5), (6), (7), (8) possono anche scriversi

$$d = \frac{2fr}{s},$$

$$d_x = \frac{rl}{s}\left[1-\frac{ls}{8fr}\left(1+\frac{\rho^2}{r^2}\right)\right],$$

$$d_y = \frac{sr}{4f}\left(1-\frac{l}{s}\,\frac{r-f}{r}\right)\left(1+\frac{\rho^2}{r^2}\right),$$

$$\mathbf{J}_x = \frac{lr^2}{4EJ}\left[\left(\frac{s}{l} + \frac{r-f}{r}\right)\left(1 + \frac{\rho^2}{r^2}\right) - 2\frac{l}{s}\right],$$

$$\mathbf{J}_{xy} = \frac{lfr^2}{EJs}\left[1 - \frac{ls}{8fr}\left(1 + \frac{\rho^2}{r^2}\right)\right].$$

Per un arco a tutto sesto queste formole divengono

$$d = \frac{2r}{\pi},$$

$$d_x = \frac{2r}{\pi}\left[1 - \frac{\pi}{4}\left(1 + \frac{\rho^2}{r^2}\right)\right],$$

$$d_y = \frac{\pi r}{4}\left(1 + \frac{\rho^2}{r^2}\right),$$

$$\mathbf{J}_x = \frac{2r^3}{4EJ}\left[\frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{\rho^2}{r^2}\right) - \frac{4}{\pi}\right],$$

$$\mathbf{J}_{xy} = \frac{2r^3}{\pi EJ}\left[1 - \frac{\pi}{4}\left(1 + \frac{\rho^2}{r^2}\right)\right].$$

In tal caso la (1) diviene

$$H = P\frac{1 - \frac{\pi}{4}\left(1 + \frac{\rho^2}{r^2}\right)}{\frac{\pi^2}{4}\left(1 + \frac{\rho^2}{r^2}\right) - 2}$$

come si deduce anche dalla teoria ordinaria, e la (3) assume la forma

$$\delta = \frac{r^3}{EJ}\left[A\frac{\pi}{4}\left(1 + \frac{\rho^2}{r^2}\right) - H\frac{2}{\pi}\left\{1 - \frac{\pi}{4}\left(1 + \frac{\rho^2}{r^2}\right)\right\} - \frac{\mathfrak{M}}{r}\right]$$

nella quale $A = \frac{P}{2}$, H ha l'espressione sopra indicata, ed $\mathfrak{M} = P\frac{r}{\pi}$.

Torino, dicembre 1917.

Un trasformatore dinamico per correnti alternate.

Nota IV di A. G. ROSSI.

1. Un caso singolare. — Il T. D. offre alla tensione applicata primaria una impedenza apparente, funzione della velocità del rotore, in generale prima decrescente poi crescente (*). Le sue componenti:

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
r_{1\kappa} &= r'_1 + K^2 \left[g'_2 \left(g'^2 - b'^2\right) - b'_2\, 2b'g'\right] \\
\lambda_{1\kappa} &= \lambda'_1 - K^2 \left[b'_2 \left(g'^2 - b'^2\right) + g'_2\, 2b'g'\right],
\end{aligned}
$$

sono funzioni della velocità u, $(K = \kappa\mu u)$, crescenti oppure decrescenti (fig. 1), i fattori in K^2 potendo essere $\gtreqless 0$ a seconda

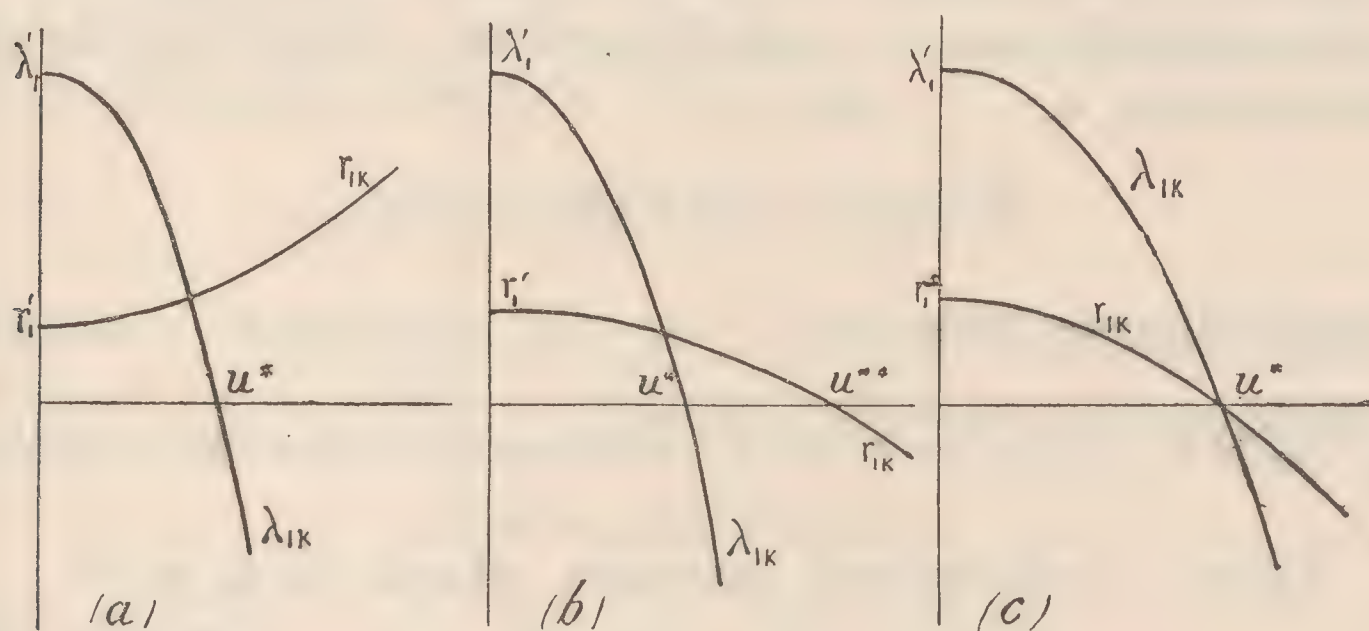



Fig. 1.

degli elementi d'ammettenza g'_2, b'_2 del circuito secondario e g', b' del rotore. Introducendo il rapporto di trasformazione delle tensioni $E_2/V_1 = \mathsf{P} = Ky'y'_1$, le (1) possono scriversi:

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
r_{1\kappa} &= z'_1 \left[\cos\alpha'_1 + \mathsf{P}^2 z'_1 y'_2 \cos\left(\alpha'_2 + 2\alpha'\right)\right] \\
\lambda_{1\kappa} &= z'_1 \left[\operatorname{sen}\alpha'_1 - \mathsf{P}^2 z'_1 y'_2 \operatorname{sen}\left(\alpha'_2 + 2\alpha'\right)\right],
\end{aligned}
$$

(*) " Atti della R. Accad. delle Scienze „. Note I e II, vol. 51, 1915-16; Nota III, vol. 52, 1916-17.

ove $\alpha'_1 = \operatorname{arc\,tg} \lambda'_1/r'_1$, $\alpha'_2 = \operatorname{arc\,tg} \lambda'_2/r'_2$, sono i ritardi statici primario e secondario, ed $\alpha' = \operatorname{arc\,tg} \lambda'/r'$ è il ritardo delle correnti dinamicamente indotte nel rotore rispetto alle correnti induttrici di statore (ritardo dinamico nel rotore). L'impedenza primaria è:

$$
(3) \quad \begin{aligned} z_{1\varkappa} &= \sqrt{z_1'^2 + K^4 y'^4 y_2'^2 - 2K^2 y'^4 y_2'^2 [\Lambda_{12}^2 2\lambda' r' - R_{12}^2 (r'^2 - \lambda'^2)]} \\ &= z_1' \sqrt{1 + \mathrm{P}^4 z_1'^2 y_2'^2 + 2\mathrm{P}^2 z_1' y_2' \cos(\alpha_1' + \alpha_2' + 2\alpha')} . \end{aligned}
$$

Ove le condizioni del circuito secondario si mantengano entro i limiti assegnati dalle relazioni

$$
\frac{g'^2 - b'^2}{2b'g'} < \frac{b'_2}{g'_2} < -\frac{2b'g'}{g'^2 - b'^2} \qquad \text{ossia:} \qquad \alpha_2' + 2\alpha' \underset{<\pi}{\overset{>\pi/2}{}} (2h \pm 1),
$$

tanto la resistenza apparente $r_{1\varkappa}$ come la reattanza apparente $\lambda_{1\varkappa}$ sono funzioni continuamente decrescenti della velocità (fig. 1 *b*). In ogni caso, l'impedenza apparente, (3), passa per un minimo, ad una certa velocità. *Può questo minimo essere nullo?*

In generale, $z_{1\varkappa}$ si annulla per la velocità immaginaria corrispondente a

$$
K^2 = (\lambda' \pm jr')^2 (R_{12}^2 \mp j\Lambda_{12}^2),
$$

la quale diviene reale se

$$
(4) \quad R_{12}^2 2\lambda' r' + \Lambda_{12}^2 (r'^2 - \lambda'^2) = 0, \text{ ossia se: } \alpha_1' + \alpha_2' + 2\alpha' = \pi(2h \pm 1).
$$

Allora: lo sfasamento primario, ritardo di I_1 su V_1,

$$
\varphi_1 = \operatorname{arc\,tg} \frac{\lambda_1'}{r_1'} - \operatorname{arc\,tg} \frac{R^2_{12}\, 2b'g' + \Lambda^2_{12} (g'^2 - b'^2)}{\dfrac{z_1'^2\, z_2'^2}{K^2} - (\Lambda^2_{12}\, 2b'g' - R^2_{12} (g'^2 - b'^2))},
$$

rimane costante col valore α_1', invece di diminuire indefinitamente col crescere della velocità; e, tanto la corrente secondaria come la corrente primaria, raggiungono per una stessa velocità ($\kappa\mu\bar{u} = z' \sqrt{z_1' z_2'}$) un massimo ∞.

In ciò nulla di assurdo, poichè ipoteticamente deve sopperire la sorgente alimentatrice " a tensione costante ". All'atto pratico, nessuna grandezza andrà all'infinito; tuttavia, la cor-

rente secondaria raggiungerà, per condizioni prossime alla (4), un massimo più notevole e la curva di amplificazione salirà dall'origine con maggior rapidità verso questo massimo.

Il caso singolare corrisponde all'evento che le due curve paraboliche (1) sieno *simili* (fig. 1 *c*), chè allora $r_{1\kappa}$ e $\lambda_{1\kappa}$ si annullano insieme per una stessa velocità. La (4) non è altro che la condizione di proporzionalità che deve perciò sussistere fra i coefficienti omologhi delle (1).

$$(4') \quad \frac{\lambda_1'}{r_1'} = -\frac{\lambda_2'(r'^2 - \lambda'^2) + r_2' 2\lambda' r'}{r_2'(r'^2 - \lambda'^2) - \lambda_2' 2\lambda' r'}, \quad \text{ossia:}\ \operatorname{tg}\alpha_1' = -\operatorname{tg}(\alpha_2' + 2\alpha').$$

La seconda delle (3) in tal caso si riduce a

$$(z_{1\kappa}) = z_1'(1 - \mathsf{P}^2 z_1' y_2'),$$

che si annulla per la velocità $\bar{u}$ corrispondente a $\mathsf{P}^2 = z_2'/z_1'$.

Interessa considerare il caso particolare: $\lambda_2'/r_2' = \lambda_1'/r_1'$ (ossia: $\lambda_e/r_e = \lambda_1'/r_1'$, circuito secondario esterno con la stessa costante di tempo dell'apparecchio); oppure anche: $\lambda_2' = \lambda_1'$, $r_2' = r_1'$ (secondario in corto circuito o in parallelo con altro ramo in tensione). Allora la (4′) diviene

$$(5) \qquad 2(r' r_1' - \lambda' \lambda_1')(r_1' \lambda' + r' \lambda_1') = 0,$$

condizione a soddisfarsi fra gli elementi costruttivi interni del T. D. (r_1, λ_1, μ, r, λ). La relazione angolare corrispondente è

$$(5') \qquad \alpha' + \alpha_1' = (2h \pm 1)\pi/2,$$

ciò che richiede: $r' r_1' - \lambda' \lambda_1' = 0$, ossia ultimamente:

$$\frac{\lambda\lambda_1 - \mu^2 - r r_1}{r\lambda_1 + r_1\lambda} = \frac{\mu r}{\mu\lambda - z^2}.$$

Salvo le difficoltà pratiche per approssimarvisi, la relazione (5′) non presenta alcuna impossibilità, poichè l'angolo α', ritardo dinamico nel rotore, $\alpha' = \operatorname{arc\,tg}\lambda/r + \operatorname{arc\,tg}\mu r/(z^2 - \mu\lambda)$, è funzione crescente di μ, la quale assume i valori

$\alpha = \operatorname{arc\,tg}\lambda/r$,	$\pi/2$,	2α,	$\alpha + \pi/2$,	π,	3α, ...
per: $\mu = 0$,	$= r/\operatorname{sen}2\alpha$,	$= \lambda$,	$= z^2/\lambda$,	$= \lambda/-\cos 2\alpha$,	$= 2\lambda$, ...

e quindi, se μ sia abbastanza grande, α' può anche cadere fra il secondo e il terzo quadrante e sommato con α'_1 può dare i $3\pi/2$ richiesti dalla (5′).

Il ritardo della forza elettromotrice secondaria E_2 sulla tensione primaria V_1 essendo poi $\alpha' + \alpha'_1 + \pi/2$, si vede che: *la* (5′) *conduce le due tensioni ad essere in fase.*

L'impedenza primaria, per $z'_2 = z'_1$, diviene

$$z'_1 \sqrt{1 + \mathsf{P}^4 + 2\mathsf{P}^2 \cos 2(\alpha' + \alpha'_1)},$$

e, con la condizione (5′), si annulla per $\mathsf{P} = 1$ ossia $K = z' z'_1$.

2. Il T. D. in parallelo con un trasformatore statico. — Secondo lo schema della fig. 5, Nota II, supponiamo di congiungere in parallelo con i due statori del T. D. i due avvolgimenti di un trasformatore statico (T. S.) (che, per conservare simmetria, supporremo fra loro uguali), primario con primario, secondario con secondario.

Interessa conoscere il *rapporto di trasformazione delle tensioni* del sistema, ossia delle tensioni ai nodi secondari e primari.

L'importanza di questa inserzione si può prevedere se si ammette che la funzione principale del T. D. nel primario sia quella di avanzare la fase della corrente sulla tensione applicata, creando, col crescere della velocità, prima una componente reattiva poi una componente attiva, disponibili per il circuito primario esterno. Tali componenti possono ora venire assorbite dal primario del T. S. che gli è accoppiato. Se, in particolare, il primario del T. D. fornisse, ad una certa velocità, al primario del T. S. tutta la corrente oziosa di cui esso abbisogna, si avrebbe una specie di effetto di risonanza di corrente nel “ circuito „ dei due primari, quale si potrebbe ottenere con un condensatore determinato in derivazione sul primario del T. S. (*).

Sieno adunque: $\mathcal{I}_{01}$ e $\mathcal{I}_{02}$ le correnti negli avvolgimenti del T. S., d'impedenza originaria $\mathcal{Z}_0 = r_0 - j\lambda_0$, col fattore di induzione μ_0 costante; $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$ le correnti negli avvolgimenti

---

(*) La trattazione del problema venne già accennata brevemente a termine della Nota II citata, e qui trova maggiore svolgimento.

del T. D., d'impedenza originaria $\mathcal{Z}_1' = r_1' - j\lambda_1'$; $\mathcal{I}_p$ la corrente totale primaria, o di linea, che porta la tensione $\mathcal{V}$ alla coppia di avvolgimenti primari derivati; $\mathcal{I}_e$ la corrente nel circuito secondario esterno, o di linea, d'impedenza $\mathcal{Z}_e = r_e - j\lambda_e$; $\mathcal{V}_e$ la tensione ai nodi secondari.

L'impedenza apparente di ciascun avvolgimento del T. S., in quanto costituisce un ramo derivato fra due nodi a tensione costante, è:

$$\mathcal{Z}_0' = r_0' - j\lambda_0' = r_0 (1 + \mu_0^2 y_0^2) - j\lambda_0 (1 - \mu_0^2 y_0^2) = 1/\mathcal{Y}_0';$$

e quindi, l'ammettenza apparente:

$$\mathcal{Y}_0' = \frac{\mathcal{Y}_0}{1 + \mu_0^2 \mathcal{Y}_0^2} = g_0' + jb_0'. \tag{6}$$

L'impedenza apparente di ciascun avvolgimento del T. D., a rotore in moto, è, secondo le (1),

$$\mathcal{Z}_{1\kappa} = r_{1\kappa} - j\lambda_{1\kappa} = r_1' + K^2 G'^3 - j(\lambda_1' - K^2 B'^3) = 1/\mathcal{Y}_{1\kappa},$$

ove:

$$G'^3 = g_1'(g'^2 - b'^2) - b_1' 2b'g', \quad B'^3 = b_1'(g'^2 - b'^2) + g_1' 2b'g'.$$

Quindi, l'ammettenza apparente:

$$\mathcal{Y}_{1\kappa} = \frac{\mathcal{Y}_1'}{1 + K^2 \mathcal{Y}'^2 \mathcal{Y}_1'^2}. \tag{7}$$

Le espressioni $\mu_0 \mathcal{Y}_0$ e $K\mathcal{Y}'\mathcal{Y}_1'$ rappresentano i rapporti di trasformazione complessi dei due trasformatori, i cui *moduli* sono:

$$\rho_0 = \mu_0 y_0 < 1; \qquad \mathrm{P} = K y' y_1'.$$

Si avranno le *equazioni del sistema*, scrivendo le espressioni delle cadute di tensione nelle impedenze dei quattro avvolgimenti.

Nei primari:

$$\mathcal{I}_{01} \mathcal{Z}_0' = \mathcal{V} - j\mu_0 \mathcal{Y}_0 \mathcal{V}_e, \qquad \mathcal{I}_1 \mathcal{Z}_{1\kappa} = \mathcal{V} - jK\mathcal{Y}'\mathcal{Y}_1'\mathcal{V}_e; \tag{8}$$

nei secondari:

$$\mathcal{I}_{02} \mathcal{Z}_0' = j\mu_0 \mathcal{Y}_0 \mathcal{V} - \mathcal{V}_e, \qquad \mathcal{I}_2 \mathcal{Z}_{1\kappa} = jK\mathcal{Y}'\mathcal{Y}_1'\mathcal{V} - \mathcal{V}_e. \tag{9}$$

Se ne possono ricavare le correnti esterne di linea:

$$(10) \qquad \mathcal{I}_p = \mathcal{I}_{01} + \mathcal{I}_1, \qquad \mathcal{I}_e = \mathcal{I}_{02} + \mathcal{I}_2,$$

e la tensione secondaria:

$$(11) \qquad \mathcal{V}_e = \mathcal{I}_e \mathcal{Z}_e = \mathcal{V} \frac{j\mu_0 \mathcal{Y}_0 \mathcal{Y}'_0 + jK\mathcal{Y}' \mathcal{Y}'_1 \mathcal{Y}_{1\kappa}}{\mathcal{Y}_e + \mathcal{Y}'_0 + \mathcal{Y}_{1\kappa}}.$$

Il *rapporto di trasformazione delle tensioni a vuoto* si calcola con la (11), ponendovi uguale a zero l'ammettenza esterna $\mathcal{Y}_e = g_e + jb_e$.

Il calcolo si eseguisce nel modo più semplice, sostituendo la (7) e le abbreviazioni seguenti:

$$g_0 g'_0 - b_0 b'_0 = G_0^2, \qquad g' g'_1 - b' b'_1 = G_1^2, \qquad g'_0 g'_1 + b'_0 b'_1 = \sigma^2,$$
$$g_0 b'_0 + g'_0 b_0 = B_0^2, \qquad g' b'_1 + b' g'_1 = B_1^2, \qquad g'_0 b'_1 - b'_0 g'_1 = \delta^2,$$
$$G_0^4 + B_0^4 = y_0^2 y_0'^2. \qquad G_1^4 + B_1^4 = y'^2 y_1'^2. \qquad \sigma^4 + \delta^4 = y_0'^2 y_1'^2.$$

Si realizza così l'espressione, rapporto di due ammettenze:

$$(12) \qquad \left(\frac{V_e}{V}\right)_0 = \sqrt{\frac{\mathsf{P}^4 \rho_0^2 y_0'^2 - 2\mu_0 K^3 \alpha + \mathsf{P}^2 \beta - 2\mu_0 K \gamma + \rho_0^2 y_0'^2}{\mathsf{P}^4 y_0'^2 + 2\mathsf{P}^2 \eta + (g_0' + g_1')^2 + (b_0' + b_1')^2}},$$

ove:

$$\alpha = y'^2 y_1'^4 (b' B_0^2 - g' G_0^2),$$

$$\beta = y_1'^2 + 2 \frac{G_1^4 - B_1^4}{G_1^4 + B_1^4} \rho_0^2 y_0'^2,$$

$$\gamma = B_0^2 [b' (b_1'^2 - g_1'^2) - g' 2 b'_1 g'_1] + G_0^2 [g' (b_1'^2 - g_1'^2) + b' 2 b'_1 g'_1],$$

$$\eta = \frac{G_1^4 - B_1^4}{G_1^4 + B_1^4} (y_0'^2 + \sigma^2) + \frac{2 B_1^2 G_1^2}{G_1^4 + B_1^4} \delta^2.$$

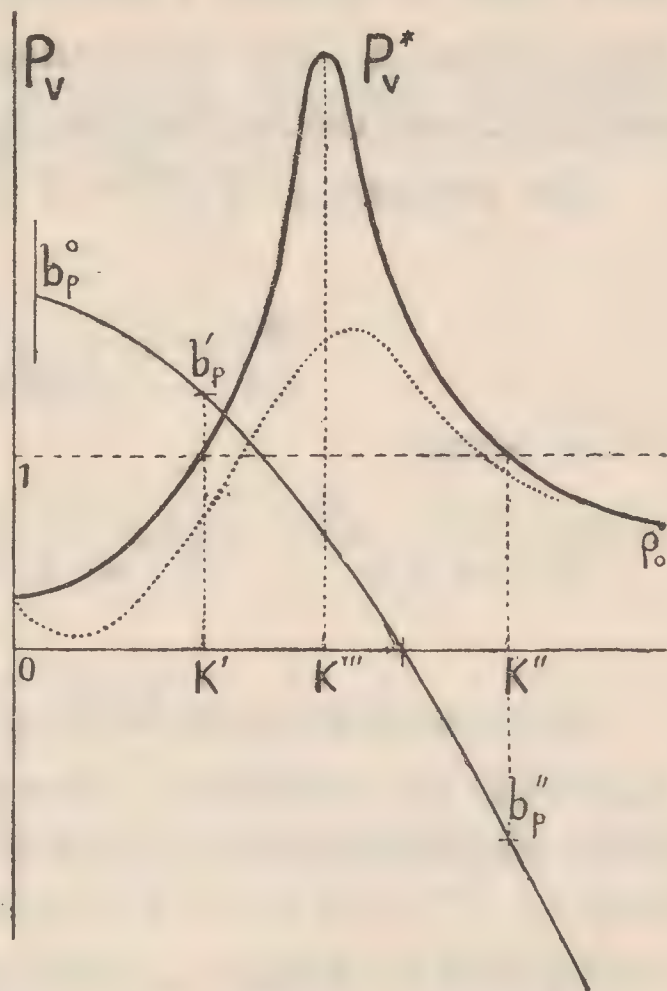
Questo rapporto di trasformazione delle tensioni, dovuto al sistema dei due trasformatori in parallelo, per K (o P) crescente da zero, parte dal valore

$$(12)_0 \qquad \frac{\rho_0 y_0'}{\sqrt{y_0'^2 + y_1'^2 + 2\sigma^2}} < \rho_0$$

con gradiente negativo se $\gamma > 0$, diminuisce fino ad un minimo, poi risale verso un massimo maggiore della unità, ed in seguito decresce assintoticamente (fig. 2, curva punteggiata).

Il minimo iniziale della funzione (12) può scomparire, vantaggiosamente per lo scopo richiesto al sistema, allorchè il gradiente all' origine divenga positivo. Per ciò richiedesi: $\gamma \gtreqless 0$. E senza perdere i suoi caratteri generali, la (12) si semplifica, se abbiasi: $-\alpha = y'^2 y_1'^2 \gamma$, chè allora i due termini in K^3 e K si conglobano in uno solo: $-2\mu_0 y' y_1' \mathsf{P} (\mathsf{P}^2 - 1) (\lambda' B_0^2 - r' G_0^2)$.

Fig. 2.

La condizione per questo è semplicemente:

$$(12^*)_1 \qquad \frac{B_0^2}{G_0^2} = \frac{b_1'}{g_1'}, \qquad \text{ovverosia:} \qquad \frac{2\lambda_0 r_0}{r_0^2 - (\lambda_0^2 - \mu_0^2)} = \frac{\lambda_1'}{r_1'},$$

e potrà effettuarsi se il T. S. sia a riluttanza o a dispersione variabile. Notisi che la $(12^*)_1$ può anche scriversi: $b_0/g_0 = \delta^2/\sigma^2$, *e quindi esclude* $\delta^2 \gtreqless 0$ (v. più innanzi).

Il caso ottimo si avrà infine se sieno nulli entrambi i coefficienti di K^3 e di K, ciò che conduce alle condizioni:

$$(12^*)_{1,2} \qquad \frac{2\lambda_0 r_0}{r_0^2 - \lambda_0^2 + \mu_0^2} = \frac{\lambda_1'}{r_1'} = \frac{r'}{\lambda'}.$$

La seconda $(G_1^2 = 0)$ non è altro che la $(5')$.

Supponendo dunque realizzate queste due condizioni, la (12) si riduce alla forma (rapporto di due ammettenze normali):

$$(13) \qquad \mathsf{P}_r{}^* = \sqrt{\frac{\rho_0^2 y_0'^2 (1 - \mathsf{P}^2)^2 + y_1'^2 \mathsf{P}^2}{[g_1' + g_0'(1 - \mathsf{P}^2)]^2 + [b_1' + b_0'(1 - \mathsf{P}^2)]^2}},$$

che può anche scriversi:

$$(13)' \qquad \mathsf{P}_r{}^* = \sqrt{\frac{\rho_0^2 y_0'^2 (\mathsf{P}^2 - 1)^2 + y_1'^2 (\mathsf{P}^2 - 1) + y_1'^2}{y_1'^2 (\mathsf{P}^2 - 1)^2 - 2\sigma^2 (\mathsf{P}^2 - 1) + y_1'^2}}.$$

Questa funzione, con P crescente, parte dal valore $(12)_0$ con gradiente nullo e assume tosto un andamento crescente. Passa per il valore 1 avviandosi rapidamente ad un massimo acuto, dopo di che diminuisce ripassando per l'unità e tendendo assintoticamente al valore $\rho_0 > (12)_0$; (fig. 2).

Le ascisse di $P_V^* = 1$ son date da:

$$P^2 = 1 + \frac{y_1'^2 + 2\sigma^2}{2y_0'^2(1-\rho_0^2)}(1 \mp 1),$$

e cioè sono:

$$K' = z'z_1', \qquad K'' = z'z_1'\sqrt{\frac{(g_0'+g_1')^2 + (b_0'+b_1')^2 - \rho_0^2 y_0'^2}{y_0'^2(1-\rho_0^2)}}.$$

Intermediariamente a questi valori *uno*, la funzione P_V^* raggiunge un massimo. Uguagliando a zero la derivata della (13′), presa rispetto a $P^2 - 1 = X^2$, si ha l'equazione

$$X^4 y_0'^2 (y_1'^2 + 2\rho_0^2\sigma^2) + 2X^2 y_0'^2 y_1'^2 (1-\rho_0^2) - y_1'^2(y_1'^2 + 2\sigma^2) = 0,$$

la cui radice maggiore, sempre positiva, sostituita in (13′) dà per l'espressione del massimo:

$$(14) \qquad P_V^*{}_{max} =$$

$$= \frac{y_0' y_1'}{\delta^2\sqrt{2}}\sqrt{1 + \rho_0^2 + \frac{\sigma^2}{y_0'^2} + \sqrt{\left(1+\rho_0^2+\frac{\sigma^2}{y_0'^2}\right)^2 + \frac{\delta^4}{y_0'^2 y_1'^2}\left(\frac{y_1'^2}{y_0'^2} - 4\rho_0^2\right)}}.$$

L'ascissa K''' (fig. 2) di questo massimo è più prossima a K' che a K''. L'esame della derivata seconda della (13′) mostra che i due rami della curva, prima e dopo il massimo, sono estesamente convessi verso l'asse delle ascisse. La P_V^* avrebbe quindi tutti i caratteri di una curva *teorica* di risonanza, salvo il massimo a ∞; questo è trattenuto a un valore finito per la condizione stessa $(12^*)_1$ che esige sia: $\delta^2 > 0$, $(b_1'/g_1' > b_0'/g_0'$: la costante di tempo del T. D. maggiore di quella del T. S.).

Che si tratti tuttavia di un caso *analogo* a quello della risonanza ottenibile con un condensatore, è dimostrato dal fatto che la sopraelevazione della tensione secondaria V_e è accompagnata dalla graduale scomparsa della corrente di magnetizzazione o componente reattiva della corrente totale I_p che porta

la tensione V ai nodi primari; onde si può ritenere che essa venga fornita dal T. D.

Infatti: l'espressione simbolica di tale corrente, (10, 1[a]),

$$(15)\qquad \mathcal{I}_p = \mathcal{V}\frac{\mathcal{Y}_0\mathcal{Y}'_0 + \mathcal{Y}'_1\mathcal{Y}_{1\kappa} + 2\mathcal{Y}'_0\mathcal{Y}_{1\kappa}(1+\mu_0\mathcal{Y}_0 \,.\, K\mathcal{Y}'\mathcal{Y}'_1)}{\mathcal{Y}'_0 + \mathcal{Y}_{1\kappa}}$$

posta sotto la forma canonica

$$\mathcal{I}_p = \mathcal{V}\frac{\Gamma^2 + j\mathrm{B}^2}{G+jB} = \mathcal{V}(g_p + jb_p),$$

fornisce la condizione affinchè essa si riduca alla sola componente attiva $\mathcal{V}g_p$:

$$(16)\qquad b_p = \frac{\mathrm{B}^2 G - \Gamma^2 B}{G^2+B^2} = 0\,.$$

Con l'uso della (7) e delle abbreviazioni precedenti, se ne ritrae una equazione del 4° completa in $\mathsf{P} = Ky'y'_1$ (*), la quale con l'introduzione delle condizioni $(12^*)_{1,2}$ si riduce alla forma:

$$(17)\qquad \begin{aligned} &\mathsf{P}^4 b_0 y_0'^2 - \mathsf{P}^2(2b_0y_0'^2 + (b'_1+2b'_0)\sigma^2 + (g'_1+2g'_0)\delta^2) + \\ &+ 2\mu_0\mathsf{P}^3(\delta^2B_0^2 - \sigma^2G_0^2) - 2\mu_0\mathsf{P}(\delta^2B_0^2 - (\sigma^2+y_1'^2)G_0^2) + \\ &+ b_0y_0'^2 + (b'_1+2b'_0)(\sigma^2+y_1'^2) + (g'_1+2g'_0)\delta^2 = 0\,. \end{aligned}$$

Ora è sufficiente per noi il riconoscere che b_p cambia di segno in un certo campo di variazione della velocità (o di P) e che questo campo è quello medesimo ove culmina l'elevazione della tensione secondaria.

L'espressione di b_p è il rapporto fra il polinomio (17) e (G^2+B^2) che è il denominatore stesso della (13).

Sostituendovi i due valori di P che corrispondono a $\mathsf{P}_r^* = 1$, si verifica che per la prima ascissa ($\mathsf{P}'=1$) si ha $b_p > 0$; e per la seconda ascissa, $b_p < 0$. Vuol dire che nel campo intermedio esisterà un valore di P reale e positivo che soddisfa la (17), ossia una certa velocità per la quale il " circuito " dei due avvolgimenti primari è percorso dalla stessa corrente reattiva, sopperita dal T. D.

(*) L'equazione del 10° annunciata a termine della Nota II citata, per questo stesso problema, proveniva da un fattore inutile del 6°, erroneamente introdottosi durante gli sviluppi.

Per $\mathsf{P}' = 1$ si trova:

$$(b_p)' = b_1' + 2b_0' + 2\mu_0 y_0^2 y_0'^2 (r_0^2 - (\lambda_0^2 - \mu_0^2)),$$

grandezza positiva. La corrente I_p è ancora in ritardo di fase sulla tensione V. E per:

$$\mathsf{P}''^2 = 1 + \frac{y_1'^2 + 2\sigma^2}{y_0'^2 (1 - \rho_0^2)} = \frac{(g_1' + g_0')^2 + (b_1' + b_0')^2 - \rho_0^2 y_0'^2}{y_0'^2 (1 - \rho_0^2)},$$

si trova:

$$(b_p)'' = \frac{b_0 - \mathsf{A}\,[b_1' + 2b_0' + 2\mu_0 G_0^2 \mathsf{P}''] - \Delta\,[g_1' + 2g_0' - 2\mu_0 B_0^2 \mathsf{P}'']}{[1 - \Sigma]^2 + \Delta^2},$$

ove:

$$\mathsf{A} = \frac{1 - \rho_0^2}{(y_1'^2 + 2\sigma^2)^2} \left[\sigma^4 \left(1 + \rho_0^2 + \frac{y_1'^2}{\sigma^2}\right) - \delta^4 (1 - \rho_0^2)\right] > 0,$$

$$\Delta = \frac{\delta^2 (1 - \rho_0^2)}{y_1'^2 + 2\sigma^2} = \frac{(g_0' b_1' - g_1' b_0')(1 - \rho_0^2)}{g_1' (g_1' + 2g_0') + b_1' (b_1' + 2b_0')} > 0,$$

$$\Sigma = \frac{\sigma^2 (1 - \rho_0^2)}{y_1'^2 + 2\sigma^2}. \qquad (\Sigma^2 + \Delta^2 = \Sigma - \mathsf{A}; \quad \mathsf{A} > \Delta).$$

La grandezza $(b_p)''$ è dunque francamente negativa. La compensazione della componente reattiva dei due primari è ora in eccesso e la corrente I_p è in avanzo di fase sulla tensione V. Fra P' e P'' giace quindi la radice reale positiva della (17) che interessa il nostro problema; essa *non* ha precisamente il valore che corrisponde al massimo della tensione secondaria, ma la supera alquanto (fig. 2).

Rimane adunque dimostrato che, in determinate condizioni, un T. D. in parallelo con un T. S. è capace di elevare il suo fattore di potenza, innalzando la tensione (e quindi la corrente) secondaria. Ed è evidente che debbano necessariamente richiedersi certe relazioni condizionali costruttive fra i due apparecchi da farsi funzionare in parallelo nel modo anzidetto, sia fra grandezze assolute, sia di rapporti, se si vuole che *gli effetti si sommino con una legge semplice.*

L'Accademico Segretario
CARLO FABRIZIO PARONA

PREMIO DI FONDAZIONE GAUTIERI

La Reale Accademia delle Scienze di Torino conferirà nell'anno 1918 un premio di fondazione Gautieri a quell'opera di Filosofia, inclusa la Storia della Filosofia, che sarà giudicata migliore fra le pubblicate negli anni 1915-1917. Il premio di L. 1900 sarà assegnato ad autore italiano (esclusi i Soci nazionali residenti e non residenti dell'Accademia) e per opere scritte in lingua italiana.

Gli autori possono inviare all'Accademia le pubblicazioni sulle quali desiderano richiamarne l'attenzione, avvertendo che non saranno restituite le opere per tal fine ad essa pervenute.

Torino, dicembre, 1917.

L'Accademico Segretario
della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche
ETTORE STAMPINI

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona. Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di **C. Frati, A. Baudi di Vesme** e **C. Cipolla.**

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in-f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di **C. Cipolla, G. De Sanctis** e **P. Fedele.**

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in-4°, di 70 pagg. e 96 tav.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza del 16 Dicembre 1917 . *Pag.* 89

Burali-Forti (C.). — Alcuni sistemi di linee su di una superficie „ 91

Boverio (Ernesto). — Sopra la derivazione dei canali . . „ 104

Sannia (Gustavo). — Le serie di potenze di una variabile sommate col metodo di Borel generalizzato (Nota I) . . . „ 115

Guidi (C.). — Sul calcolo dell'arco elastico senza cerniere . „ 129

Rossi (A. G.). — Un trasformatore dinamico per correnti alternate (Nota IV) . . . . „ 135

Premio di fondazione Gautieri . . . . „ 145

Tip. Vincenzo Bona — Torino

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. LIII. Disp. 4a, 1917-1918.

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 3.
1918

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 30 Dicembre 1917.

PRESIDENZA DEL SOCIO ANZIANO GIUSEPPE PEANO

Sono presenti i Soci Guareschi, Guidi, Mattirolo, Grassi, Fusari, Panetti e Parona Segretario.

Scusano l'assenza il Direttore di Classe Senatore D'Ovidio e il Socio Segre.

Si legge e si approva l'atto verbale della precedente adunanza.

Il Segretario, a nome del Socio D'Ovidio, presenta, per la stampa negli *Atti*, la Nota II del Prof. G. Sannia, *Le serie di potenze di una variabile sommate col metodo di Borel generalizzato.*

LETTURE

Le serie di potenze di una variabile sommate col metodo di Borel generalizzato.

Nota II^a di GUSTAVO SANNIA (a Cagliari).

§ 4. — Stelle di sommabilità della (1).

14. — Fissiamo una semiretta p di origine O ed un numero intero r.

Su p vi è sempre almeno un punto ove la (1) è sommabile (B, r) ed è il punto O (n° 9). Se non è il solo, può darsi che la (1) sia sommabile (B, r) in tutti i punti di p.

Esclusi questi due casi estremi, dividiamo i punti di p in due classi, ponendo nell'una tutti quelli ove la (1) è sommabile (B, r) e nell'altra tutti i rimanenti. Per il teorema fondamentale, le due classi ammetteranno un punto P_r di separazione, tale che la (1) sarà sommabile (B, r) in tutti i punti del segmento $s = OP_r$ (tranne forse in P_r) e non lo sarà negli altri punti di p.

Inglobando anche i primi due casi, possiamo dunque asserire che: *il luogo dei punti di* p *ove la* (1) *è sommabile* (B, r) *è un segmento* $\mathrm{s}_r = \mathrm{OP}_r$ *di origine* O (*escluso forse l'estremo* P_r), che può esser finito o non e può anche ridursi al solo punto O.

15. — Variando l'intero r da $-\infty$ a $+\infty$, si ha sopra p una successione, illimitata in due sensi, di segmenti

$$\ldots,\ s_{-2},\ s_{-1},\ s_0,\ s_1,\ s_2,\ \ldots, \tag{28}$$

in ciascuno dei quali la (1) è sommabile col metodo (9) corrispondente.

I segmenti (28) *son tali che ciascuno contiene il seguente* [1]; *perciò ammettono due segmenti-limite* s *e* t: *il primo che li contiene tutti ed il secondo che è in tutti contenuto.*

Il segmento s = OG (*escluso forse l'estremo* G) *è il luogo dei punti di* p *ove la* (1) *è sommabile* Bg, ossia con qualche metodo (9) [2].

Il segmento t = OT (*escluso forse l'estremo* T) *è il luogo dei punti di* p *ove la* (1) *è sommabile* Bt, ossia con tutti i metodi (9) [3].

Notiamo infine che i segmenti s e t possono coincidere o ridursi al solo punto O (solo il secondo o ambedue) o esaurire la semiretta p (solo il primo o ambedue) [4].

16. — Ora fissiamo r e facciamo variare la semiretta p intorno ad O. Allora il segmento $s_r = OP_r$ genera la *stella* σ_r *di sommabilità* (B, r) della (1), della quale: O è il centro, s_r è

---

[1] Per il teorema enunciato al n° 8. Naturalmente non è escluso che: due o più consecutivi (o anche tutti) coincidano, o che uno (e quindi ciascuno dei seguenti) si riduca al punto O, o che tutti si riducano al punto O, o che uno (e quindi ciascuno dei precedenti) esaurisca la semiretta p, o che tutti esauriscano la semiretta p.

[2] In certo senso si può dire che: *la* (1) *non è sommabile* Bg *nel punto* G, *in generale.* Perchè: *affinchè lo sia è necessario che tutti i segmenti* (28) *coincidano (fra loro e con* s) *a partire da uno di essi in poi verso sinistra.*

Infatti se (1) in G è sommabile Bg, vuol dire che ivi è sommabile con qualcuno dei metodi (9), e quindi (n° 8) con tutti i precedenti; dunque G apparterrà ai corrispondenti segmenti (28), dei quali d'altra parte non può essere che l'estremo diverso da O (tale essendo pel segmento s che li contiene).

[3] In certo senso si può dire che: *la* (1) *è sommabile* Bt *nel punto* T, *in generale.* Perchè: *affinchè non lo sia è necessario che tutti i segmenti* (28) *coincidano (fra loro e con* t) *a partire da uno di essi in poi verso destra.*

Infatti se (1) in T non è sommabile Bt, vuol dire che ivi non è sommabile almeno con uno dei metodi (9), e quindi (n° 8) neppure con tutti i seguenti, perciò T non sarà certamente interno in senso stretto ai corrispondenti segmenti (28); e poichè d'altra parte non può esserne esterno (altrimenti lo sarebbe anche a t che è in essi contenuto), deve necessariamente coincidere con l'estremo diverso da O.

[4] Il Borel (loc. cit., p. 108) ha dimostrato che: *se la* (1) *è assolutamente sommabile* (cfr. la nota al n° 8) *in un punto* M_0, *lo è su tutto* OM_0.

Da ciò, ragionando come al n° 14, si deduce che *il luogo dei punti di* p

un *raggio*, ed il luogo degli estremi P_r dei raggi ne è il *contorno* [1].

La (1) *è sommabile* (B, r) *nei punti interni a* σ_r *in senso stretto e forse in punti del contorno* (mai nei punti esterni).

Come i segmenti (28), così *le infinite stelle di sommabilità*

$$(29) \qquad \ldots, \sigma_{-2}, \sigma_{-1}, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \ldots$$

son tali che ciascuna è contenuta nella precedente.

Perciò ammettono due stelle-limite σ *e* τ: *la prima che le contiene tutte e la seconda che è in tutte contenuta.*

σ e τ hanno per centro O, per raggi i segmenti s e t, ecc.

La stella σ *(a parte il contorno) è il luogo dei punti del piano ove la* (1) *è sommabile* Bg; *la stella* τ *(a parte il contorno) è il luogo dei punti ove la* (1) *è sommabile* Bt.

Le diremo perciò *stelle di sommabilità* Bg *e* Bt.

---

ove la (1) *è assolutamente sommabile è un segmento* OA *(escluso forse l'estremo* A*) finito o non.*

Hardy (loc. cit., p. 44) ha poi dimostrato che: *se in un punto* M_0 *la* (1) *è sommabile* (B, 0) *insieme con le infinite altre serie*

$$u_k z^k + u_{k+1} z^{k+1} + \ldots \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

è assolutamente sommabile su tutto OM_0, *tranne forse in* M_0.

Ora, poichè la proprietà assegnata da Hardy in M_0 *caratterizza le serie sommabili* Bt (come ho dimostrato nella seconda nota citata al n° 6). si può anche dire che: *se la* (1) *è sommabile* Bt *in un punto* M_0, *è assolutamente sommabile su* OM_0, *tranne forse in* M_0.

Da ciò si deduce che: *i segmenti* OA *e* t = OT *coincidono; però, mentre in* O *e nei punti interni in senso stretto la* (1) *è nel contempo sommabile* Bt *e assolutamente sommabile, nel punto* A ≡ T *può essere sommabile* Bt *senza essere assolutamente sommabile.*

Infatti in O o nei punti interni in senso stretto ad OT la (1) è assolutamente sommabile, perchè per ogni tal punto M se ne può assumere un secondo M_0 compreso fra M e T: in M_0 la (1) è sommabile *Bt*, quindi è assolutamente sommabile su tutto OM_0 (escluso M_0) ed in particolare in M. Nei punti esterni ad OT la (1) non è sommabile *Bt*, quindi non è neppure assolutamente sommabile. Infine in T, se la (1) è assolutamente sommabile, è pure sommabile *Bt*, ma forse non viceversa (cfr. la nota al n° 8).

[1] Il punto O può anche appartenere al contorno, perchè σ_r può avere qualche raggio nullo.

La stella σ è dunque la regione più ampia del piano complesso ove la (1) ha una somma col metodo *Bg*. Ed è importante che, come risulta dal n° 10: *le serie di potenze si possono sottoporre nei punti delle loro stelle di sommabilità* Bg [1] *a tutte quelle operazioni aritmetiche alle quali si potevano sottoporre nei loro cerchi di convergenza, e con i medesimi risultati* [2].

17. — Per il seguito sarebbe di somma importanza conoscere le linee e le aree del piano ove la sommabilità della (1) è *uniforme* (n° 7).

Di linee siffatte conosciamo soltanto le semirette uscenti da O, *e di aree non ne conosciamo alcuna* [3].

Precisamente si ha, dal teorema del n° 13, che:

La (1) *è sommabile* (B, r) *uniformemente su ogni raggio* $s_r = OP_r$ *della stella* σ_r, *escluso un intorno di* O *se* $r \leq 0$ *ed un intorno di* P_r *se ivi la* (1) *non è sommabile* (B, r).

Perchè nell'enunciato di quel teorema si può supporre che

---

[1] Tranne forse in punti del contorno.

[2] Due o più stelle consecutive (29) possono coincidere, una (e quindi ciascuna delle seguenti e τ, o soltanto τ) può ridursi al solo centro O, una (e quindi ciascuna delle precedenti e σ, o soltanto σ) può ricoprire tutto il piano, ecc.

Poichè il metodo $(B, 0)$ non è che l'originario metodo esponenziale del Borel (n° 8 in nota), la stella σ_0 coincide con quella già considerata dal Praghmen (n° 2).

Inoltre: *la stella* τ *coincide con quella* α *considerata dal* Borel, con questo però che, mentre nei punti interni in senso stretto la (1) è nel contempo sommabile *Bt* ed assolutamente sommabile, nei punti del contorno può essere sommabile *Bt* senza essere assolutamente sommabile (e non viceversa). Ciò segue dalla nota al n° 15.

[3] Invece il Borel afferma, senza dimostrarlo (loc. cit., p. 157, in nota), che l'integrale (6) per $r = 0$ è convergente uniformemente, cioè che la (1) è sommabile $(B, 0)$ uniformemente, in ogni regione interna alla stella $\alpha \equiv \tau$. Lo stesso asserisce il Bromwich (loc. cit., n° 111) e dice che *ciò segue dal teorema enunciato nella penultima nota al n° 13* (ove si ponga $r = 0$).

Ed allora si potrebbe anche dedurne che *la* (1) *è sommabile* (B, r) *uniformemente in ogni regione interna alla stella* σ_r.

Ma tutto ciò non è lecito, poichè dalla convergenza uniforme di un integrale *lungo linee ricoprenti un'area* non segue punto (in generale) la convergenza uniforme *nell'area* (bensì viceversa).

il punto M_0 sia il punto P_r o un punto vicinissimo a P_r, secondo che in P_r la (1) è sommabile (B, r) oppur no.

Di qui segue che: *per ogni punto della stella* σ *(diverso dal centro* O*) e nel quale la* (1) *sia sommabile* Bg [1], *si può fissare un intorno (lineare) sul raggio di* σ *che vi passa, nel quale la* (1) *sia sommabile uniformemente con qualche metodo* (B, r).

Perchè in un tal punto la (1) sarà sommabile (B, r) per qualche r, quindi il punto apparterrà ad un raggio di qualche stella σ_r (senza cadere in O).

Poi: *i soli intorni lineari del punto* O *nei quali la* (1) *è sommabile uniformemente con qualche metodo* (B, r) *sono i raggi non nulli della stella* σ_1.

Poichè sopra un raggio $s_1 = OP_1$ non nullo di σ_1 la (1) è sommabile $(B, 1)$, e questa sommabilità è sempre uniforme (anche intorno ad O), per il teorema del n° 13. Se poi il raggio s_1 di σ_1 giacente sopra una semiretta p uscente da O è nullo, tali saranno pure i raggi corrispondenti (non maggiori) $s_2, s_3, \ldots$ delle stelle $\sigma_2, \sigma_3, \ldots$; sicchè la (1) su p potrà essere sommabile intorno ad O solo con metodi (B, r) di ordine $r \leq 0$, e questa sommabilità non è uniforme intorno ad O.

Osserviamo infine che il fatto che noi non conosciamo, *per una serie* (1) *generica*, aree in cui la sommabilità sia uniforme, non esclude che per serie particolari si possa trovarne, ma occorrerà una verifica caso per caso. Il seguente teorema riduce spesso la verifica al contorno dell'area.

Se la serie (1) *è sommabile* (B, r) *uniformemente lungo un arco finito di linea che non contenga il punto* O, *lo è pure nell'area ricoperta dai raggi vettori che vanno dal punto* O *ai punti dell'arco, escluso un intorno di* O *se* r ≤ 0.

Dette ρ e θ le coordinate polari di un punto z, l'integrale (6) si può (come al n° 13) trasformare nell'integrale (25). Giusta l'ipotesi, questo integrale è convergente uniformemente quando il punto $z(\rho, \theta)$ si muove sopra un arco la cui equazione polare sia

$$\rho = \varphi(\theta), \qquad \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1,$$

---

[1] Condizione che può escludere solo punti del contorno di σ.

e noi dobbiamo dimostrare che esso è uniformemente convergente anche nell'area definita da

$$(30)\qquad 0 < \rho \leq \varphi(\theta), \qquad \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1 \quad \text{se} \quad r > 0 \ (^1),$$

$$(31)\qquad h \leq \rho \leq \varphi(\theta), \qquad \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1 \quad \text{se} \quad r \leq 0,$$

ove h è un numero positivo comunque piccolo.

Basta dimostrarlo per la sua parte reale e per il coefficiente di i della sua parte immaginaria, che sono integrali del tipo

$$\rho^{r-1} \int_0^\infty e^{-\frac{b}{\varrho}} f(b, \theta)\, db.$$

Ora, per il lemma I del nº 12, questo integrale è appunto uniformemente convergente nell'area (30), e quindi anche nell'area parziale (31), se si sopprime il fattore esterno ρ^{r-1}; ma poichè questo fattore si conserva limitato nell'area (30) o (31), secondo che è $r > 0$ o $r \leq 0$, ripristinandolo l'integrale non perde la sua proprietà di convergenza uniforme.

§ 5. — Stelle di sommabilità delle serie derivate della (1).

18. — Come d'ordinario, chiameremo *serie (prima) derivata* della (1) la serie

$$(1)' \qquad u_1 + 2u_2 z + 3u_3 z^2 + \ldots$$

che è dello stesso tipo

$$(32) \qquad v_0 + v_1 z + v_2 z^2 + \ldots$$

---

(1) Quest'area non comprende il punto O, che abbiamo escluso sol perchè la trasformazione eseguita dell'integrale (6) in (25) non vale in tal punto, nel quale del resto (25) non ha senso. Ma ha senso ed è convergente l'integrale (6), sicchè infine il punto O deve aggregarsi al campo (30) di convergenza uniforme dell'integrale (6) (quando $r > 0$).

ove

$$v_n = (n+1)\, u_{n+1} \quad (33)$$

[1].

La sua serie associata di ordine r è (nº 7)

$$v^{(r)}(a, z) = \sum_{n=0}^{\infty} v_{n+r}\, z^{n+r} \frac{a^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r+1)\, u_{n+r+1}\, z^{n+r} \frac{a^n}{n!}, \quad (34)$$

cioè si ottiene derivando, termine a termine rispetto a z, la serie associata di ordine $r+1$ alla (1), sicchè (almeno formalmente)

$$v^{(r)}(a, z) = \frac{d}{dz} u^{(r+1)}(a, z). \quad (35)$$

Ne segue che: *quando le serie associate alla* (1) *sono trascendenti intere rispetto ad* a *per ogni* z, *tali sono anche quelle associate alla* (1) *(e viceversa), e tra le loro somme passa (effettivamente) la relazione* (35); *si ha inoltre la relazione*

$$z v^{(r)}(a, z) = r u^{(r+1)}(a, z) + a u^{(r+2)}(a, z) \quad (36)$$

[2].

19. — Ciò premesso, dimostriamo che:

La stella σ'_r *di sommabilità* (B, r) *della* (1)′ *coincide con la stella* σ_{r+2} *di sommabilità* (B, r + 2) *della* (1), *sicchè nei punti interni in senso stretto la* (1)′ *è sommabile* (B, r) *e la* (1) *è sommabile* (B, r + 2); *circa i punti del contorno si può asserire che ove la* (1)′ *è sommabile* (B, r), *la* (1) *è sommabile* (B, r + 2) *(ma non viceversa).*

Supponendo che σ'_r non si riduca al centro O, *indichi* M′ *un suo punto generico diverso da* O *nel quale la* (1)′ *sia somma-*

---

[1] Non così la serie

$$(b) \qquad 0 + u_1 + 2u_2 z + 3u_3 z^2 + \ldots$$

che si deduce da (1) derivandola termine a termine, e che ha due termini indipendenti da z. Si noti però che (1)′ e (b) sono sommabili Bg nei medesimi punti, solo che dove la (b) è sommabile (B, r) la (1)′ è sommabile (B, $r-1$) e con ugual somma (cfr. il nº 11).

[2] Facile a verificare formalmente.

bile (B, r) (sicchè M' rappresenti un punto qualunque interno a σ'_r in senso stretto e forse anche del contorno). Dimostreremo che in esso la (1) è sommabile $(B, r+2)$; da cui seguirà che σ_r è contenuta in σ_{r+2} [1].

L'esistenza dei punti M' assicura (nº 9) che le serie associate alla (1)$'$ sono trascendenti intere rispetto ad a per ogni z, quindi (nº 18) tali saranno anche quelle associate alla (1) e varranno le (35) e (36).

Inoltre in M' è convergente l'integrale associato di ordine r alla (1)$'$ (nº 7)

$$(37) \qquad \int_0^\infty e^{-a} v^{(r)}(a, z)\, da = \int_0^\infty e^{-a} \frac{d}{dz} u^{(r+1)}(a, z)\,;$$

anzi (nº 17) esso è convergente uniformemente in un intorno (lineare) di M' preso sul raggio s'_r di σ_r che passa per M', quindi è convergente anche

$$(38) \qquad \int_0^\infty e^{-a} u^{(r+1)}(a, z)\, da$$

e la (37) può scriversi

$$(39) \qquad \int_0^\infty e^{-a} v^{(r)}(a, z)\, da = \frac{d}{dz} \int_0^\infty e^{-a} u^{(r+1)}(a, z)\, da \quad (^2).$$

Dalla convergenza in M' degli integrali (37) e (38) segue, per la (36), quella dell'integrale

$$(40) \qquad \int_0^\infty e^{-a}\, a\, u^{(r+2)}(a, z)\, da\,,$$

e da questa, come ora proveremo, segue quella di

$$(41) \qquad \int_0^\infty e^{-a} u^{(r+2)}(a, z)\, da\,,$$

onde potremo affermare che la (1) è sommabile $(B, r+2)$ in M'.

---

[1] Che se poi σ'_r si riduce al centro O, è senz'altro contenuta in σ_{r+2}.

[2] Qui naturalmente la derivata s'intende presa lungo il raggio s'_r soltanto.

Per dimostrare che se è convergente (40) lo è pure (41), osserviamo che, mediante la (22) (ove si cambi r in $r+2$) e la (24), questi due integrali si trasformano in

$$(42)\qquad \int_0^\infty e^{-\frac{b}{\varrho}}\, b u^{(r+2)}(be^{i\theta}, 1)\, db, \qquad \int_0^\infty e^{-\frac{b}{\varrho}}\, u^{(r+2)}(be^{i\theta}, 1)\, db$$

(a prescindere da un fattore); ora le loro parti reali (ed i coefficienti delle loro parti immaginarie) sono integrali rispettivamente del tipo

$$(42)'\qquad \int_0^\infty e^{-\frac{b}{\varrho}}\, b f(b)\, db \qquad \text{e} \qquad \int_0^\infty e^{-\frac{b}{\varrho}}\, f(b)\, db,$$

onde (per il lemma IV, n° 12) dalla convergenza del primo segue quella del secondo.

Ora partiamo, viceversa, da σ_{r+2} e, supponendo che non si riduca al centro O, *rappresentiamo con* M *un suo punto generico, interno in senso stretto, diverso da* O: dimostreremo che in M la $(1)'$ è sommabile (B, r) (da cui seguirà che σ_{r+2} è contenuta in σ'_r).

L'esistenza dei punti M assicura (n° 9) che le serie associate alla (1) sono trascendenti intere rispetto ad a per ogni z, quindi (n° 18) tali saranno quelle associate alla $(1)'$ e varranno le (35) e (36).

Inoltre in M la (1), non solo è sommabile $(B, r+2)$ (per l'ipotesi fatta su M), ma è anche sommabile $(B, r+1)$ (per il n° 8); quindi in M è convergente, non solo l'integrale (38), ma anche l'integrale (41).

Dico che dalla convergenza di (41) segue quella di (40).

Abbiamo visto poc'anzi che questi due integrali sono trasformabili negli integrali (42); sicchè dobbiamo dimostrare che dalla convergenza del secondo degli integrali (42) segue quella del primo. La dimostrazione si trasporta sulle loro parti reali (e sui coefficienti delle loro parti immaginarie) che sono integrali del tipo $(42)'$.

Poichè, per ipotesi, il punto $M(\rho, \theta)$ considerato non giace sul contorno di σ_{r+2}, possiamo assumerne un altro $M_0(\rho_0, \theta)$ di modulo maggiore e dello stesso argomento, e neppure giacente

sul contorno: ora, poichè in M_0 il secondo integrale è convergente, il primo lo sarà su tutto OM_0 esclusi gli estremi (per il lemma IV del nº 12), e quindi in particolare nel punto M considerato.

Poichè infine in M sono convergenti (38) e (40), segue dalla (36) che ivi è pure convergente l'integrale primo membro della (37), e perciò che la $(1)'$ è sommabile (B, r).

20. — Segue dal teorema precedente che la successione delle stelle di sommabilità della serie $(1)'$ coincide con quella della (1), e perciò ammette le medesime stelle-limite σ e τ. Inoltre in un punto del contorno di σ (di τ) se la $(1)'$ è sommabile Bg (Bt), tale è anche la (1); ma può darsi che la (1) sia sommabile Bg (Bt) senza che tale sia la $(1)'$.

Che se poi applichiamo i risultati ottenuti alla serie $(1)'$ ed alla sua prima derivata, che è seconda per la (1), e così via, perveniamo al seguente teorema generale:

La stella σ'_r *di sommabilità* (B, r) *della serie derivata di ordine* k

$$(1)^{(k)} \qquad k!\,u_k + (k+1)\,k \ldots 2u_{k+1}z + (k+2)\,(k+1 \ldots 3u_{k+2}z^2 + \ldots$$

di una serie di potenze (1) *coincide con la stella* σ_{r+2k} *di sommabilità* (B, r + 2k) *della* (1), *sicchè nei punti interni in senso stretto la* $(1)^{(k)}$ *è sommabile* (B, r) *e la* (1) *è sommabile* (B, r + 2k); *circa i punti del contorno si può asserire soltanto che, se la* $(1)^{(k)}$ *è sommabile* (B, r), *la* (1) *è sommabile* (B, r + 2k).

Le stelle di sommabilità Bg *e* Bt *della* $(1)^{(k)}$ *coincidono con le corrispondenti* σ *e* τ *di* (1), *sicchè nei punti interni in senso stretto sono entrambe sommabili* Bg *e* Bt *rispettivamente; circa i punti del contorno si può asserire che ove la* $(1)^{(k)}$ *è sommabile* Bg *e* Bt, *tale è anche la* (1).

È evidente l'analogia di questi risultati con quelli relativi all'ordinario cerchio di convergenza.

§ 6. — Proprietà della funzione $u(z)$ somma della (1).

21. — La serie (1) definisce una funzione, la sua somma $u(z)$, nella stella σ. Volendo ricercare le proprietà di questa funzione, incominciamo col limitare la variabilità di z sopra una semiretta p uscente da O.

Su p le infinite stelle σ, (29) e τ staccano altrettanti segmenti (raggi)

$$(43) \qquad s = OG, \ldots, s_{-1} = OP_{-1}, \quad s_0 = OP_0, \quad s_1 = OP_1, \ldots, t = OT,$$

ciascuno dei quali contiene tutti i seguenti [1]; sicchè $s = OG$ è il campo ove (escluso forse G) è definita la *sub-funzione* $u(z)$ che vogliamo considerare.

22. — *La sub-funzione* u(z) *è continua: in tutti i punti interni in senso stretto al segmento* s = OG, *nell'origine* O *se* $s_1 > 0$ *e nell'estremo* G *se ivi esiste.*

Sia M un punto generico di s, escluso G se ivi $u(z)$ non esiste, cioè se ivi (1) non è sommabile Bg.

In M la (1) è sommabile Bg, quindi è sommabile (B, r) per qualche valore di r, e la sua somma $u(z)$, data dalla (7), consta del polinomio $U_{r-1}(z)$ e dell'integrale (6), ed è perciò continua solo quando lo è questo integrale.

Poichè l'integrando è funzione continua su s, l'integrale sarà certamente funzione continua in M se è convergente uniformemente in un intorno di M, cioè se la sommabilità della (1) è uniforme in un intorno di M. Ora, per quanto abbiamo visto al n° 17, ciò si verifica sempre se $M \not\equiv 0$; che se poi $M \equiv 0$, si verifica solo quando il raggio s_1 della stella σ_1 non è nullo.

23. — Consideriamo la serie (1)′, prima derivata di (1), le cui stelle di sommabilità sono (n° 20)

$$(44) \qquad \sigma' = \sigma, \ldots, \sigma'_{-1} = \sigma_1, \quad \sigma'_0 = \sigma_2, \quad \sigma'_1 = \sigma_3, \ldots, \tau' = \tau,$$

---

[1] E tutti contengono il raggio del cerchio di convergenza γ.

e staccano quindi sulla semiretta p i segmenti (raggi)

$$s' = s, \ldots, s'_{-1} = s_1, \quad s'_0 = s_2, \quad s'_1 = s_3, \ldots, t' = t. \tag{45}$$

In un punto generico M di $s' = s = OG$ (escluso forse G) la $(1)' \equiv (32)$ sarà sommabile Bg, ossia sarà sommabile (B, r) per qualche valore di r, quindi la sua somma sarà espressa da (n° 7)

$$u'(z) = V_{r-1}(z) + \int_0^\infty e^{-a} v^{(r)}(a, z)\, da, \tag{46}$$

ove

$$V_{r-1}(z) = 0 \text{ se } r \leq 0$$

e

$$V_{r-1}(z) = v_0 + v_1 z + \ldots + v_{r-1} z^{r-1} \text{ se } r > 0,$$

ossia, per la (33),

$$V_{r-1}(z) = 0 \text{ se } r \leq 0$$

e

$$V_{r-1}(z) = u_1 + 2u_2 z + \ldots + r u_r z^{r-1} \text{ se } r > 0,$$

o infine, per le (8),

$$V_{r-1}(z) = \frac{d}{dz} U_r(z); \tag{47}$$

poi, per la (35), si ha

$$\int_0^\infty e^{-a} v^{(r)}(a, z)\, da = \int_0^\infty e^{-a} \frac{d}{dz} u^{(r+1)}(a, z)\, da, \tag{48}$$

quindi infine

$$u'(z) = \frac{d}{dz} U_r(z) + \int_0^\infty e^{-a} \frac{d}{dz} u^{(r+1)}(a, z)\, da. \tag{49}$$

D'altra parte, nel punto M la (1) sarà sommabile $(B, r+2)$

(n° 20) e quindi anche $(B, r+1)$ (per il n° 8), perciò la sua somma è espressa da

$$(50) \qquad u(z) = U_r(z) + \int_0^\infty e^{-a} u^{(r+1)}(a, z)\, da.$$

Confrontando le (49) e (50), risulta che sarà

$$(51) \qquad u'(z) = \frac{du(z)}{dz}$$

solo in quei punti M nei quali si ha

$$(52) \qquad \int_0^\infty e^{-a} \frac{d}{dz} u^{(r+1)}(a, z)\, da = \frac{d}{dz} \int_0^\infty e^{-a} u^{(r+1)}(a, z)\, da,$$

e questa uguaglianza sussiste se il punto M che si considera ammette un intorno nel quale l'integrale primo membro sia uniformemente convergente, ossia, per la (48), nel quale la sommabilità (B, r) della $(1)' \equiv (32)$ sia uniforme (n° 7).

Ora noi abbiamo visto (n° 17) che ciò si verifica sempre se $M \not\equiv 0$; che se poi $M \equiv 0$, si verifica se il raggio $s'_1 = s_3$ della stella $\sigma'_1 = \sigma_3$ di $(1)'$ non si riduce al punto O.

Raccogliendo: *la sub-funzione* u (z) *ammette la prima derivata in tutti i punti interni in senso stretto al segmento* s = OG, *nell'origine* O *se il segmento* s_3 *ove la* (1) *è sommabile* (B, 3) *non si riduce al punto* O, *nell'estremo* G *se ivi è sommabile* Bg *la serie* (1)′, *prima derivata della* (1); *in ciascun caso essa è uguale alla somma* u′ (z) *di questa serie nel punto.*

Questo risultato si può poi applicare alla serie $(1)'$ ed alla sua prima derivata $(1)''$, tenendo presente che il segmento ove $(1)'$ è sommabile $(B, 3)$ è $s'_3 = s_5$; e così via. Si perviene in tal modo al teorema generale:

La sub-funzione u (z) *ammette la derivata di un dato ordine* k: *nei punti interni in senso stretto al segmento* s = OG, *nell'origine* O *se il segmento* s_{2k+1} *ove la* (1) *è sommabile* (B, 2k + 1) *non si riduce al punto* O, *nell'estremo* G *se ivi è sommabile* Bg *la serie* $(1)^{(k)}$ *derivata di ordine* k *di* (1). *In ciascun caso detta derivata è uguale alla somma* $u^{(k)}(z)$ *di questa serie nel punto.*

24. — Poichè se uno dei segmenti s_r si riduce al punto O lo stesso accade di tutti quelli il cui indice è maggiore (perchè in esso contenuti), si ha che:

Solo quando nessuno dei segmenti s_r (29) *si riduce al punto* O [1] *si può asserire che la sub-funzione* u (z) *ammette nel punto* O *tutte le successive derivate e che queste valgono*

$$u'(0) = u_1, \qquad u''(0) = 2!\,u_2, \qquad u'''(0) = 3!\,u_3, \ldots;$$

sicchè allora la (1) *è per la* u (z) *lo sviluppo in serie di Taylor nel punto* O.

25. — Ciò che si può dire circa la funzione $u(z)$, considerata nel suo campo totale di esistenza σ, si deduce subito dalle proprietà della sub-funzione fin qui considerata, osservando che le derivate di questa, di cui abbiamo dimostrata l'esistenza, sono per la funzione $u(z)$ derivate *prese lungo un raggio di* σ. I risultati di questa deduzione abbiamo già esposti nel n° 4 dell'*Introduzione* [2].

Tempio, 15 ottobre 1917.

---

[1] Il che si verifica in particolare se il segmento t non si riduce al punto O o, più particolarmente ancora, se il raggio di convergenza di (1) non è nullo.

[2] I risultati di questo § (come del resto di tutta la Memoria) sono indipendenti da ogni ipotesi sul cerchio di convergenza γ e sulla stella $\alpha \equiv \tau$ di Borel, e perciò valgono anche quando γ e τ non esistono (cioè si riducono al centro O); anzi da essi si deducono in particolare le proprietà della (1) in τ.

Queste proprietà seguono pure, quasi tutte, da un teorema del Borel (loc. cit., p. 108), la cui dimostrazione però non è rigorosa in un punto essenziale, perchè vi si applica la relazione (52) ($r = -1$), giustificandola solo col fatto che gli integrali che in essa compaiono sono convergenti. Se questa giustificazione fosse stata sufficiente, noi avremmo potuto studiare nel § 5, non la sub-funzione, ma la funzione stessa $u(z)$ in σ e saremmo giunti a concludere che ivi essa è analitica.

Affinchè la (52) sia applicabile è condizione sufficiente che il primo membro sia un integrale *uniformemente* convergente in un intorno del punto z che si considera. E appunto perchè *i soli* (n° 17) campi di con-

vergenza uniforme che conosciamo sono rettilinei e giacenti sulle semirette uscenti da O, siamo stati costretti nel § 5 a studiare, non la $u(z)$, ma le sub-funzioni che nascono limitando la variabilità di z su queste semirette.

Ancora: in virtù del teorema fondamentale del n° 13, non sempre la sommabilità della (1) è uniforme in un intorno rettilineo di O, ed è perciò che questo punto ci si è presentato in modo del tutto eccezionale nei risultati del § 5 (e nei conseguenti risultati del n° 4 dell'*Introduzione*). Che se invece del detto teorema valesse quello enunciato nella terza nota al n° 13, ogni eccezione sparirebbe.

Tutto ciò prova l'opportunità dei rilievi fatti in nota ai n^i 13 e 17.

L'Accademico Segretario
CARLO FABRIZIO PARONA

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona. Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di **C. Frati, A. Baudi di Vesme** e **C. Cipolla.**

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in-f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di **C. Cipolla, G. De Sanctis** e **P. Fedele.**

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in-4°, di 70 pagg. e 96 tav.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. LIII, DISP. 5a, **1917-1918**.

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 3.
1918

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 13 Gennaio 1918.

PRESIDENZA DEL SOCIO ANZIANO CORRADO SEGRE

Sono presenti i Soci Peano, Jadanza, Guareschi, Guidi, Mattirolo, Grassi, Somigliana, Panetti e Parona Segretario.

Scusano l'assenza il Direttore della Classe Senatore D'Ovidio e il Socio Naccari.

Si legge e si approva l'atto verbale della precedente adunanza.

Si comunica che l'Istituzione Morelli in Bergamo ha trasmesso copia dei lavori scientifici presentati al concorso per il premio 1917, l'esame dei quali spetta per turno alla nostra Accademia e, per l'argomento dei lavori stessi, alla nostra Classe. Nella prossima adunanza dell'Accademia, a Classi unite, si procederà alla nomina della Commissione.

Presentano per la stampa negli *Atti*:

Il Socio Peano: la Nota della Dott. Ermenegilda Mori Breda, *Estrazione graduale della radice quadrata.*

Il Socio Somigliana: la Nota del Prof. Francesco Vercelli, *Sul valore meccanico e fisico delle differenze e delle tendenze barometriche.*

Il Socio Grassi: la Nota del Dott. Paolo Straneo, *Relazioni generali fra teorie fisiche e costanti universali.*

LETTURE

Estrazione graduale della radice quadrata.

Nota della Dott. GILDA MORI BREDA.

Per spiegare chiaramente l'estrazione graduale della radice quadrata, premetto l'elevamento graduale al quadrato, giacchè la prima operazione è l'inversa della seconda.

Sia a una quantità (o numero reale positivo) minore di 1; lo si sviluppi in frazione decimale:

$$a = 0 \cdot a_1 a_2 \dots = a_1 X^{-1} + a_2 X^{-2} + \dots$$

ove X rappresenta il numero 10, base della numerazione, e X^{-1}, X^{-2} ... si possono leggere: " decimi, centesimi, ecc. ". Adotto il punto decimale $0 \cdot a_1 a_2 \dots$, conformemente all'uso inglese; poichè, quel punto decimale, non ha in matematica nessun altro significato, invece la virgola ha più significati, fra cui quello di coppia; così 1 , 2 può significare $1 + 2/10$ e la coppia di nunumeri 1 e 2.

Abbiasi un'altra quantità b minore di 1:

$$b = 0 \cdot b_1 b_2 \dots = b_1 X^{-1} + b_2 X^{-2} + \dots$$

Per moltiplicare due frazioni decimali infinite (o serie) a e b moltiplico i termini di grado 1 in X^{-1}, ed ottengo il termine di 2° grado:

$$(a_1 X^{-1}) \times (b_1 X^{-1}) = a_1 b_1 X^{-2};$$

aggiungo i termini di 3° grado:

$$+ (a_1 b_2 + a_2 b_1) X^{-3}.$$

Poi i termini di 4° grado:

$$+ (a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1) X^{-4}$$

e così via: aggiungo i termini di grado n:

$$+ (a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \dots + a_{n-1} b_1) X^{-n}.$$

E qui mi arresto.

Questa somma si indica con $a \times_n b$, e si legge " prodotto di grado n di a per b " [1].

Il prodotto ordinario $a \times b$, oltre ai termini scritti, contiene degli altri termini; quindi si ha:

$$a \times b \geqq a \times_n b,$$

cioè " il prodotto ordinario è maggiore del prodotto graduale ": si ha l'eguale, solo quando i termini di $a \times b$, non contenuti in $a \times_n b$, sono tutti nulli, cioè quando a e b hanno un numero finito di cifre decimali, ed n è maggiore od eguale alla somma di questi numeri di cifre.

Per avere un limite nella differenza:

$$a \times b - a \times_n b = (a_n b_1 + a_{n-1} b_2 + a_{n-2} b_3) X^{-n-1} + \\ + (a_{n+1} b_1 + a_n b_2 + \dots + a_3 b_n + a_1 b_{n+1}) X^{-n-2} + \dots$$

osservo che il secondo membro è minore del valore che esso assume quando al posto delle cifre $a_1 a_2 \dots b_1 b_2 \dots$ metto la cifra nove; poichè esse non possono essere tutte 9, avremo:

$$a \times b - a \times_n b < n\, 81\, X^{-n-1} + (n+1)\, 81\, X^{-n-2} + (n+2)\, 81\, X^{-n-3} + \dots \\ < 81 X^{-n-1} [n + (n+1) X^{-1} + (n+2) X^{-2} + (n+3) X^{-3} + \dots] \\ < 81 X^{-n-1} [n (1 + X^{-1} + X^{-2} + X^{-3} + \dots) + \\ + X^{-1} + 2 X^{-2} + 3 X^{-3} + \dots].$$

---

[1] Il lettore riconoscerà nella regola precedente la moltiplicazione di due serie quale si trova nei trattati di calcolo: vedi per es. d'Arcais, a. 1899, pag. 265. Si noti che $a \times_n b$ dipende solo dalle cifre $a_1 a_2, \dots a_{n-1}$, $b_1 b_2 \dots b_{n-1}$.

Ricordando, che la somma dei termini di una progressione geometrica infinita, che ha per ragione $x < 1$, è $1/(1-x)$, si ha:

$$1 + X^{-1} + X^{-2} + X^{-3} + \dots = 1/(1 - 1/10) = 10/9$$

ed elevando al quadrato:

$$1 + 2X^{-1} + 3X^{-2} + \dots = 100/81$$

onde

$$a \times b - a \times_n b < 81\, X^{-n-1} [10n/9 + 10/81]$$

e semplificando:

$$a \times b = a \times_n b < X^{-n} (9n + 1)$$

che è la formula che andavo cercando.

Quindi: " la differenza fra il prodotto ordinario $a \times b$ e il prodotto di grado n di a e di b è minore di $9n + 1$ unità decimali di ordine n " (1).

Nel caso che i due fattori sieno eguali si ha lo sviluppo graduale del quadrato:

$$a \times_n a = (a_1^2)\, X^{-2} + (2a_1 a_2)\, X^{-3} + (2a_1 a_3 + a_2^2)\, X^{-4} + \dots \\ + (2a_1 a_{n-1} + 2a_2 a_{n-2} + \dots)\, X^{-n}.$$

Per abbreviare, avendosi una successione di cifre, con $\} a_1 a_2 \dots a_{n-1} \{$ intendo il doppio della somma delle cifre equidistanti dagli estremi, più il quadrato della cifra media se esiste. Allora:

$$a \times_n a = \} a_1 \}\, X^{-2} + \} a_1 a_2 \{\, X^{-3} + \} a_1 a_2 a_3 \{\, X^{-4} + \dots \\ + \} a_1 a_2 \dots a_{n-1} \{\, X^{-n}.$$

Darò un esempio del quadrato graduale: calcolo $(10/13)^2$.

---

(1) Questa limitazione della differenza $a \times b - a \times_n b$ è nota; parmi nuova la dimostrazione che qui si dà.

$V_{10}(10/13) = 0{\cdot}7692307692$ è il valore con 10 cifre decimali di 10/13.

$$
\begin{array}{l}
\qquad\qquad\quad 0{\cdot}7\;6\;9\;2\;3\;0\;7\;6\;9\;2 \\
\hline
\}7\{ = 0{\cdot}4\;9 \\
\}76\{ = \quad 8\;4 \\
\}769\{ = \quad 1\;6\;2 \\
\}7692\{ = \quad\; 1\;3\;6 \\
\}76923\{ = \quad\;\; 1\;4\;7 \\
\}769230\{ = \quad\;\;\; 7\;2 \\
\}7692307\{ = \quad\;\; 1\;5\;6 \\
\}76923076\{ = \quad\;\;\; 1\;8\;0 \\
\}769230769\{ = \quad\;\;\;\; 3\;3\;3 \\
\}7692307692\{ = \quad\;\;\;\;\; 2\;7\;2 \\
\hline
\end{array}
$$

$$(10/13)\times_{11}(10/13) = 0{\cdot}5\;9\;1\;7\;1\;5\;9\;7\;6\;0\;2$$

Il numero trovato è $(10/13)\times_{11}(10/13) < (10/13)^2$; aggiungo $9\times 11 + 1$ cioè 100 unità dell'ultimo ordine. Avremo:

$$
\begin{array}{rl}
(10/13)^2 > & 0{\cdot}5\;9\;1\;7\;1\;5\;9\;7\;6\;0\;2 \\
 & \qquad\qquad\qquad\quad\;\; 1\;0\;0 \\
\hline
(10/13)^2 < & 0{\cdot}5\;9\;1\;7\;1\;5\;9\;7\;7\;0\;2.
\end{array}
$$

Concludo:

$$V_8(10/13)^2 = 0{\cdot}5\;9\;1\;7\;1\;5\;9\;7$$

e la cifra seguente è 6 o 7. Si può verificare in questo caso semplice colla divisione: $100/169 = 0{\cdot}59171597633$.

Se il numero di cui vogliamo calcolare il quadrato è maggiore di 1, cioè della forma $v + x$, ove v è un intero non nullo e $x = {\cdot}\, x_1\, x_2 \ldots x_n \ldots$ è una frazione propria, si avrà:

$$(v + x)^2 = v^2 + 2vx + x^2.$$

Sviluppo $2vx$ e $x \times x$ colla regola precedente. Ordinando ho:

$$(v + x)^2 = v^2 + (2vx_1)\,X^{-1} +$$
$$+ (2vx_2 + \}x_1\{)\,X^{-2} + (2vx + \}x_1 x_2\{)\,X^{-3} + \ldots$$

Arrestandoci ai termini di grado n si avrà:

$$(v+x)^2 \geq v^2 + 2v\mathrm{V}_n x + x \times_n x,$$

oppure:

$$(v+x)^2 - (v^2 + 2v\mathrm{V}_n x + x\times_n x) = 2v(x - \mathrm{V}_n x) + (x^2 - x\times_n x).$$

Se x ha precisamente n cifre decimali allora $\mathrm{V}_n x = x$ e

$$(v+x)^2 - (v^2 + 2v\mathrm{V}_n x + x\times_n x) = x^2 - x\times_n x < (9n+1)\,\mathrm{X}^{-n}.$$

Qualunque si sia x (con infinite cifre) si ha: $x - \mathrm{V}_n x < \mathrm{X}^{-n}$, e la penultima eguaglianza diventa:

$$(v+x)^2 - (v^2 + 2v\mathrm{V}_n x + x\times_n x) < (2v + 9n + 1)\,\mathrm{X}^{-n},$$

cioè: la differenza fra il quadrato ordinario e il quadrato graduale è minore dell'unità decimale d'ordine n pel doppio della parte intera aumentato di $9n+1$.

Se v ha una sola cifra decimale, postala $= x_0$ si avrà:

$$(x_0 \cdot x_1 x_2 \ldots)^2 = \rbrace x_0 \lbrace + \rbrace x_0 x_1 \lbrace \mathrm{X}^{-1} + \rbrace x_0 x_1 x_2 \lbrace \mathrm{X}^{-2} + \ldots$$

Esempio. — Calcolo e^2:

$$2 \cdot 7\ 1\ 8\ 2\ 8\ 1\ 8\ 4\ 5$$

$$\begin{array}{l}
\rbrace 2 \lbrace = 4 \\
\rbrace 27 \lbrace = 2\ 8 \\
\rbrace 271 \lbrace = 5\ 3 \\
\rbrace 2718 \lbrace = 4\ 6 \\
\rbrace 27182 \lbrace = 1\ 2\ 1 \\
\rbrace 271828 \lbrace = 7\ 6 \\
\rbrace 2718281 \lbrace = 1\ 8\ 4 \\
\rbrace 27182818 \lbrace = 9\ 4 \\
\rbrace 271828184 \lbrace = 2\ 6\ 2 \\
\rbrace 2718281845 \lbrace = 1\ 4\ 0 \\
\hline
\end{array}$$

$$7 \cdot 3\ 8\ 9\ 0\ 5\ 6\ 1\ 6\ 0.$$

Il valore trovato è $=e \times_9 e$; aggiungo $(2v+9n+1)\,X^{-n}$, cioè 86 unità dell'ultimo ordine, ed ho:

$$\begin{array}{rl} e^2 > & 7{\cdot}3\,8\,9\,0\,5\,6\,1\,6\,0 \\ & \phantom{7{\cdot}3\,8\,9\,0\,5\,6\,1\,}8\,6 \\ \hline e^2 < & 7{\cdot}3\,8\,9\,0\,5\,6\,2\,4\,6. \end{array}$$

Concludo:

$$V_6\, e^2 = 7{\cdot}3\,8\,9\,0\,5\,6.$$

Faccio ora un esempio in cui v contiene più cifre: esso è poco comodo per l'elevazione a quadrato, ma è importante nella estrazione della radice. Vogliasi il quadrato di $v+x=564{\cdot}189583$, numero che incontreremo in seguito. Ivi $v=564$ e $x=0{\cdot}189583$; il doppio della parte intera $2v=1128$.

$$\begin{array}{rl}
 & 5\,6\,4{\cdot}1\,8\,9\,5\,8\,3 \\ \hline
v^2 = & 3\,1\,8\,0\,9\,6 \\
(2v\times 1)\,X^{-1} = & 1\,1\,2\,8 \\
\}1\{ = & 1 \\
(2v\times 8)\,X^{-2} = & 9\,0\,2\,4 \\
\}18\{ = & 1\,6 \\
(2v\times 9)\,X^{-3} = & 1\,0\,1\,5\,2 \\
\}189\{ = & 8\,2 \\
(2v\times 5)\,X^{-4} = & 5\,6\,4\,0 \\
\}1895\{ = & 1\,5\,4 \\
(2v\times 8)\,X^{-5} = & 9\,0\,2\,4 \\
\}18958\{ = & 1\,7\,7 \\
(2v\times 3)\,X^{-6} = & 3\,3\,8\,4 \\ \hline
(564{\cdot}189583)^2 > & 3\,1\,8\,3\,0\,9{\cdot}8\,8\,5\,5\,4\,1.
\end{array}$$

Avendo il numero dato 6 cifre decimali, aggiungerò al valore trovato $(9n+1)\,X^{-6}$, cioè 55 unità dell'ultimo ordine ed ottengo:

$$(564{\cdot}189583)^2 < 318309{\cdot}885596.$$

Concludo:

$$V_4\,(564{\cdot}189583)^2 = 318309{\cdot}8855.$$

Se invece volessi calcolare il quadrato di un numero, le cui prime cifre sono quelle scritte e le successive incognite, cioè il quadrato di 564·189583.., allora:

$$(564{\cdot}189583..)^2 > 318309{\cdot}885541$$

e aggiungendo $(2v + 9n + 1)\,X^{-6}$, cioè 1183 unità di ordine X^{-6}, avrò:

$$(564{\cdot}189583..)^2 < 318309{\cdot}886724.$$

Concludo:

$$V_2\,(564{\cdot}185583..)^2 = 318309{\cdot}88.$$

Estrazione graduale di radice quadrata.

Vuolsi calcolare $\sqrt{(1/\pi)}$ conoscendo $1/\pi = 0{\cdot}31830988618379067$. Comincio a calcolare le prime tre cifre di $\sqrt{(1/\pi)}$, cioè la parte intera di $\sqrt{(X^6/\pi)}$, cioè di $\sqrt{318309}$, che, detta v, sarà $= 564$. Questa radice si trova servendosi delle diffusissime tavole di quadrati.

Il doppio di 564 è 1128 e mi formo la tabella coi primi nove multipli di $2v = 1128$.

Sottraggo da 318309 il quadrato di 564 e accanto al resto ottenuto 213 scrivo 8, cioè la prima cifra decimale del radicando. Si divide il numero così formato pel doppio della parte intera, cioè per 1128. Il quoziente 1 è eguale o maggiore della prima cifra decimale della radice.

Si sottrae da 2138 il prodotto 1128×1, accanto al resto 1010 scrivo 8, cioè la seconda cifra decimale del radicando. Calcolo $\}1\{ = 1$, e sottraggo da 10108. Si divide il resto 10107 per 1128 e il quoziente è 8.

Si sottrae da 10107 il prodotto 8×1128 e accanto al resto 1083 si scrive la 3ª cifra decimale del radicando, ecc.

Ottengo così, molto rapidamente, e facendo intervenire il solo numero di cifre decimali necessario:

```
   √3 1 8 3 0 9·8 8 6 1 8 3 7 9 0 6 7 | 5 6 4·1 8 9 5 8 3 5 4 7 7 5
564² = 3 1 8 0 9 6
       -----------
             2 1 3 8
  1          1 1 2 8
             -------
             1 0 1 0 8                     2v = 564 × 2 =   1 1 2 8 | 1
  } 1 {              1                                      2 2 5 6 | 2
             ---------                                      3 3 8 4 | 3
             1 0 1 0 7                                      4 5 1 2 | 4
  8            9 0 2 4                                      5 6 4 0 | 5
               ---------                                    6 7 6 8 | 6
               1 0 8 3 6                                    7 8 9 6 | 7
  } 18 {               1 6                                  9 0 2 4 | 8
               ---------                                  1 0 1 5 2 | 9
               1 0 8 2 0
  9            1 0 1 5 2
               -----------
                   6 6 8 1
  } 189 {              8 2
                   -------
                   6 5 9 9
  5                5 6 4 0
                   ---------
                     9 5 9 8
  } 1895 {             1 5 4
                     -------
                     9 4 4 4
  8                  9 0 2 4
                     ---------
                       4 2 0 3
  } 18958 {              1 7 7
                       -------
                       4 0 2 6
  3                    3 3 8 4
                       ---------
                         6 4 2 7
  } 189583 {               2 2 4
                         -------
                         6 2 0 3
  5                      5 6 4 0
                         ---------
                           5 6 3 9
  } 1895835 {                2 2 7
                           -------
                           5 4 1 2
  4                        4 5 1 2
                           ---------
                             9 0 0 0
  } 18958354 {                 2 2 2
                             -------
                             8 7 7 8
  7                          7 8 9 6
                             ---------
                               8 8 2 6
  } 189583547 {                  2 6 2
                               -------
                               8 5 6 4
  7                            7 8 9 6
                               ---------
                                 6 6 8 7
  } 1895835477 {                   2 9 6
                                 -------
                                 6 3 9 1
  5                              5 6 4 0
                                 -------
                                   7 5 1
```

Generalizzando, indico con a una quantità maggiore di uno, dalla quale si vuol estrarre la radice quadrata; v la parte intera della radice, ed x la parte decimale, sarà:

$$\sqrt{a} = v + x,$$

onde:

$$a = v^2 + (2vx_1)X^{-1} + (2vx_2 + \}x_1\{)X^{-2} + (2vx_3 + \}x_1 x_2\{)X^{-3} + \dots$$

Determinato il numero v, tale che $a \geqq v^2$, calcolo le cifre $x_1 x_2 \dots$ dalle condizioni:

$$a \geqq v^2 + (2vx_1)X^{-1}, \quad a \geqq v^2 + (2vx_1)X^{-1} + (2vx_2 + \}x_1\{)X^{-2}, \text{ ecc.}$$

In generale pongo $\sqrt{}_n a$ che leggo " radice quadrata, di grado n di a „ il massimo numero $v + x$, con n cifre decimali, tale che:

$$a \geqq v^2 + 2vx + x \times_n x.$$

Si avrà $\sqrt{}_0 a = v$, cioè $\sqrt{}_0 a$ è il massimo numero tale che $a \geqq v^2$.

$\sqrt{}_1 a = v + x_1 X^{-1}$ dove la cifra x_1 è la massima soddisfacente la condizione:

$$a \geqq v^2 + 2vx_1 X^{-1}.$$

La cifra x_1 viene ricavata col medesimo procedimento che nell'estrazione elementare, ed è come in quel metodo o la vera cifra della radice o una cifra troppo forte.

In generale si ricaverà x_n, come massima cifra, soddisfacente la condizione:

$$a \geqq v^2 + 2v(x_1 X^{-1} + x_2 X^{-2} + \dots + x_{n-1} X^{-n+1}) + 2vx_n X^{-n} + x \times_n x,$$

la quale è lineare in x_n.

Si può anche scrivere:

$$2vx_n X^{-n} \leqq [a - v^2 - 2vV_{n-1}x - x \times_{n-1} x] - \}x_1 x_2 - x_{n-1}\{ X^{-n},$$

e poichè $a - v^2 - 2vV_{n-1}x - x \times_{n-1} x \geqq 0$, se la differenza del secondo membro risultasse negativa, si diminuisce x_{n-1} di una unità dell'ultimo ordine.

Esamino ora la relazione fra $\sqrt{a}$ e $\sqrt{}_n a = v + x$, cioè fra la radice quadrata con n cifre decimali di a e la radice quadrata di grado n di a.

Poichè, per definizione di $\sqrt{}_n a$, si ha:

$$a \geqq v^2 + 2vx + x \times_n x$$

e

$$a < v^2 + 2v(x + X^{-n}) + (x + X^{-n}) \times_n (x + X^{-n}),$$

e se al prodotto graduale sostituisco il prodotto ordinario ho, a più forte ragione:

$$a < v^2 + 2v(x + X^{-n}) + (x + X^{-n})^2,$$

ossia:

$$a < (v + x + X^{-n})^2,$$

onde: $\sqrt{a} < v + x + X^{-n} = \sqrt{}_n a + X^{-n}$, $V_n \sqrt{a} \leqq \sqrt{}_n a$, cioè: " il valore con n cifre decimali della radice di a è eguale o minore della radice di grado n di a ".

Essendo poi $x \times_n x > x^2 - (9n + 1) X^{-n}$ sarà $a > (v + x)^2 - (9n + 1) X^{-n}$, e diminuendo x di un'unità dell'ultimo ordine $a > (v + x - X^{-n})^2 + [2(v + x - X^{-n}) - (9n + 1)] X^{-n}$ ed *a fortiori* $a > (v + x - X^{-n})^2 + [2v - (9n + 1)] X^{-n}$.

Se ora si suppone $2v > (9n + 1)$, sarà:

$$a > (v + x - X^{-n})^2,$$

onde $\sqrt{a} > v + x - X^{-n}$ e $V_n \sqrt{a} \geqq \sqrt{}_n a - X^{-n}$.

Se $v \geqq 100$, affinchè:

$$9n + 1 \leqq 2v$$

dovrà essere $n \leqq 22$ e allora:

$$\sqrt{}_n a - \sqrt{a} < X^{-n}.$$

Se si suppone dunque $v \geqq 100$, e si calcola la radice graduale di a con un numero di cifre non superiore a 22, si avrà: o il valore esatto con cifre n decimali di $\sqrt{a}$, o questo, aumentato di un'unità dell'ultimo ordine decimale.

Si ha così un numero di 25 cifre che differisce da $\sqrt{a}$ meno di un'unità dell'ultimo ordine decimale, in più o in meno.

Nel nostro caso particolare, $v = 564$, e x ha 11 cifre; poichè il resto è 751 posso scrivere:

$$\mathrm{V}_{11}(\mathrm{X}^6/\pi) = v^2 + 2vx + x\times_{11}x + 751\,\mathrm{X}^{-11},$$

e poichè:

$$x\times_{11}x > x^2 - 100\,\mathrm{X}^{-11}$$

sarà:

$$\mathrm{X}^6/\pi > v^2 + 2vx + x^2 + 651\,\mathrm{X}^{-11}, \quad \mathrm{X}^6/\pi > (v+x)^2 + 651\,\mathrm{X}^{-11},$$

e *a fortiori*:

$$\mathrm{X}^6/\pi > (v+x)^2, \qquad \sqrt{(\mathrm{X}^6/\pi)} > v + x,$$

dalla quale si conclude che $\mathrm{V}_{11}\sqrt{(\mathrm{X}^6/\pi)} = 564{\cdot}18958354775$ e $\mathrm{V}_{14}\sqrt{(1/\pi)} = 0{\cdot}56418958354775$.

Il valore precedente di $\sqrt{(1/\pi)}$ si può confrontare con quello che dànno i professori Burali e Pensa nella loro Aritmetica e Geometria; essi dànno V_{10} di $\sqrt{(1/\pi)}$, ma le cifre di posto nove e dieci non sono 2 e 3, come essi dicono, bensì 3 e 5.

Ho sempre applicato la regola che $x^2 - x\times_n x < (9n+1)\mathrm{X}^{-n}$; si poteva applicare l'altra regola: che questa differenza è minore della somma delle cifre di x, moltiplicata per l'unità decimale d'ordine n, dove x ha n sole cifre decimali. Però usando questa regola si arriva, nei nostri esempi, agli stessi risultati.

L'estrazione graduale della radice quadrata si può dedurre dalla regola per la risoluzione delle equazioni numeriche, quale si trova nei manoscritti lasciati da Fourier, e pubblicati dopo la sua morte da Navier nel 1831. Però questi manoscritti non preparati dall'autore per la stampa, sono, specialmente nelle ultime parti, poco chiari: quindi di questo metodo si trova solo un cenno in:

Lüroth, *Numerisches Rechnen*, Leipzig, 1900, pag. 152, ove l'autore dà un esempio: " obleich dies nicht günstig ist ", cioè: quantunque esso non sia favorevole; invero nel suo esempio $v = 10$ e non si ha approssimazione sufficiente.

Un'affermazione consimile trovasi pure in:

XAVIER, *Approximations numériques*, Paris, 1909, pag. 69, ove l'autore dice: " cette méthode que nous ne donnons ici qu'à titre de curiosité théorique ", giacchè avendo nel suo esempio considerato $v < 10$, l'approssimazione è insufficiente.

Il prof. PEANO nelle note *Approssimazioni numeriche* (Torino, *Atti*, 1917) invertendo l'operazione di elevazione graduale a quadrato, diede come esempio l'estrazione graduale della radice quadrata da π, dopo averne calcolate direttamente due o tre cifre.

In questa mia Nota ho fatta l'esposizione diretta di tutta la teoria per l'estrazione di radice graduale ed ho trovate le precauzioni che bisogna avere affinchè il calcolo riesca praticamente; cioè che se la parte intera della radice è > 100 allora si può applicare l'estrazione di radice graduale fino a 22 cifre decimali.

Risulta così, che questo metodo, applicato convenientemente, è più comodo e più rapido, sia del metodo elementare usato nelle nostre scuole, sia degli altri metodi meno noti per l'estrazione di radice quadrata.

Sul valore meccanico e fisico delle differenze e delle tendenze barometriche.

Nota del Prof. FRANCESCO VERCELLI.

Il moto della colonna barometrica presenta caratteri complessi e sfuggiti, sinora, ad ogni ricerca. Mancando una base di orientamento, gli studi barometrici vennero rivolti alla determinazione di quantità scelte arbitrariamente e non sempre dotate di un significato fisico ben definito.

I procedimenti andarono via via affinandosi e dal semplice calcolo delle medie annue, mensili, dedadiche, ecc. si passò alla considerazione degli intervalli con cui si presentano i massimi ed i minimi, allo studio delle variazioni e delle differenze, e alla rappresentazione dei valori sincroni di queste grandezze per le diverse regioni del globo.

In questi ultimi anni gli studi dei valori differenziali della pressione costituirono base feconda di pubblicazioni e di ricerche (1).

Questi lavori, pure costituendo un progresso notevole, sono maggiormente rivolti ad accumulare cifre e dati, che a discutere sul valore che essi possono avere; per cui, di fronte a certe colossali raccolte di cifre, che destano ammirazione, si cerca invano quale grandezza meccanica e fisica esse debbano precisamente rappresentare.

Per tali ragioni ed in vista anche delle pubblicazioni delle differenze barometriche nelle 24 ore e delle tendenze barome-

(1) Bibliografia in J. Hann, *Lehrbuch der Meteorologie*, 1915.

triche (1), fatte quotidianamente sui Bollettini meteorici, non sarà privo di interesse indagare il valore di queste grandezze, considerate sotto l'aspetto meccanico e fisico.

***

Notiamo anzitutto come le ricerche barometriche, ora accennate, richiamino alla mente quelle analoghe, relative ai fenomeni termici dell'atmosfera e del suolo.

Eppure i caratteri dei diagrammi termici sono così profondamente diversi da quelli barometrici, da destare il sospetto se proprio sia stato conveniente trattarli alla stessa stregua e con metodi del tutto affini.

Nei fenomeni termici prevale in modo essenziale una doppia periodicità diurna ed annua; in quelli barometrici, pur avendo in ciascuna località un moto oscillatorio attorno ad una certa posizione media, non è stata riconosciuta finora periodicità alcuna, se non nelle piccole oscillazioni diurne e semidiurne, di importanza affatto secondaria rispetto alle altre oscillazioni predominanti.

Consegue che, mentre alle medie e alle differenze termiche è possibile attribuire un significato ben determinato, ciò non è per i valori medi o differenziali della pressione.

Confrontando fra loro letture barometriche fatte a distanza di mesi, giorni, ore, e costruendo, coi numeri così ottenuti, ampie ed accurate tabelle, si avranno bensì valori uniformi, ma indeterminati quanto a rappresentazione di grandezze.

Sotto l'aspetto meccanico la scelta dell'intervallo di tempo

---

(1) " Su proposta del sig. A. Schmid (Stuttgart) relativa alla *tendenza* " *barometrica, cioè alla variazione del barometro nelle ore vicine*, la Commis- " sione per la telegrafia del tempo accettò, nella seduta a Londra nel 1909, " questa proposta, mentre il Comitato Meteorologico Internazionale prese " la seguente deliberazione: Nei telegrammi internazionali del tempo la " tendenza barometrica deve essere seguìta al mattino secondo le registra- " zioni dei barometrografi . . .

" La tendenza barometrica deve essere riferita alle tre ore precedenti „. Ciro Chistoni, *Il Codice meteorologico internazionale dei professori Hellmann e Hildebrandsson.* " Boll. Soc. met. it. „, 1913, pp. 30 e 50.

a cui riferire differenze, variazioni e medie è di fondamentale importanza.

Se il moto della colonna barometrica avvenisse costantemente in un dato verso, scelto un arbitrario intervallo di tempo Δt, e indicato con Δh il corrispondente spostamento barometrico, la velocità, in ogni istante, avrebbe lo stesso segno della velocità media $\Delta h/\Delta t$.

Questo rapporto rappresenterebbe adeguatamente il moto medio, per quel dato intervallo.

Ma il moto è oscillatorio; la considerazione della velocità media perde quindi ogni importanza. Bisognerebbe considerare solo i valori istantanei, o almeno scegliere caso per caso e in tale maniera l'intervallo Δt da caratterizzare separatamente il moto di salita e quello di discesa, come è norma costante nello studio dei moti oscillatori.

Evitando queste limitazioni, le opposte fasi del moto non riescono distinte e i dati numerici, che si raggiungono, non valgono affatto a caratterizzare il moto della colonna barometrica.

Si osservi inoltre che la considerazione del rapporto $\Delta h/\Delta t$ è fatta in Meteorologia coll'intento anche di avere un indice della tendenza barometrica a spostamenti futuri.

Nei Bollettini meteorici è attribuito appunto il titolo di *tendenza barometrica* ai valori numerici di $\Delta h/\Delta t$ (incremento barometrico nell'intervallo unitario di tre ore).

Le osservazioni ora fatte ed un semplice sguardo ai diagrammi, bastano invece a dimostrare che tale rapporto non si presta a rappresentare, in modo generale, nè la tendenza attuale, nè quella futura del moto della colonna barometrica, e inducono quindi a discutere se non sia forse il caso di rinunziare a quei dati numerici o per lo meno a riferirli sotto altro titolo.

Nel diagramma annesso (fig. 1) l'incremento barometrico, riferito alle tre ore precedenti, alle ore 8 è $+0{,}66$ (differenza di altezza tra i punti C e B); ciò è in accordo col moto attuale del barometro, ma in opposizione con quello predominante nella giornata e che si inizia due ore dopo.

Alle ore 10, in cui avviene una inversione nel moto, tale incremento è $+0{,}40$ (differenza tra i punti D e F), in accordo col moto immediatamente precedente, ma in opposizione con quello attuale e quello futuro.

Lo stesso dicasi per il punto A (ore 4) e per ogni altro punto in cui vi sia un massimo od un minimo.

Dopo le 10, e fin poco oltre le 11, la tendenza è sempre positiva, mentre il barometro si trova in precipitosa discesa; essa è quindi in opposizione colle condizioni precedenti, con quelle attuali e con quelle future!

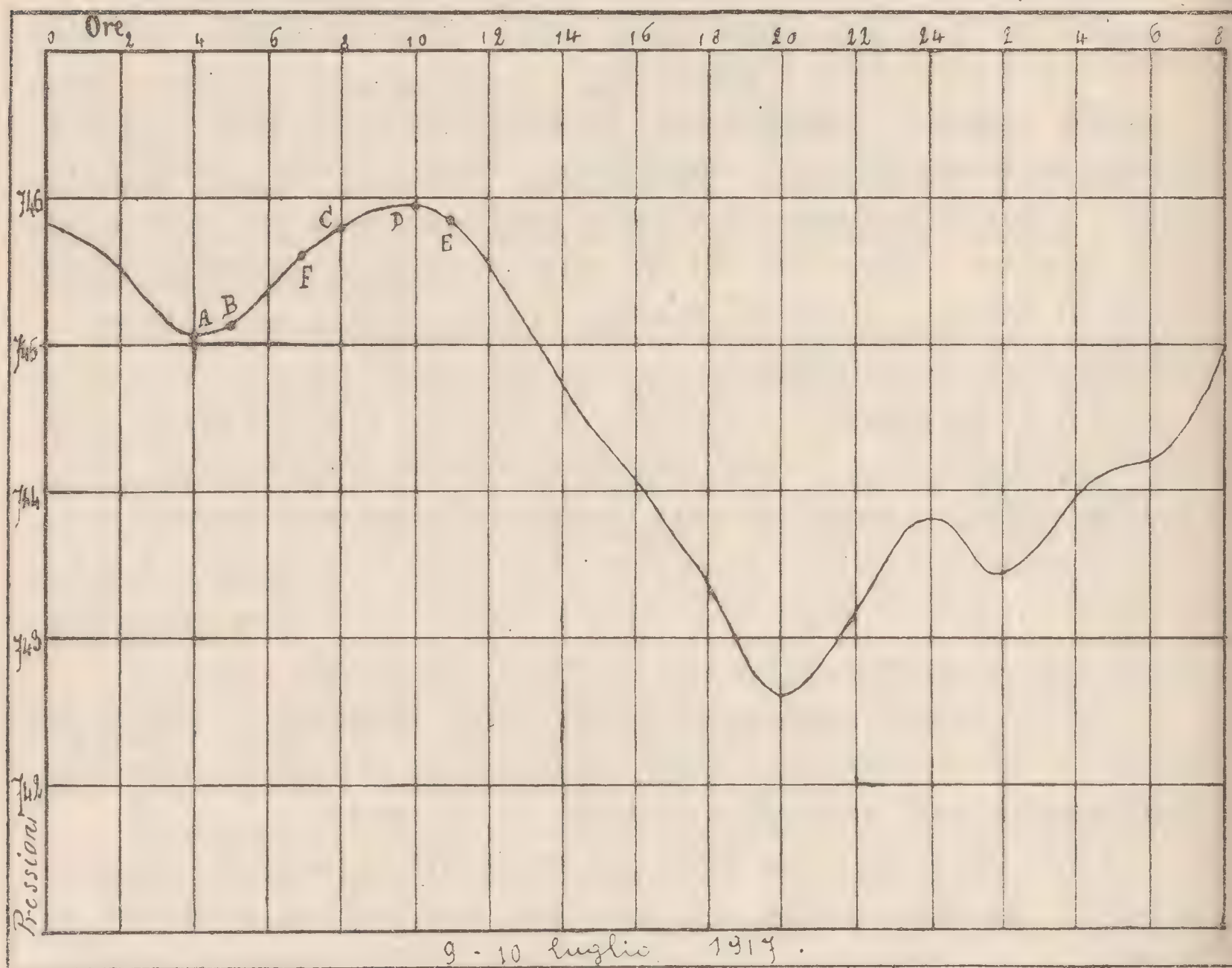



Fig. 1.

Ognuno può agevolmente moltiplicare gli esempi e constatare la varietà di risultati che si possono compilare, mutando ad arbitrio l'intervallo di tempo e l'ora dell'osservazione.

Ma è bene notare ancora che l'intervallo di tre ore, adottato per calcolare alle ore 8 la tendenza barometrica, è particolarmente infelice per quelle regioni, in cui la doppia oscillazione diurna è ben pronunziata.

Nei nostri paesi, in tale intervallo siamo nella fase ascendente della prima onda: ne segue che i valori della tendenza barometrica possono risultare positivi, anche quando predomina

un moto barometrico discendente e, più che a dare un indice di questo moto prevalente, ricordano semplicemente la fase ora accennata dell'onda semidiurna.

Un esempio istruttivo e paradossale darà maggior rilievo alle osservazioni precedenti.

Nel Bollettino meteorico del R. Ufficio Centrale di Meteorologia e Geodinamica risulta che il 20 maggio 1917 la tendenza barometrica, alle ore 8, era *positiva* in quasi tutti gli Osservatorii italiani: pochi avevano segnalato tendenza nulla e tre soli negativa. Ebbene, nelle 24 ore successive, come risulta dal Bollettino del 21, la pressione andò *diminuendo fortemente ovunque*, sino a raggiungere 6 mm. di abbassamento.

Nello stesso Bollettino del 21 si trova segnalata, alle ore 8, una generale tendenza barometrica negativa, tranne in alcune località meridionali. Orbene, dal Bollettino del 22 si rileva che nelle 24 ore successive il barometro era salito fortemente ovunque, fuorchè proprio in quelle stesse regioni meridionali (Lecce, Mileto, Messina, ecc.), ove, per quanto si fosse avuta tendenza positiva, il barometro aveva continuato ad abbassarsi notevolmente!

***

Se con questi valori delle differenze e delle tendenze barometriche, di significato così incerto e fin contradditorio, si calcolano poi valori medi e finanche le medie delle medie, che cosa si otterrà?

(Io rivolgo la domanda ai pazienti collezionisti di tali indefinibili cifre).

***

Accenni critici, analoghi a questi, non mancano nelle migliori opere meteorologiche (1).

(1) " The interval to be selected as the one during which the change " shall be estimated, naturally gives rise to the consideration as to what " an isallobaric chart really means „. W. N. Shaw, *Forecasting Weather*, London, 1913, pag. 341. — " The indiscriminate monthly and annual aver-

Però in questioni ardue e delicate, quali sono l'elaborazione numerica e l'interpretazione dinamica dei dati di osservazione, se può parere facile la critica dei metodi usualmente seguìti, riesce poi difficile sostituire procedimenti che possano raccogliere unanime assenso.

Le medie sopprimono le oscillazioni e le variazioni, che sono il carattere precipuo dei fenomeni; le differenze, calcolate a intervalli arbitrariamente scelti, non hanno significato fisico ben definito; i valori usati a indicare la tendenza barometrica sono del tutto inadeguati; le variazioni interdiurne, settimanali e mensili, se valgono a definire i valori estremi e regionali delle ondulazioni barometriche, nulla dicono sui caratteri intrinseci delle ondulazioni stesse. Questi fatti sono ben chiari; pure, le ricerche dei valori medi, delle differenze, ecc., continuano ad essere la base su cui poggiano gli studi barometrici.

Ciò è dovuto forse alla persuasione che tali procedimenti non siano attualmente sostituibili da altri meglio appropriati.

Io non ritengo che questa prevenzione sia giustificata. Non v'è ragione, ad esempio, perchè nello studio dei dati strumentali non si abbiano da seguire altri intendimenti e altri metodi, che già ebbero favorevole sanzione in altro campo della fisica terrestre. Alludo in modo speciale ai procedimenti noti col nome di “ analisi armonica „, o più propriamente “ analisi periodale „.

Questo metodo nelle ricerche barometriche presenta speciali difficoltà, nè rende l'interpretazione dei diagrammi priva sempre di ogni incertezza. Ma i risultati conseguiti in recenti lavori (1) dimostrerebbero che questi inconvenienti, pure costituendo certamente un lato debole, non tolgono la possibilità di uno studio preciso sulla costituzione intrinseca delle curve barometriche.

La legge di periodicità di talune ondulazioni, messa in evidenza sino dalle prime applicazioni di tali metodi e sempre

---

“ ages, useful in climatology, are quite inappropriate and misleading from “ a dynamical point of view „. E. Hermann, “ Bull. of the american mat. Society „, June, 1896.

(1) *Analisi armonica dei barogrammi, ecc.* “ Rend. Lincei „, 1915, p. 1020. *Oscillazioni periodiche e previsione della pressione barometrica,* “ Memorie R. Istit. Lombardo „, 1916, p. 309.

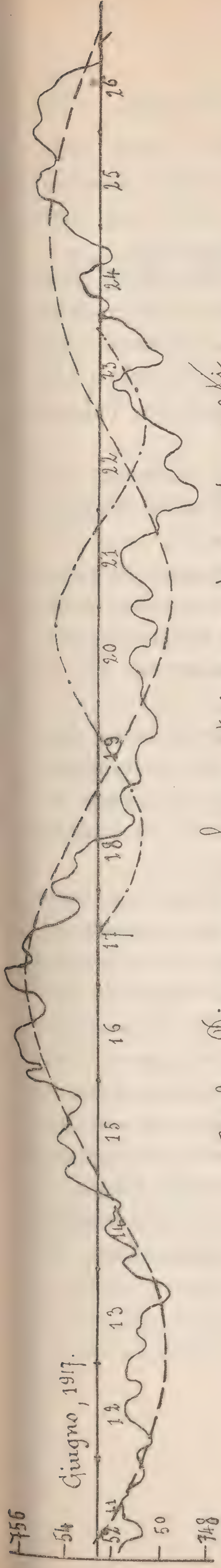



Fig. 3. Diagramma barometrico e onde componenti.

[M. Medea, q. 126 m]

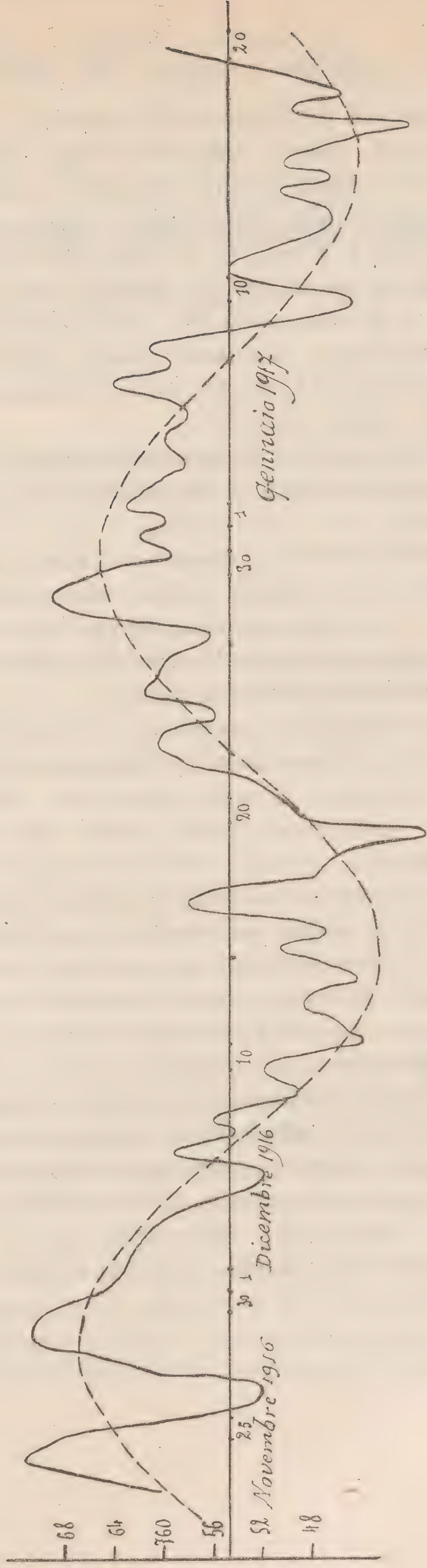



Fig. 2. Diagramma barometrico e oscillazione principale.

[Cervignano]

confermata dalle successive ricerche, è un dato di fatto molto notevole e atto a dimostrare come l'analisi periodale possa divenire in meteorologia strumento rigoroso e valido non meno di quanto abbia dimostrato di essere nella idrografia.

Non è il caso di ricordare qui i principî del metodo, nè di discutere sul valore dei risultati; ma può essere utile confrontare il diverso modo con cui l'andamento della pressione viene caratterizzato, calcolando medie, variazioni e differenze, o precisando invece i caratteri delle oscillazioni barometriche. Valgano i due esempi seguenti:

La fig. 2 dà il diagramma della pressione osservata, dal 1° dicembre 1916 al 20 gennaio 1917, in una località del basso Isonzo.

Studiato con i metodi dell'analisi periodale, esso si rivela costituito da tipiche ondulazioni periodiche. La principale fra esse è tracciata sul diagramma. Ha periodo di 32 giorni circa; da sola rappresenta l'andamento generale della curva, per un intervallo di quasi due mesi.

Assegnando l'ampiezza e la fase di quest'onda, in un dato istante, restano definiti l'andamento principale e la tendenza del barometro. Quando occorra una conoscenza più minuta del moto barometrico basta tenere conto anche delle oscillazioni più brevi.

La curva barometrica della fig. 3 è tracciata con scala molto più ampia, per rendere più evidenti le minori ondulazioni. Essa venne osservata nel periodo 11-28 giugno 1917 in altra località del basso Isonzo. È costituita prevalentemente da una regolare onda con periodo di circa 8 giorni. Nel tratto 18-24 giugno notasi un'onda con periodo di circa 4 giorni. Sono pure assai distinte le ondulazioni semidiurne e diurne. Indicando i caratteri (periodo, ampiezza e fase) delle onde esistenti in un dato momento, resta caratterizzata la forma della curva e definita la tendenza predominante del barometro a spostamenti futuri.

I diagrammi barometrici (fig. 2 e 3) sono particolarmente semplici; ma risultati analoghi si conseguono anche nei casi più complessi.

Relazioni generali fra teorie fisiche e costanti universali.

Nota di PAOLO STRANEO.

Alcuni studi sull'estensione alla fisica dei principî dell'Omogeneità delle equazioni e della Similitudine usati nella dinamica, che sono attualmente in corso di pubblicazione nei Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, mi hanno condotto a ricercare se e quali relazioni in generale esistano fra una teoria fisica e l'insieme delle costanti che essa deve considerare.

I risultati ai quali sono giunto presentano, a parer mio, qualche interesse, che va oltre la speciale questione che mi aveva condotto a quella ricerca. Perciò ho pensato di esporli indipendentemente da essa nella breve Nota che mi onoro di presentare a cotesta Accademia.

1. Argomento e schema di questa ricerca. — Le costanti universali della fisica per un lungo periodo di tempo furono considerate come elementi non essenziali delle teorie, e talora anche poco logicamente eliminate dalle formule mediante l'artificio di assumere speciali sistemi di unità, nei quali il loro valore numerico venisse a risultare eguale ad uno.

I ripetuti richiami sui molti equivoci che provocava tale procedimento, segnatamente nel campo dell'elettricità, valsero bensì ad eliminarlo, almeno dai migliori trattati, e a far introdurre nelle formule i segni delle costanti universali, ma non furono sufficienti ad indurre a considerarle come elementi essenziali delle teorie.

Solamente nello sviluppo delle nuovissime teorie dei gas, dell'elettricità, dell'irraggiamento termico e delle loro svariatissime applicazioni, le costanti universali assunsero una parte così preponderante, che dovettero necessariamente essere considerate

con qualche maggior ampiezza. Esse furono quindi studiate, e spesso anche considerate come delle vere e proprie entità fisiche, ma solamente di mano in mano che se ne presentava l'occasione, giungendo così, al più, a porre in evidenza qualche relazione fra alcune di loro. Ma il problema ben più importante dello studio dei *rapporti dell'insieme di tutte le costanti di una data teoria colla teoria stessa* non fu neppure mai tentato.

L'utilità di tale studio apparirà manifesta dal complesso di questa ricerca.

Per ora limitiamoci a rilevare che il difetto di esso fu causa di vari equivoci, fra i quali, gravissimo, quello di aver lasciato credere in generale lecito trasportare arbitrariamente e interpretare in una nuova teoria costanti universali definite e studiate secondo un'altra teoria completamente differente.

Tale arbitrio, specialmente nelle recentissime teorie fisiche della costituzione della materia, condusse spesso a conclusioni errate, e talora anche paradossali, non meno dell'altro, pure molto diffuso, dell'impiego simultaneo delle due differenti concezioni della fisica, la classica e la relativistica, che il Poincaré ha ripetutamente rilevato e dimostrato pericoloso coll'arguta osservazione " *che non vi è proposizione tanto assurda che non si riesca facilmente a dimostrare per poco che si facciano entrare nella dimostrazione due premesse contradditorie* „.

Vedremo in seguito come la coesistenza in una teoria di costanti provenienti da teorie diverse sia in generale incompatibile col carattere essenziale di quella teoria stessa e talora persino colla nostra nozione fondamentale di teoria fisica, la quale esige che ciascuna teoria possa ammettere, rispettando il principio fondamentale dell'Omogeneità, certe determinate leggi per lei caratteristiche, e non possa ammetterne certe altre.

Per chiarire questi concetti con un esempio, consideriamo la teoria dell'irraggiamento termico nelle sue linee principali ora generalmente ammesse, quali derivano dall'applicazione dei principî della termodinamica alla nozione di irraggiamento secondo la teoria Maxwelliana della luce.

Essa, come è noto, comprende un certo numero di leggi confermate soddisfacentemente dall'esperienza, le quali consistono in relazioni generali e assolutamente caratteristiche fra le diverse entità fisiche di quella teoria.

In coteste leggi compaiono numerose costanti universali che possono tutte essere espresse per mezzo di tre di esse, da considerarsi come fondamentali, e che possono venire scelte con una certa arbitrarietà e in particolare essere le tre costanti c, velocità della luce nel vuoto, k, costante dell'entropia ed h, costante di Planck, aventi rispettivamente le dimensioni $[l\,t^{-1}]$, $[l^2 t^{-2} m\,T^{-1}]$ e $[l^2 t^{-1} m]$ nel sistema di dimensioni lunghezza, tempo, massa e temperatura.

Orbene, ciascuna di coteste leggi si presenta colla proprietà assai caratteristica di essere la sola relazione possibile fra le entità fisiche che in esse intervengono e le costanti universali c, k ed h, la quale soddisfaccia pure al principio generale dell'Omogeneità. La nota legge di Stefan-Boltzmann

$$u = [k^4 c^{-3} h^{-3}]\, T^4 = a\, T^4, \tag{1}$$

che esprime una relazione generale fra la densità dell'energia u irradiata da un corpo nero e la sua temperatura assoluta T, quando sia raggiunto lo stato di regime, è per es. la sola relazione omogenea possibile fra le entità fisiche u e T e le costanti universali c, k ed h. Perciò si dice ordinariamente che la (1) è caratteristica della teoria dell'irraggiamento, intesa nel modo sopra detto.

Ma ben diversamente si presenterebbero le cose ove si ammettesse la possibilità di introdurre nella teoria dell'irraggiamento altre costanti universali provenienti da altre teorie e di dimensioni non esprimibili per mezzo di quelle delle c, k ed h, per es. la costante g della teoria della gravitazione, dalle dimensioni $[l^3\, t^{-2}\, m^{-1}]$.

Allora le leggi della teoria dell'irraggiamento non si presenterebbero più colla proprietà così caratteristica or ora rilevata, perchè qualsiasi relazione data arbitrariamente fra diverse entità fisiche potrebbe logicamente essere una legge di quella teoria; in particolare, qualunque relazione data arbitrariamente fra la u e la T, per es. la $u = bT^3$, potrebbe essere una legge altrettanto logica quanto la (1), bastando per ciò assumere $b = [l^{-1} t^{-2} m\, T^{-3}] = [c^{-\frac{1}{2}} k^3 h^{-\frac{5}{2}} g^{-\frac{1}{2}}]$.

Queste semplici considerazioni conducono logicamente a porre la questione fondamentale della ricerca delle relazioni

generali fra le singole teorie fisiche e le rispettive costanti universali.

A tale ricerca porta appunto un primo contributo la presente Nota, dimostrando in generale: 1°) che le dimensioni delle costanti universali di una data teoria non possono essere date arbitrariamente, ma sono tutte sottoposte a un vincolo più o meno ristretto; 2°) che tale vincolo è caratteristico per quella teoria, tanto che in generale, dalla semplice ammissione di esso, è possibile dedurre i tratti fondamentali della teoria stessa.

Perciò premetteremo alcune considerazioni preliminari (paragrafi 2 e 3) per passare poi alla parte sostanziale della trattazione (paragrafi 4 e 6) e dare infine qualche esempio illustrativo (paragrafi dal 7 al 10).

2. Espressione delle dimensioni di una generica costante universale. — Assumendo a base delle considerazioni che seguiranno la consueta teoria delle dimensioni nella sua forma più generale, rappresenteremo le dimensioni fisiche di una generica entità Q in funzione di un certo numero di entità fisiche $Q_1, Q_2, \dots Q_m$ di dimensioni fra di loro indipendenti ed assunte come fondamentali, con un'espressione della forma

$$[Q] = [Q_1^{q_1} Q_2^{q_2} \dots Q_m^{q_m}],$$

nella quale le $q_1, q_2 \dots q_m$ rappresentano numeri razionali e le parentesi servono ad indicare che si considerano esclusivamente le dimensioni, e non speciali valori numerici delle entità fisiche in esse comprese.

Siccome la scelta delle $Q_1, Q_2 \dots Q_m$ può essere in generale fatta godendo di una grande arbitrarietà ed inoltre è spesso utile di passare da un sistema ad un altro, conserveremo questa notazione generale, la quale, in fondo, non è sensibilmente più complicata di quella che si avrebbe facendo fin d'ora una determinata scelta del sistema di dimensioni.

In molte occasioni, e specialmente nelle applicazioni del principio dell'omogeneità delle equazioni, si presenta spontaneamente il problema di cercare di esprimere le dimensioni di una

generica entità fisica Q in funzione di altre n entità fisiche date nella forma:

$$(2) \qquad [Q]=[\Pi\,(Q_1^{q_{1j}}\,Q_2^{q_{2j}}\dots Q_m^{q_{mj}})^{\alpha_j}] \qquad j=1,2,\dots n,$$

determinando opportunamente le α_j.

Analogamente rappresenteremo le dimensioni delle costanti dimensionali della fisica C, siano esse individuali o universali, coll'espressione

$$[C]=[Q_1^{c_1}\,Q_2^{c_2}\dots Q_m^{c_m}]$$

e ci proporremo il problema di esprimere le dimensioni di una qualsiasi di esse in funzione delle dimensioni di altre n costanti date nella forma

$$(2^{bis}) \qquad [C]=[\Pi\,(Q_1^{c_{1i}}\,Q_2^{c_{2i}}\dots Q_m^{c_{mi}})^{\alpha_i}] \qquad i=1,2,\dots n,$$

problema di cui vedremo in seguito l'interesse fisico.

3. Discussione matematica. — Per la determinazione delle incognite α_i sviluppiamo il prodotto a destra ed identifichiamo rispettivamente i coefficienti delle $Q_1\,Q_2\dots Q_m$. Otterremo così il sistema di m equazioni lineari fra n incognite

$$(3) \qquad \left\{\begin{array}{l} c_1=c_{11}\,\alpha_1+c_{12}\,\alpha_2+\dots+c_{1n}\,\alpha_n \\ c_2=c_{21}\,\alpha_1+c_{22}\,\alpha_2+\dots+c_{2n}\,\alpha_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_m=c_{m1}\,\alpha_1+c_{m2}\,\alpha_2+\dots+c_{mn}\,\alpha_n\,. \end{array}\right.$$

Il sistema (3) è algebricamente noto. Consideriamone le matrici

$$(4) \quad \left\|\begin{array}{llll} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & & & \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{array}\right\| \quad \text{e} \quad \left\|\begin{array}{lllll} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} & c_1 \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} & c_2 \\ \dots & & & & \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} & c_m \end{array}\right\| \quad (5)$$

delle quali indicheremo con l e l_1 le caratteristiche e discutiamo separatamente i due possibili casi

$$l=l_1 \qquad \text{e} \qquad l\neq l_1\,.$$

1° Caso. $l = l_1$. È noto come sia questa la condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema (3) ammetta soluzioni finite, e come in particolare si abbia una soluzione unica, se è inoltre $l = n$, e un'infinità di soluzioni di ordine $n - l$, se è $l < n$.

Il nostro problema della rappresentazione delle dimensioni di una costante generica per mezzo di quella di n altre costanti date è quindi sempre possibile quando, ponendo le matrici (4) e (5), risulteranno eguali le loro caratteristiche. Tale rappresentazione sarà possibile in un sol modo quando sarà pure $l = n$ e in infiniti modi quando sarà $l < n$.

2° Caso. $l \neq l_1$. Verificandosi questa condizione, è noto che le equazioni del sistema (3) sono fra di loro incompatibili e che quindi il sistema stesso non ammette soluzioni finite.

Così pure avverrà per il nostro problema e non sarà quindi possibile, mediante le dimensioni delle n costanti date, di rappresentare le dimensioni di una costante qualsiasi C dalle dimensioni $[Q_1^{c_1} Q_2^{c_2} \ldots Q_m^{c_m}]$, arbitrariamente assegnata.

Ma proponiamoci in questo caso di ricercare quali condizioni convenga imporre alle dimensioni della costante generica C, perchè tale rappresentazione divenga possibile.

Basterà per ciò evidentemente di scegliere le $c_1, c_2, \ldots c_m$ in modo che la caratteristica l_1 della seconda matrice (5) risulti sempre eguale a quella l della matrice del sistema (4). Ma allora il sistema (3), composto di m equazioni lineari fra di loro compatibili, ad n incognite e con matrice di caratteristica l, non potrà essere in generale linearmente indipendente, ma dovrà notoriamente ammettere fra le $c_1, c_2, \ldots c_m$ $m - l$ relazioni della forma

$$(6) \qquad \beta_{i1} c_1 + \beta_{i2} c_2 + \ldots + \beta_{im} c_m = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots (m - l)$$

coi coefficienti β non tutti nulli.

Le condizioni cercate consisteranno quindi in generale in $m - l$ equazioni lineari fra le $c_1, c_2, \ldots c_m$ della forma (6).

Per determinare i coefficienti $\beta_{i1}, \beta_{i2}, \ldots \beta_{im}$ moltiplichiamo le m equazioni (3) rispettivamente per $\beta_{i1}, \beta_{i2}, \ldots \beta_{im}$ e sommiamo membro a membro. Per le (6) la somma a sinistra dovrà essere identicamente eguale a zero, e quindi pure quella a destra. Uguagliamo perciò a zero i coefficienti delle $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ in

essa; verremo così a porre fra le m incognite $\beta_{i1}, \beta_{i2}, \beta_{im}$ il sistema di n equazioni lineari omogenee

$$(7) \quad \begin{cases} \beta_{i1} c_{11} + \beta_{i2} c_{21} + \ldots + \beta_{im} c_{m1} = 0 \\ \beta_{i1} c_{12} + \beta_{i2} c_{22} + \ldots + \beta_{im} c_{m2} = 0 \\ \ldots \\ \beta_{i1} c_{1n} + \beta_{i2} c_{2n} + \ldots + \beta_{im} c_{mn} = 0 . \end{cases}$$

La matrice di questo sistema differisce da quella del sistema (3) solamente per lo scambio delle verticali colle orizzontali, perciò sarà di egual caratteristica l. Ora essendo il numero l per sua natura inferiore ad m, numero delle incognite, il sistema (7), per le note proprietà dei sistemi di equazioni lineari omogenee, dovrà ammettere sempre come soluzione $m-l$ sistemi indipendenti di soluzioni particolari che determineranno completamente tutti i coefficienti β delle equazioni (6).

Possiamo quindi concludere che, nel caso in cui le dimensioni $[Q_1^{c_{1i}} Q_2^{c_{2i}} \ldots Q_m^{c_{mi}}]$ $i=1, 2, \ldots n$ di n costanti fondamentali non possano servire a esprimere le dimensioni $[Q_1^{c_1} Q_2^{c_2} \ldots Q_m^{c_m}]$ di una costante generica qualsiasi, esse potranno però sempre servire a esprimere le dimensioni di costanti sottoposte a determinati vincoli rappresentabili in generale mediante equazioni lineari omogenee fra gli esponenti $c_1, c_2, \ldots c_m$.

4. Discussione fisica del caso $l = l_1$. — Vediamo ora che cosa possiamo concludere dal punto di vista fisico relativamente alle date n costanti dalle dimensioni $[Q_1^{c_{1i}} Q_2^{c_{2i}} \ldots Q_m^{c_{mi}}]$ $i=1, 2, \ldots n$ quando si verifichi questo primo caso $l = l_1$.

Potrebbero tali costanti essere le costanti universali fondamentali di una data interpretazione fisica formata di una o più teorie in accordo fra di loro?

Per rispondere a questa domanda, consideriamo il problema della ricerca di tutte le relazioni logicamente possibili in una data teoria, e quindi di tutte le sue eventuali leggi, fra certe entità fisiche dalle dimensioni $[Q_1^{q_{1j}} Q_2^{q_{2j}} \ldots Q_m^{q_{mj}}]$ $j=0,1,2,\ldots n$.

Se sappiamo *a priori* che nella teoria considerata non possono intervenire costanti universali, il problema si riconduce in generale, per la nota teoria dell'Omogeneità delle equa-

zioni della fisica, alla risoluzione di equazioni dimensionali del tipo

$$[Q_1^{q_{10}} Q_2^{q_{20}} \dots Q_m^{q_{m0}}] = [\prod_{j=1}^{j=n} (Q_1^{q_{1j}} Q_2^{q_{2j}} \dots Q_m^{q_{mj}})^{\alpha_j}],$$

nelle quali le α_j rappresentano le incognite. Tale equazione non è che un caso particolare della (2^{bis}) che abbiamo discussa. Sapremo quindi sempre, quando è possibile, risolvere il nostro problema.

Ma se è invece prevedibile l'intervento di costanti universali, se ne dovrà tener conto considerando specialmente le dimensioni dell'eventuale loro risultante C e quindi riconducendo il nostro problema alla risoluzione di equazioni dimensionali della forma:

$$(8) \qquad [Q_1^{q_{10}} Q_2^{q_{20}} \dots Q_m^{q_{m0}}] = [C] [\prod_{j=1}^{j=n} (Q_1^{q_{1j}} Q_2^{q_{2j}} \dots Q_m^{q_{mj}})^{\alpha_j}].$$

Ora se le costanti universali fondamentali di quella teoria fossero le n costanti dalle dimensioni $[Q_1^{c_{1i}} Q_2^{c_{2i}} \dots Q_m^{c_{mi}}]$ $i = 1, 2, \dots n$, per le quali è verificata la condizione $l = l_1$ e quindi la C potesse assumere qualsiasi dimensione $[Q_1^{c_1} Q_2^{c_2} \dots Q_m^{c_m}]$, il nostro problema sarebbe completamente indeterminato, potendo ammettere come soluzione qualunque sistema di valori delle α_j dato arbitrariamente.

In quella teoria, colle premesse precedenti, fra le diverse entità sarebbe quindi possibile qualsiasi legge fisica data arbitrariamente; ammissione questa che urta in modo assoluto ogni nostra concezione di teoria fisica.

Non possiamo quindi ammettere che le n costanti considerate siano le costanti universali fondamentali di una data interpretazione fisica.

5. Digressione su alcuni nuovi sistemi di unità e in particolare sulle unità naturali del Planck. — A questo punto mi permetto una breve digressione sulle numerose proposte, fatte recentemente da molti autori, di nuovi sistemi di unità essenzialmente tendenti ad esprimere le unità fondamentali in funzione di varie costanti universali, perchè la maggior

parte di esse potrebbe, a prima vista, apparire in contrasto colle conclusioni del paragrafo precedente.

Riprendiamo le equazioni (3) nel caso speciale in cui sia $l = l_1 = m = n$. Il sistema si riduce allora a n equazioni a n incognite, con determinante del sistema differente da zero. Esso ammette quindi un solo sistema di soluzioni che, come è noto, è il seguente:

$$(9) \quad \begin{cases} \alpha_1 = c_{11}\, c_1 + c_{21}\, c_2 + \ldots + c_{n1}\, c_n \\ \alpha_2 = c_{12}\, c_1 + c_{22}\, c_2 + \ldots + c_{n2}\, c_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_n = c_{1n}\, c_1 + c_{2n}\, c_2 + \ldots + c_{nn}\, c_n . \end{cases}$$

In questo caso sarà quindi sempre possibile di esprimere univocamente le dimensioni d'una generica costante $[Q_1^{c_1}\, Q_2^{c_2} \ldots \ldots Q_n^{c_n}]$ mediante quelle di n costanti dalle dimensioni $[Q_1^{c_{1i}}\, Q_2^{c_{2i}} \ldots Q_n^{c_{ni}}]$ $i = 1, 2, \ldots n$.

Proponiamoci in particolare di esprimere le dimensioni di una delle Q, per es. $[Q_1]$ per mezzo delle dette n costanti. Si troveranno immediatamente le α corrispondenti ponendo nelle (9) $c_1 = 1, c_2 = c_3 = \ldots = c_n = 0$.

Ripetendo l'operazione per le $[Q_2]$, $[Q_3]$, ... $[Q_n]$ si otterranno le espressioni:

$$(10) \quad \begin{cases} [Q_1] = [\prod_{i=1}^{i=n} (Q_1^{c_{1i}}\, Q_2^{c_{2i}} \ldots Q_n^{c_{ni}})^{c_{1i}}] \\ [Q_2] = [\prod_{i=1}^{i=n} (Q_1^{c_{1i}}\, Q_2^{c_{2i}} \ldots Q_n^{c_{ni}})^{c_{2i}}] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ [Q_n] = [\prod_{i=1}^{i=n} (Q_1^{c_{1i}}\, Q_2^{c_{2i}} \ldots Q_n^{c_{ni}})^{c_{ni}}]. \end{cases}$$

Queste equazioni mostrano la possibilità di esprimere le n entità fisiche fondamentali $Q_1, Q_2 \ldots Q_n$ in funzione di n costanti universali dalle dimensioni $[Q_1^{c_{1i}}\, Q_2^{c_{2i}} \ldots Q_n^{c_{ni}}]$ $i = 1, 2, \ldots n$ quando sia soddisfatta la condizione $l = l_1 = n$.

Ora, si è ripetutamente proposto di utilizzare questa proprietà per stabilire per la misura di tutte le entità fisiche sistemi di unità indipendenti da speciali contingenze e solamente

in relazione con costanti universali, assumendo, per es., come unità per la misura delle $Q_1, Q_2 \ldots Q_n$ omologhe quantità, tali che in quel nuovo sistema le n costanti universali scelte come fondamentali vengano ad avere il valore *uno*.

Ma, per quanto si è detto al n° 4, risulta l'impossibilità di ricavare da una sola teoria le costanti universali fondamentali necessarie per la definizione di questi nuovi sistemi di unità ed è necessario di ricorrere a costanti di teorie indipendenti per poter giungere alle equazioni (10). E ciò si è verificato in ogni applicazione.

Il Planck, per es., propose un *sistema di unità naturali* fondato sulle seguenti espressioni reciproche delle entità fondamentali del sistema l, t, m e T e delle tre costanti universali fondamentali della teoria dell'irraggiamento c, k ed h, alle quali dovette però aggiungere la costante g della teoria della gravitazione:

$$
\begin{aligned}
[c] &= [l\, t^{-1}] & [l] &= [c^{-\frac{3}{2}}\, h^{\frac{1}{2}}\, g^{\frac{1}{2}}] \\
[k] &= [l^2\, t^{-2}\, m T^{-1}] & [t] &= [c^{-\frac{5}{2}}\, h^{\frac{1}{2}}\, g^{\frac{1}{2}}] \\
[h] &= [l^2\, t^{-1}\, m] & [m] &= [c^{\frac{1}{2}}\, h^{\frac{1}{2}}\, g^{-\frac{1}{2}}] \\
[g] &= [l^3\, t^{-2}\, m^{-1}] & [T] &= [c^{\frac{5}{2}}\, k^{-1}\, h^{\frac{1}{2}}\, g^{\frac{1}{2}}].
\end{aligned}
$$

6. Discussione fisica del caso $l \neq l_1$. — Vediamo ora se nel caso $l \neq l_1$, quando cioè le n costanti date non sono atte ad esprimere le dimensioni di una qualsiasi costante universale, ma solamente quelle di costanti sottoposte ad un certo vincolo, l'ipotesi che esse siano le costanti universali fondamentali di una determinata interpretazione fisica urti ancora contro la difficoltà logica del caso precedente.

Ragionando in modo analogo a quello usato al n° 4, il problema della ricerca di tutte le eventuali leggi fra entità fisiche dalle dimensioni $[Q_1^{q_{1j}}\, Q_2^{q_{2j}} \ldots Q_m^{q_{mj}}]$ $j = 0, 1, 2, \ldots n$, verrà sempre ricondotto alla risoluzione della stessa equazione (8), ma coll'aggiunta delle equazioni che esprimono il vincolo cui sono soggette le dimensioni dell'eventuale costante C.

Si avrà quindi in generale da soddisfare al sistema:

$$
(11) \quad \begin{cases}
[Q_1^{q_{10}} Q_2^{q_{20}} \ldots Q_m^{q_{m0}}] = [Q_1^{c_1} Q_2^{c_2} \ldots Q_m^{c_m}] \left[\prod_{j=1}^{j=n} (Q_1^{q_{1j}} Q_2^{q_{2j}} \ldots Q_m^{q_{mj}})^{\alpha_j}\right] \\
\beta_{i1}\, c_1 + \beta_{i2}\, c_2 + \ldots + \beta_{im}\, c_m = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots (m - l).
\end{cases}
$$

Tale sistema ammette evidentemente la possibilità di una o più determinazioni delle α_j, a ciascuna delle quali corrisponderà naturalmente una soluzione del nostro problema.

Colla considerazione quindi del vincolo che lega le possibili costanti universali di una teoria viene quindi non solo eliminata l'indeterminazione che apportava la considerazione del possibile intervento, senza limitazioni, di eventuali costanti universali, ma viene introdotto in ogni teoria fisica un elemento per essa caratteristico, che la ravvicina molto al tipo della dinamica, ove le leggi sono sempre rappresentate da relazioni direttamente logiche fra le diverse entità e non rese logiche mediante l'assegnazione di convenienti dimensioni ad una qualche costante.

Le conclusioni enunciate in fine del paragrafo 1 sono quindi le logiche conseguenze di quanto precede.

Osserviamo infine che, data la loro forma, le equazioni esprimenti il vincolo delle costanti possono sempre essere trasformate nelle seguenti:

$$\gamma_{i1} c_1 + \gamma_{i2} c_2 + \ldots + \gamma_{il} c_l = c_{l+i} \qquad i = 1, 2, \ldots (m-l),$$

e che quindi il sistema (11) potrà sempre essere sostituito dalla sola equazione dimensionale:

$$[Q_1^{q_{10}} Q_2^{q_{20}} \ldots Q_m^{q_{m0}}] = [Q_1^{c_1} Q_2^{c_2} \ldots Q_l^{c_l} \prod_{i=1}^{i=m-l} Q_{l+i}^{\gamma_{i1} c_1 + \gamma_{i2} c_2 + \ldots + \gamma_{il} c_l}]$$

$$[\prod_{j=1}^{j=n} (Q_1^{q_{1j}} Q_2^{q_{2j}} \ldots Q_m^{q_{mj}})^{\alpha_j}], \tag{12}$$

della quale vedremo immediatamente le applicazioni in vari campi della fisica.

7. Applicazioni alla teoria elettromagnetica dell'irraggiamento termico. — Come primo esempio di applicazione delle considerazioni precedenti, consideriamo la teoria dell'irraggiamento termico, intesa nel senso già accennato al n° 1, vale a dire quale può essere sviluppata applicando i principî della termodinamica alla nozione dell'irraggiamento secondo la teoria elettrodinamica di Maxwell. Come è noto, seguendo quest'ordine di idee, mentre per l'irraggiamento totale si giunge a stabilire

tutta la serie delle leggi fondamentali, per gli irraggiamenti delle singole frequenze si giunge solamente alla legge di Wien, la quale, pur esprimendo una loro proprietà generale, non può certamente essere considerata come una completa legge dell'irraggiamento.

Vedremo che le considerazioni precedenti ci permetteranno di giungere senz' altro agli stessi risultati dei metodi classici.

Assumiamo come sistema di dimensioni quello fondato sulle entità fondamentali lunghezza l, tempo t, massa m e temperatura assoluta T.

Applichiamo il fatto, tacitamente ammesso in tutte le trattazioni sull'irraggiamento e completamente verificato, che le costanti universali che si presentano in quella teoria possano tutte esprimersi mediante *tre* di esse, per es. per mezzo della velocità della luce c dalle dimensioni $[l\,t^{-1}]$, della costante dell'entropia k dalle dimensioni $[l^2\,t^{-2}\,m\,T^{-1}]$ e della costante di Planck h dalle dimensioni $[l^2\,t^{-1}\,m]$.

Il sistema corrispondente al sistema (3) sarà allora

$$\begin{aligned} \lambda &= \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 \\ \tau &= -\alpha_1 - 2\alpha_2 - \alpha_3 \\ \mu &= \alpha_2 + \alpha_3 \\ \vartheta &= -\alpha_2 \end{aligned} \tag{13}$$

Le caratteristiche delle due matrici corrispondenti alle (4) e (5)

$$\left\|\begin{matrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{matrix}\right\| \quad \text{e} \quad \left\|\begin{matrix} 1 & 2 & 2 & \lambda \\ -1 & -2 & -1 & \tau \\ 0 & 1 & 1 & \mu \\ 0 & -1 & 0 & \vartheta \end{matrix}\right\|, \tag{14, 15}$$

per valori arbitrari delle λ, τ, μ e ϑ, saranno in generale differenti, ossia la prima sarà **3** e la seconda **4**. Non sarà quindi in generale possibile di esprimere le dimensioni di una generica costante $|l^\lambda\,t^\tau\,m^\mu\,T^\vartheta|$ per mezzo delle costanti fondamentali c, k ed h; ma procedendo come indicato al n° 6, vedremo che ciò diverrà possibile, se si ammetterà che tali costanti generiche

debbano essere sempre sottoposte al vincolo espresso dall'equazione

$$\lambda + \tau - \mu = \vartheta. \tag{16}$$

Ciò equivale, evidentemente, a dire che le eventuali costanti di quella teoria in generale dovranno soddisfare all'equazione dimensionale

$$[C] = [l^\lambda\, t^\tau\, m^\mu\, T^{\lambda+\tau-\mu}]. \tag{17}$$

Orbene, il vincolo espresso dalle equazioni (16) o (17) è caratteristico per la teoria dell'irraggiamento, intesa nel senso sopra detto, tanto che, dalla semplice ammissione di esso, potremo dedurne tutte le leggi principali.

a) Proponiamoci, per esempio, di determinare le possibili relazioni fra la densità specifica dell'irraggiamento nero nel vuoto u e la temperatura assoluta T. La u ha le dimensioni di una densità di energia, ossia $[l^{-1}\, t^{-2}\, m]$; la relazione cercata, se sarà possibile, dovrà necessariamente comprendere una costante dimensionale, non essendo possibile nessuna relazione omogenea fra le sole entità u e T; dovrà quindi avere la forma generale

$$u = f\,(T, C).$$

Tenendo conto delle dimensioni della u e del vincolo, cui è sottoposta ogni costante di questa teoria, potremo scrivere l'equazione corrispondente alla (12), ossia

$$[l^{-1}\, t^{-2}\, m] = [l^\lambda\, t^\tau\, m^\mu\, T^{\lambda+\tau-\mu}]\,[T]^\alpha.$$

Identificando gli esponenti delle l, t, m e T nei due membri giungeremo alla soluzione unica:

$$\alpha = 4\,, \quad \lambda = -1\,, \quad \tau = -2\,, \quad \mu = 1\,, \quad \vartheta = -4.$$

La formula cercata esiste quindi ed è precisamente

$$u = [l^{-1}\, t^{-2}\, m\, T^{-4}]\, T^4 = \text{cost}\, T^4, \tag{17'}$$

la quale esprime la nota legge di Stefan-Boltzmann.

b) Proponiamoci ancora di determinare le possibili relazioni fra la pressione p dell'irraggiamento nero contenuto in una cavità ed il volume V di essa.

Tenendo conto delle dimensioni delle p e V e procedendo come per la ricerca precedente, porremo l'equazione

$$[l^{-1} t^{-2} m] = [l^{\lambda} t^{\tau} m^{\mu} T^{\lambda+\tau-\mu}] [l^3]^{\alpha},$$

che sarà univocamente soddisfatta da

$$\alpha = \frac{4}{3}, \qquad \lambda = 3, \qquad \tau = -2, \qquad \mu = 1, \qquad \vartheta = 0.$$

La relazione cercata esiste e sarà quindi:

$$(17'') \qquad p = [l^3 t^{-2} m] V^{-\frac{4}{3}} = \text{Cost}\, V^{-\frac{4}{3}},$$

che è appunto la nota legge collegante la pressione e il volume dell'irraggiamento nero per compressioni o espansioni adiabatiche.

c) Proponiamoci infine di trovare una relazione fra la densità dell'irraggiamento di un dato periodo u_{ν}, il periodo stesso ν e la temperatura T.

Tenendo conto che la densità specifica dell'irraggiamento di un dato periodo ha le dimensioni $[l^{-1} t^{-1} m]$ e procedendo come abbiamo fatto finora, giungeremo all'equazione:

$$[l^{-1} t^{-1} m] = [l^{\lambda} t^{\tau} m^{\mu} T^{\lambda+\tau-\mu}] [t^{-1}]^{\alpha_1} [T]^{\alpha_2}$$

la quale evidentemente non ammette una soluzione unica, come ben dovevamo prevedere, ma può però fornire una relazione fra le diverse entità fisiche considerate. Poniamola sotto la forma

$$(18) \qquad [1] = [l^{-1} t^{-1} m]^{-1} [l^{\lambda} t^{\tau} m^{\mu} T^{\lambda+\tau-\mu}] [t^{-1}]^{\alpha_1} [T]^{\alpha_2},$$

la quale mostra che il prodotto indeterminato a destra deve essere di dimensioni fisiche nulle, ossia essere un semplice numero.

Come è noto dalla teoria delle dimensioni, l'insieme di tali prodotti indeterminati può venir rappresentato nella sua forma

più generale come una funzione arbitraria dei vari prodotti indipendenti di dimensioni nulle, che possono formarsi colle potenze delle diverse entità fisiche considerate.

Cerchiamo quindi i prodotti indipendenti, di dimensioni nulle, formati da una qualche costante di dimensioni soddisfacenti al vincolo (17) e dalle entità fisiche ν, u_ν e T. Essi saranno

$$u_\nu^{-1}\,\nu^3\,C_1 \qquad \text{e} \qquad T\,\nu^{-1}\,C_2$$

essendo

$$[C_1]=[l^{-1}\,t^2\,m] \qquad \text{e} \qquad [C_2]=[t^{-1}\,T^{-1}].$$

L'equazione (18) potrà allora scriversi, indicando con F una funzione arbitraria

$$[1]=[F([u_\nu^{-1}\,\nu^3\,C_1],\ [T\,\nu^{-1}\,C_2])],$$

che risolta per rapporto a $[u_\nu^{-1}\,\nu^3\,C_1]$ darà

$$[1]=[u_\nu^{-1}\,\nu^3\,C_1]\,[\varphi([T\,\nu^{-1}\,C_2])],$$

e quindi

$$u_\nu = C_1\,\nu^3\,\varphi\left(C_2\frac{T}{\nu}\right), \tag{17'''}$$

che è appunto la nota legge di Wien. Essa, come fu già accennato, rappresenta la estrema determinazione nella teoria dell'irraggiamento, alla quale si è potuto giungere basandosi solamente sui principî generali della termodinamica e dell'elettrodinamica.

8. Applicazioni alla teoria di Maxwell. — Come secondo esempio consideriamo la teoria dell'elettricità secondo le linee generali poste da Maxwell e applichiamo qui pure il fatto noto, anzi quasi sempre esplicitamente rilevato nei trattati, ma poi non utilizzato, che tutte le costanti universali di quella teoria possono esprimersi per mezzo di due di esse, per es. della costante dielettrica ϵ e della permeabilità magnetica μ nel vuoto, oppure di una di queste e della velocità della luce c.

Assumiamo come sistema di dimensioni quello fondato sulle entità fondamentali l, t, m ed e, indicando con e la quantità di elettricità, notando però fin d'ora che per la natura stessa

delle questioni trattate, i risultati cui giungeremo sono perfettamente indipendenti da questa scelta. Parimenti assumiamo come costanti fondamentali la ϵ e la c, che nel sistema di dimensioni scelto avranno rispettivamente le dimensioni $[l^{-3} t^2 m^{-1} e^2]$ e $[l t^{-1}]$.

Ora, mediante le dimensioni di queste costanti sarà possibile di esprimere solamente quelle di costanti generiche $[l^\lambda t^\tau m^\mu e^\eta]$ sottoposte al vincolo espresso dalle equazioni:

$$(19) \qquad -2\lambda - 2\tau = \eta \qquad \text{e} \qquad \lambda + \tau = \mu,$$

vale a dire di quelle di costanti soddisfacenti alla condizione dimensionale

$$(20) \qquad [C] = [l^\lambda t^\tau m^{\lambda+\tau} e^{-2\lambda-2\tau}].$$

Anche il vincolo espresso dalle equazioni (19) o (20) è caratteristico per la teoria di Maxwell e da esso possiamo ricavarne le leggi principali.

a) Proponiamoci, per es., di trovare le relazioni che possono sussistere fra la forza F, la quantità di elettricità e, la distanza l, ed un'eventuale costante del tipo delle (20), vale a dire di determinare le possibili relazioni della forma

$$F = f(e, l, C).$$

Poniamo l'equazione dimensionale analoga alla (12), tenendo conto che l'entità fisica *forza* ha le dimensioni $[l t^{-2} m]$

$$[l t^{-2} m] = [l^\lambda t^\tau m^{\lambda+\tau} e^{-2\lambda-2\tau}] [e]^{\alpha_1} [l]^{\alpha_2}.$$

Procedendo come al solito troveremo la sua unica soluzione

$$\alpha_1 = 2, \quad \alpha_2 = -2, \quad \lambda = 3, \quad \tau = -2, \quad \mu = 1, \quad \eta = -2,$$

alla quale corrisponderà la relazione

$$F = [l^3 t^{-2} m e^{-2}] e^2 l^{-2} = [\epsilon]^{-1} e^2 l^{-2},$$

che, coll'approssimazione di un fattore numerico, non è altro che la nota legge di Coulomb.

b) Proponiamoci di trovare le relazioni possibili fra la densità dell'energia u e la forza elettrica E in un punto dello spazio vuoto, vale a dire le possibili relazioni della forma

$$u = f(E, C),$$

indicando con C la solita costante sottoposta al vincolo (20).

Essendo le dimensioni della E nel nostro sistema $[l\,t^{-2}\,m\,e^{-1}]$, potremo porre l'equazione:

$$[l^{-1}\,t^{-2}\,m] = [l^{\lambda}\,t^{\tau}\,m^{\lambda+\tau}\,e^{-2\lambda-2\tau}]\,[l\,t^{-2}\,m\,e^{-1}]^{\alpha},$$

che ammettendo l'unica soluzione

$$\alpha = 2, \quad \lambda = -3, \quad \tau = 2, \quad \mu = -1, \quad \eta = 2$$

condurrà alla relazione

$$u = [l^{-3}\,t^{2}\,m^{-1}\,e^{2}]\,E^{2} = [\epsilon]\,E^{2},$$

ossia, sempre coll'approssimazione di un fattore numerico, alla caratteristica legge che, con opportuna scelta di unità (delle quali abbiamo espressamente evitato di fare una scelta, perchè tutte queste considerazioni di indole generale valgono per qualsiasi sistema di unità), si usa scrivere

$$u = \frac{\epsilon E^{2}}{8\pi}.$$

Procedendo in modo perfettamente analogo potremmo giungere alla formula corrispondente per la forza magnetica H

$$u = \left[\frac{c^{2}}{\epsilon}\right] H^{2} = [\mu]\,H^{2},$$

anch'essa caratteristica della teoria di Maxwell e ordinariamente espressa colla formula:

$$u = \frac{\mu H^{2}}{8\pi}.$$

9. — Come è noto, la moderna teoria degli elettroni è ordinariamente inquadrata nelle linee generali della teoria di Maxwell, vale a dire che le ipotesi e trattazioni particolari di quella teoria conducono, almeno per i corpi in riposo, a leggi in perfetto accordo colla teoria di Maxwell. Le sue costanti universali anche sono le stesse, perciò questi metodi generali devono condurre ad esatte conclusioni anche quando vengano applicati alla teoria elettronica.

Trattiamo due semplici esempi.

a) Vediamo, per es., se è possibile una relazione fra la massa, la quantità di elettricità e il raggio di un elettrone supposto sferico, come complicati sviluppi teorici conducono ad ammettere. Si tratterà di trovare le relazioni possibili della forma

$$[m] = f(l, e, C).$$

Procedendo come al solito porremo l'equazione dimensionale

$$[m] = [l^{\lambda} t^{\tau} m^{\lambda+\tau} e^{-2\lambda-2\tau}] [l]^{a_1} [e]^{a_2},$$

alla quale corrisponderà la sola determinazione di f data dalla equazione

$$m = [l m^{-1} e^{-2}] e^2 l^{-1} = \text{Cost} \frac{e^2}{l},$$

che concorda perfettamente colla nota espressione della massa di un elettrone sferico di raggio r

$$m_0 = \text{Cost} \frac{e^2}{r}$$

quando esso si muova con velocità sensibilmente inferiori a quella della luce, alle quali è quindi ancora applicabile la nostra meccanica classica.

b) Vediamo ancora di prevedere una relazione fra l'accelerazione a di un elettrone, la sua carica e e l'energia W da esso irradiata nell'unità di tempo, nella forma

$$\frac{dW}{dt} = f(a, C).$$

L'equazione dimensionale sarebbe

$$[l^2 t^{-3} m] = [l^\lambda t^\tau m^{\lambda+\tau} e^{-2\lambda-2\tau}] [l t^{-2}]^{a_1} [e]^{a_2}.$$

La relazione corrispondente alla sua unica soluzione sarà

$$\frac{dW}{dt} = [t m e^{-2}] a^2 e^2 = \text{Cost}\, a^2 e^2,$$

la quale è appunto una nota relazione della teoria elettronica.

10. Applicazioni alla teoria dell'irraggiamento secondo la teoria dell'emissione. — Le considerazioni precedentemente svolte si applicano a qualsiasi teoria logica, indipendentemente dal fatto che sia essa o non sia verificata dalla nostra esperienza, quindi anche alla teoria dell'irraggiamento fondata, oltre che sulla termodinamica, sulla teoria dell'emissione.

La considerazione delle linee fondamentali di tale teoria può essere talvolta interessante, non solo per istituire un parallelo colla teoria ora ammessa, ma anche perchè parecchi dei fenomeni che accompagnano l'emissione, la propagazione e la riflessione di radiazioni elettriche sono in perfetta concordanza coll'antica teoria dell'emissione della luce.

Come sue costanti fondamentali possiamo in primo luogo assumere le c e k, le quali evidentemente conservano in questa gli stessi significati e le stesse dimensioni che nella teoria precedente.

Per ottenere poi le dimensioni di una terza costante fondamentale possiamo ricorrere a ragionamenti analoghi a quelli d'ordinario impiegati per giungere *termodinamicamente* (e quindi indipendentemente dalla particolare *teoria dei quanta*) alla definizione della h. Vedremmo così che una costante dalle dimensioni $[l^2 m]$ può servire, unitamente alle c e k, per esprimere tutte le costanti di quella teoria, come d'altra parte è facile verificare.

Ciò ammesso, sviluppando semplici calcoli algebrici perfettamente analoghi ai precedenti, giungeremo all'equazione

$$\lambda + \tau - 2\mu - 2\vartheta = 0 \tag{21}$$

per esprimere il vincolo fra gli esponenti delle dimensioni delle diverse possibili costanti, e quindi all'equazione dimensionale

$$[C] = \left[l^{\lambda} t^{\tau} m^{\mu} T^{\frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}\tau - \mu}\right] \tag{22}$$

per esprimere le dimensioni generiche di una qualsiasi di tali costanti; due equazioni che è assai interessante di confrontare colle omologhe (16) e (17) della teoria elettromagnetica.

Coll'aiuto delle equazioni (21) o (22) e con ragionamenti analoghi a quelli dei tre paragrafi precedenti potremo, senza alcuna difficoltà, dedurre le leggi fondamentali di questa teoria.

Senza accennare particolarmente ai calcoli rileviamo solamente che la relazione omologa alla (17′) è

$$u = \text{Cost}\; T^{\frac{5}{2}}$$

e l'omologa della (17″) è

$$p = \text{Cost}\; V^{-\frac{3}{5}};$$

due relazioni identiche a notissime leggi della teoria cinetica dei gas e che mostrano la stretta affinità fra quella teoria e la teoria dell'emissione.

Parimenti la relazione omologa alla (17‴) è

$$u_{\nu} = C_1 \nu^4 \varphi \left(C_2 \frac{T}{\nu^2}\right);$$

una relazione che è assai istruttivo di comparare alla (17‴) (legge dello spostamento di Wien) e che interessa tanto la teoria dei gas, quanto le teorie corpuscolari delle radiazioni elettriche, e sulla quale mi riservo di ritornare in seguito.

L'Accademico Segretario
CARLO FABRIZIO PARONA

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona. Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di **C. Frati, A. Baudi di Vesme** e **C. Cipolla.**

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in-f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di **C. Cipolla, G. De Sanctis** e **P. Fedele.**

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in-4°, di 70 pagg. e 96 tav.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza del 13 Gennaio 1918 . *Pag.* 163

Mori Breda (Gilda). — Estrazione graduale della radice quadrata „ 165

Vercelli (Francesco). — Sul valore meccanico e fisico delle differenze e delle tendenze barometriche . . . . . . „ 177

Straneo (Paolo). — Relazioni generali fra teorie fisiche e costanti universali . . . . „ 185

Tip. Vincenzo Bona — Torino

ATTI

DELLA

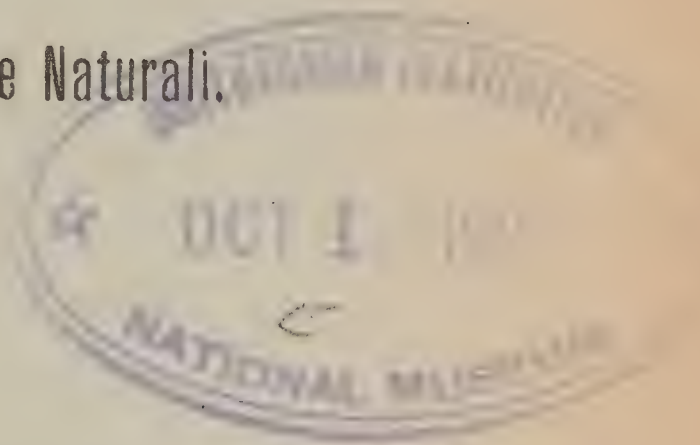
REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. LIII. DISP. **6ª, 7ª** E **8ª, 1917-1918**.

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 3.
1918

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 27 Gennaio 1918.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE ENRICO D'OVIDIO
DIRETTORE DELLA CLASSE

Sono presenti i Soci Naccari, Peano, Jadanza, Guareschi, Guidi, Mattirolo, Grassi, Somigliana, Fusari e Parona Segretario.

Si legge e si approva l'atto verbale della precedente adunanza.

Il Segretario presenta in omaggio da parte dell'A. Socio corrispondente Prof. A. Issel la Memoria *Le selci enigmatiche di Breonio*, rilevandone l'importanza paletnologica. Il Presidente ringrazia a nome della Classe.

Si annunzia l'invio e si presenta un lavoro manoscritto del sig. Ing. Casimiro Corbetta col titolo *La soluzione generale dell'equazione cubica e della bisezione dell'angolo*. Il manoscritto sarà conservato in Archivio.

Il Socio Mattirolo legge l'indirizzo ad Hugo de Vries, che sarà trasmesso insieme col diploma di nomina a Socio corrispondente: diploma e indirizzo saranno presentati all'illustre scienziato in occasione delle onoranze fissate per il 18 feb-

braio prossimo. L'indirizzo, approvato dalla Classe, si trascrive a verbale:

" Venerato Maestro.

" Nel giorno in cui i più alti intelletti e i più nobili cuori
" del mondo esaltano e celebrano la vostra opera immortale,
" la Reale Accademia delle Scienze di Torino, acclamandovi
" suo Socio corrispondente, coi sensi della sua profonda ammi-
" razione vi invia fervidissimi voti augurali di prospera e ga-
" gliarda longevità.

" Coi sensi del più rispettoso ossequio „.

L'Accademico Segretario
CARLO FABRIZIO PARONA

CLASSI UNITE

Adunanza del 3 Febbraio 1918.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE GIAMPIETRO CHIRONI
VICEPRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti, della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, i Soci D'Ovidio, Direttore della Classe, Naccari, Segre, Peano, Jadanza, Guareschi, Guidi, Parona, Mattirolo, Grassi, Fusari;

e della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche, i Soci S. E. Boselli, Direttore della Classe, Pizzi, De Sanctis, Brondi, Einaudi, Baudi di Vesme, Patetta, Prato, Cian, Valmaggi, e Stampini che funziona da Segretario.

È scusata l'assenza dei Soci Somigliana e Panetti della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, e dei Soci Ruffini, Sforza, Schiaparelli e Vidari della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche.

Si legge e si approva l'atto verbale dell'adunanza precedente delle Classi unite del 10 giugno u. s.

Il Vicepresidente Chironi, che presiede l'adunanza, invita l'Accademia a votare, mediante schede segrete e ai sensi dell'art. 11 dello Statuto accademico, per l'elezione del Presidente dell'Accademia in sostituzione del compianto Senatore Lorenzo Camerano, tenuto presente che il Presidente eligendo deve

appartenere alla Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali ai termini del primo comma dell'art. 3 dello Statuto.

Votano tutti i 23 Soci presenti, e la votazione ha il seguente risultato:

Andrea Naccari, voti 22
Enrico D'Ovidio, voti 1.

Per conseguenza, il Vicepresidente Chironi dichiara eletto, salva l'approvazione sovrana, a Presidente dell'Accademia il Socio Andrea Naccari, al quale esprime, col plauso dell'adunanza, le più vive congratulazioni, rilevando l'alto significato dell'unanime votazione, che è riconoscimento degli insigni meriti scientifici del Socio Naccari, e nel tempo stesso atto di solidarietà patriottica verso le province sorelle del Veneto invase dal nemico, alle quali appartiene il Collega che l'Accademia ha meritamente onorato della sua fiducia. Il Socio Naccari ringrazia, commosso, e dichiara che accetterà l'altissimo ufficio, sebbene, per ragioni di salute, avrebbe desiderato, come già l'aveva dichiarato, che su altro Collega cadesse la scelta.

Gli Accademici Segretari
Carlo Fabrizio Parona
Ettore Stampini

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 10 Febbraio 1918.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE ENRICO D'OVIDIO
DIRETTORE DELLA CLASSE

Sono presenti i Soci: Naccari, Segre, Peano, Jadanza, Guareschi, Guidi, Mattirolo, Grassi, Somigliana, Fusari, Panetti e Parona Segretario.

Scusano l'assenza i Soci Salvadori e Foà.

Si legge e si approva l'atto verbale della precedente adunanza.

Il Socio Guareschi offre in omaggio le sue *Osservazioni intorno ad alcuni problemi riguardanti i progressi della nostra agricoltura*, ed il Socio Panetti la sua nota su *Un apparecchio per la misura simultanea della spinta e della potenza dei gruppi moto-propulsori nel Laboratorio di aeronautica del R. Politecnico di Torino*.

Il Presidente comunica che il Socio nazionale prof. R. Pirotta ha inviato in dono la sua pubblicazione *Il Parco nazionale dell'Abruzzo*, e ne parla. Inviarono anche in omaggio: il professore F. Gomes Teixeira i volumi 6° e 7° delle sue *Obras sobre Mathematica*, e *Duas Allocuções lidas no Congresso de Sevilha*; M. Jules Amar la sua opera *Organisation physiologique du travail*. Il Presidente esprime vivi ringraziamenti a nome della Classe.

Adunanza del 24 Febbraio 1918.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE ENRICO D'OVIDIO
DIRETTORE DELLA CLASSE

Sono presenti i Soci Salvadori, Naccari, Segre, Peano, Jadanza, Guareschi, Guidi, Mattirolo, Grassi, Somigliana, Fusari, Panetti e Parona Segretario.

Si legge e si approva l'atto verbale dell'adunanza precedente.

Il Socio Mattirolo, riferendosi alla relazione del nostro Socio nazionale R. Pirotta relativa al progettato Parco Nazionale nell'Abruzzo, presentata nella precedente adunanza, richiama l'attenzione della Classe sulla serietà ed importanza del progetto d'iniziativa della Federazione *Pro Montibus*, e coll'unanime consenso dei colleghi propone il seguente ordine del giorno, da trasmettere alla Federazione stessa:

" La R. Accademia delle Scienze di Torino, udita la Rela-
" zione del suo Socio nazionale Romualdo Pirotta sulla Istitu-
" zione di un Parco Nazionale nel territorio delle ex Caccie
" Reali nell'altipiano dell'Abruzzo centrale, convinta della uti-
" lità, della importanza e dell'opportunità di conservare almeno
" qualche parte del patrimonio nazionale di bellezza di Arte
" nelle sue antiche condizioni, associa la sua voce a quella di
" tante altre Istituzioni italiane perchè sia tradotto in atto tale
" nobilissimo progetto della Federazione *Pro Montibus* „.

Il Socio Guareschi ricorda che il collega Vito Volterra, nostro Socio nazionale, già Socio residente, fu nominato con splendida votazione Socio straniero dell'Accademia di Francia, e, rilevando l'insigne onore che ne viene meritamente all'eletto, propone che la Classe manifesti il suo compiacimento indirizzando al Senatore Volterra le più vive congratulazioni. La

Classe con plauso fa sua la proposta del Socio Guareschi e la presidenza provvederà a porla in atto.

Presentano per la stampa negli *Atti*:

Il Socio Peano: una Nota del Prof. C. Burali-Forti col titolo *Linea in ogni cui punto è assegnata una direzione invariabilmente collegata al triedro principale.*

Il Socio Guidi: una Nota dei Signori Prof. G. Colonnetti ed Alberto Pozzo col titolo *Le proprietà magnetiche degli acciai e la loro utilizzazione nel collaudo dei proietti.*

Raccoltasi poscia la Classe in seduta privata procedette alla elezione dei Soci corrispondenti e riuscirono eletti i signori:

I Sezione, *Matematiche pure*:

Prof. Luigi Berzolari dell' Università di Pavia.
„ Roberto Marcolongo „ „ Napoli.
„ Salvatore Pincherle „ „ Bologna.
„ Gregorio Ricci-Curbastro „ „ Padova.
„ Francesco Severi „ „ Padova.

II Sezione, *Matematiche applicate. Astronomia e Scienza dell'ingegnere civile e militare*:

Prof. Giuseppe Albenga dell'Università di Pisa.
„ Gustavo Colonnetti „ „ Pisa.
„ Gian Antonio Maggi „ „ Pisa.
„ Vincenzo Reina, R. Scuola Ingegneri, Roma.

III Sezione, *Fisica generale e sperimentale*:

Prof. Orso Mario Corbino, R. Università di Roma.
„ Luigi Lombardi, Regio Politecnico di Napoli.
Dott. Guglielmo Marconi, Londra.
Prof. Luigi Palazzo, Direttore del R. Ufficio Centrale di Meteorologia e Geodinamica, Roma.

IV Sezione, *Chimica generale ed applicata*:

Prof. Angelo ANGELI, R. Istituto di Studi Superiori, Firenze.
„ Enrico Luigi LE CHATELIER dell'Istituto di Francia, Parigi.
„ Raffaele NASINI, R. Università, Pisa.
„ Arnaldo PIUTTI, „ Napoli.

V Sezione, *Mineralogia, Geologia e Paleontologia*:

Prof. Ettore ARTINI, Direttore del Museo Civico di Storia Nat., Milano.
„ Luigi BRUGNATELLI di Mineralogia nella R. Università di Pavia.
„ Giorgio DAL PIAZ di Geologia nella R. Università di Padova.
„ Carlo DE STEFANI di Geologia nel R. Istituto di St.[i] Sup.[i], Firenze.

VI Sezione, *Botanica e Fisiologia vegetale*:

Prof. Federico Orpen BOWER di Botanica nella R. Università di Glasgow. S.
„ Giovanni Battista DE TONI di Botanica nella R. Università di Modena.

VII Sezione, *Zoologia, Anatomia e Fisiologia comparate*:

Prof. Pietro ALBERTONI di Fisiologia nell'Università di Bologna.
„ Alfonso BOVERO di Anatomia Umana ed Istologia alla Facoltà di Medicina, S. Paolo del Brasile.
„ Giulio CHIARUGI di Anatomia Umana nel R. Istituto di Studi Superiori di Firenze.
„ Giovanni Battista GRASSI di Anatomia e Fisiologia Comparata nella R. Università di Roma.
„ L. VIALLETON di Anatomia Microscopica, Montpellier.
„ Daniele ROSA di Zoologia nella R. Università di Modena.

LETTURE

Linea in ogni cui punto è assegnata una direzione invariabilmente collegata al triedro principale.

Nota di C. BURALI-FORTI.

Non mi consta che sia stato risolto, e nemmeno posto, il problema: *determinare tutte le linee tali che, essendone P il punto generico, la retta uscente da P e formante angoli costanti dati con gli spigoli del triedro principale in P, formi una superficie rigata della quale è assegnato* a priori *il cono direttore.*

Tale problema si risolve assai facilmente facendo uso del calcolo vettoriale ed assume la forma generica seguente: *dato un vettore unitario* $\boldsymbol{u}$ *funzione (continua, derivabile, ecc.) della variabile numerica* t *e i numeri reali (costanti)* α, β, *determinare le linee, descritte dal punto P funzione pure di* t, *tali che* $\boldsymbol{u}$ *formi l'angolo di* α *radianti con la tangente in P e di* β *radianti con la normale principale in P.* — In sostanza: *si vuol determinare la linea P in modo che il vettore* $\boldsymbol{u}$ *sia invariabilmente collegato, e in modo dato, col triedro principale in P.* — Il *cono* che si presenta nella prima forma è quello descritto dalla retta $O\boldsymbol{u}$, essendone O, punto fisso arbitrario, il vertice.

Allo scopo di dare le formule vettoriali risolutive sotto la loro forma più semplice, introduco, nel n. 1, i vettori unitari $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ e i numeri reali m, n collegati con $\boldsymbol{u}$, anzi determinati da $\boldsymbol{u}$, nonchè un vettore Ω, pure determinato da $\boldsymbol{u}$. Per tali elementi valgono formule identiche a quelle, vettoriali, di Frenet; le questioni relative, ad es., alle linee tracciate su di un cono si trattano, mediante tali elementi e formule che li collegano, in modo semplicissimo ed elementare.

È ovvio che per $\boldsymbol{u}$ *costante*, indipendente da t, le linee P sono *eliche* di inclinazione α sulle generatrici, parallele ad $\boldsymbol{u}$,

di un cilindro. Quindi noi supporremo sempre $\boldsymbol{u}$ *non costante*, cioè variabile con t.

Le derivate rispetto alla variabile indipendente t saranno sempre indicate con gli apici.

1. — Sia $\boldsymbol{u}$ vettore unitario funzione (continua, derivabile, ecc.) della variabile numerica t (numero reale) che varia in un intervallo dato. In tale intervallo la derivata, $\boldsymbol{u}'$, di $\boldsymbol{u}$ rispetto a t non sia nulla; quindi $\boldsymbol{u}'$ vettore non nullo sempre normale ad $\boldsymbol{u}$.

Definiamo i vettori unitari $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, i numeri reali $1/m$, $1/n$ e il vettore Ω, ponendo, rispettivamente,

$$(1) \qquad \boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{u}'}{\operatorname{mod} \boldsymbol{u}'}, \qquad \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \wedge \frac{\boldsymbol{u}'}{\operatorname{mod} \boldsymbol{u}'},$$

$$(2) \qquad \frac{1}{m} = \boldsymbol{u}' \times \boldsymbol{v}, \qquad \frac{1}{n} = \boldsymbol{w}' \times \boldsymbol{v},$$

$$(3) \qquad \Omega = \frac{1}{m} \boldsymbol{w} - \frac{1}{n} \boldsymbol{u}.$$

La terna $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ è unitaria ortogonale destrogira e il vettore Ω è normale a $\boldsymbol{v}$. È chiaro che una volta dato $\boldsymbol{u}$ in funzione di t, e sotto le ipotesi fatte, gli elementi $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, $1/m$, $1/n$, Ω sono univocamente determinati.

Tali elementi sono collegati da formule notevoli che ora esponiamo.

Per le derivate di $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ si ha

$$(4) \qquad \begin{cases} \boldsymbol{u}' = \dfrac{1}{m} \boldsymbol{v} = \Omega \wedge \boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{v}' = -\dfrac{1}{m} \boldsymbol{u} - \dfrac{1}{n} \boldsymbol{w} = \Omega \wedge \boldsymbol{v}, \\ \qquad\qquad \boldsymbol{w}' = \dfrac{1}{n} \boldsymbol{v} = \Omega \wedge \boldsymbol{w} \end{cases}$$

le seconde forme essendo compendiate dall'unica formula

$$(4') \qquad \boldsymbol{a}' = \Omega \wedge \boldsymbol{a},$$

ove $\boldsymbol{a}$ è vettore invariabilmente collegato con $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, cioè tale che i numeri $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{w}$ sono indipendenti da t.

Se con η indichiamo il segno di $1/n$ ($\eta = \pm 1$, $\eta^2 = 1$, $\eta/n \gtreqless 0$) si ha

$$(5)\qquad \frac{1}{m} = \operatorname{mod} \boldsymbol{u}', \quad \frac{1}{n} = \eta \operatorname{mod} \boldsymbol{w}', \quad \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} = \boldsymbol{v}'^2 = \Omega^2,$$

e quindi $1/m$ è sempre positivo o nullo, mentre $1/n$ è o positivo o negativo.

Per i prodotti vettoriali di $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ per le loro derivate si ha

$$(6)\qquad \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{u}' = \frac{1}{m} \boldsymbol{w}, \quad \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{v}' = \Omega, \quad \boldsymbol{w} \wedge \boldsymbol{w}' = -\frac{1}{n} \boldsymbol{u}.$$

Per il vettore Ω si ha

$$(7)\qquad \begin{cases} \Omega = \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{u}' - \frac{1}{n} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{v}' = \boldsymbol{w} \wedge \boldsymbol{w}' + \frac{1}{m} \boldsymbol{w}, \\ \Omega' = \left(\frac{1}{m}\right)' \boldsymbol{w} - \left(\frac{1}{n}\right)' \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{v}'', \\ \Omega \wedge \Omega' = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}' \wedge \boldsymbol{v}''.\, \boldsymbol{v} = \frac{1}{m^2 n^2} \begin{vmatrix} m & n \\ m' & n' \end{vmatrix} \boldsymbol{v}. \end{cases}$$

Infine si hanno i numeri seguenti, del primo specialmente dei quali dovremo far uso in seguito:

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u}' \wedge \boldsymbol{u}''}{\boldsymbol{u}'^2} = -\dfrac{1}{n}, \qquad \dfrac{\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{w}' \wedge \boldsymbol{w}''}{\boldsymbol{w}'^2} = \dfrac{1}{m}, \\ \dfrac{\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}' \wedge \boldsymbol{v}''}{\boldsymbol{v}'^2} = \dfrac{1}{m^2 + n^2} \begin{vmatrix} m & n \\ m' & n' \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Se consideriamo la curva descritta dal punto

$$P = O + \int \boldsymbol{u}\, dt,$$

allora è evidente che t, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, m, n, Ω corrispondono agli elementi che di solito si indicano con s, $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$, ρ, τ, $\boldsymbol{f} = (1/\rho)\,\boldsymbol{b} - (1/\tau)\,\boldsymbol{t}$, e ciò in virtù delle posizioni (1), (2), (3). Le (4) corrispondono alle ordinarie formule vettoriali di Frenet

e si dimostrano come queste (1) deducendole in modo assai semplice dalle (1), (2), (3). Le (4′), (5)-(8) si deducono facilmente dalle (4) e crediamo inutile sviluppare le facili dimostrazioni, che possono, invece, costituire un utile esercizio per quei lettori che vogliono prender pratica col moderno algoritmo vettoriale.

Tutte le volte che si abbia bisogno di introdurre in calcolo le derivate di $\boldsymbol{u}$ è certamente conveniente far uso degli elementi $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, m, n, Ω, che si determinano mediante $\boldsymbol{u}$ e che sono legati tra loro da relazioni semplicissime.

Ad esempio, tutto ciò che si riferisce alla geometria differenziale del cono descritto dalla retta $O\boldsymbol{u}$, con O vertice del cono, si esprime facilmente mediante i su indicati elementi. Ne diamo un cenno.

La normale al cono nel suo punto generico

$$Q = O + x\boldsymbol{u} \qquad (Q \text{ funzione di } t \text{ e di } x \text{ variabili indip.})$$

è parallela al vettore $\boldsymbol{w}$. In altri termini, il piano *tangente* e *normale* al cono lungo la generatrice $O\boldsymbol{u}$ è parallelo, rispettivamente, al piano *osculatore* e *rettificante* della linea P sopra considerata.

---

(1) C. Burali-Forti, *Geometria analitico-proiettiva* (G. B. Petrini, Torino, 1912), n. 141, p. 109; *Equivalenti omografiche delle formule di Frenet* (" Atti R. Acc. Torino ", vol. 52, 1916-17); *Sopra alcune superfici rigate*... (" Rend. R. Acc. Lincei ", vol. XXIII, ser. 2a, 2° sem., 1914).

Giova tener presente quanto segue. Gli elementi $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, $1/m$, $1/n$, Ω sono determinate *funzioni* di $\boldsymbol{u}$; i valori che queste funzioni assumono ponendo al posto di $\boldsymbol{u}$, rispettivamente, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ sono quelli indicati nel quadro seguente (cfr. la nota (5)):

$$\begin{array}{cccccc}
\boldsymbol{u}, & \boldsymbol{v}, & \boldsymbol{w}, & \dfrac{1}{m}, & \dfrac{1}{n}, & \Omega \\[2ex]
\boldsymbol{v}, & \dfrac{\Omega}{\operatorname{mod}\Omega}\wedge\boldsymbol{v}, & \dfrac{\Omega}{\operatorname{mod}\Omega}, & \dfrac{\eta\,(mn)}{\sqrt{m^2+n^2}}, & -\dfrac{1}{m^2+n^2}\begin{vmatrix} m, n \\ m', n'\end{vmatrix}, & \Omega \\[2ex]
\boldsymbol{w}, & \eta\boldsymbol{v}, & -\eta\boldsymbol{u}, & \dfrac{\eta}{n}, & -\dfrac{\eta}{m}, & \Omega
\end{array}$$

ed è notevole il significato meccanico del conservarsi di Ω (asse di istantanea rotazione) nei tre casi.

Sviluppando il cono in un piano, nel quale A è un punto fisso e $\boldsymbol{a}$ un vettore unitario costante, allora

$$Q_1 = A + x e^{i\varphi} \boldsymbol{a} \qquad \text{con} \qquad \varphi = \int \frac{dt}{m}$$

è l'immagine del punto generico Q, poichè dev'essere $dQ^2 = dQ_1^2$ e quindi $d\varphi^2 = dt^2/m^2$. Ne segue che per $x = k/\cos(\varphi - \theta)$, con k e θ costanti arbitrarie, Q descrive le *geodetiche* del cono, poichè esse si sviluppano nel piano secondo linee rette.

Per $x = a =$ cost. il punto Q descrive le *traiettorie ortogonali delle generatrici*, cioè un sistema delle linee di *curvatura*, che sono linee *sferiche*. Essendo in tal caso (²)

$$Q' = (a/m)\, \boldsymbol{v}\,, \qquad Q' \wedge Q'' = (a/m)^2\, \Omega\,,$$

si ha che la tangente in Q è parallela a $\boldsymbol{v}$ (come era evidente *a priori*) e il piano osculatore è normale ad Ω. Osservando ancora che

$$Q' \times Q'' \wedge Q''' = \frac{a^2}{m^2} \frac{1}{m^2 n^2} \begin{vmatrix} m & n \\ m' & n' \end{vmatrix},$$

si ottengono facilmente (³) le curvature in Q in funzione di a, m, n.

Per il solito vettore $\boldsymbol{N}$ normale alla sup. conica in Q si è trovato $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{w}$ e quindi si ha

$$\frac{d\boldsymbol{N}}{dQ} = -\frac{1}{x} \frac{m}{n} \mathrm{H}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})\,;$$

la *curvatura totale* è nulla, $\mathrm{I}_2 d\boldsymbol{N}/dQ = 0$, come deve avvenire perchè la superficie è *sviluppabile*; per la *curvatura media* si ha

$$\mathrm{I}_1 \frac{d\boldsymbol{N}}{dQ} = -\frac{1}{x} \frac{m}{n}\,,$$

che è anche la *curvatura normale* nella direzione della linea $x =$ cost. che passa per Q (⁴).

E si può continuare.

(²) Cfr. nota (¹) p. 106.

(³) Cfr. nota (¹) p. 113.

(⁴) C. Burali-Forti, *Fondamenti per la geometria differenziale su di una superficie* (“ Rend. Palermo „, T. XXXIII).

2. — Occupiamoci ora della risoluzione del problema generale che ci siamo proposti in principio.

Della linea che cerchiamo se ne considerino, nel punto generico P, i soliti elementi s, $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$, ρ, τ, $\boldsymbol{f}$.

Sia h un numero, non nullo, funzione arbitraria di t, ne sia ϵ il segno ($\epsilon = \pm 1$, $\epsilon^2 = 1$, $\epsilon h > 0$), e l'arco s della linea P sia legato a t dalla condizione, arbitraria,

$$ds = h dt. \tag{9}$$

Il vettore dato (n. 1) $\boldsymbol{u}$ funzione di t debba formare con $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$, rispettivamente, gli angoli di α, β, γ radianti, avendosi necessariamente

$$\left\{\begin{array}{l} \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \\ \alpha \gtreqless \pi/2, \quad \beta \gtreqless \pi/2, \quad \alpha + \beta \gtreqless \pi/2, \end{array}\right. \tag{10}$$

bastando assegnare α, β, sotto le poste condizioni, perchè siano determinati, in generale, due valori di γ.

Se il vettore $\boldsymbol{t}$ deve fare con $\boldsymbol{u}$ l'angolo di α radianti dovrà essere

$$\boldsymbol{t} = \cos\alpha\,\boldsymbol{u} + \operatorname{sen}\alpha\,(\cos\varphi\,\boldsymbol{v} + \operatorname{sen}\varphi\,\boldsymbol{w}) \tag{11}$$

con φ funzione tale di t che $\boldsymbol{n}$ formi con $\boldsymbol{u}$ l'angolo di β radianti. Se allora osserviamo che

$$\boldsymbol{t}' = \frac{d\boldsymbol{t}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{t}}{ds}\,\frac{ds}{dt} = \frac{h}{\rho}\,\boldsymbol{n}, \tag{11'}$$

affinchè $\boldsymbol{n}$ formi l'angolo β con $\boldsymbol{u}$ basterà che

$$\boldsymbol{t}' \times \boldsymbol{u} = \operatorname{mod}\boldsymbol{t}'.\cos\beta,$$

ovvero, poichè $(\boldsymbol{t}' \wedge \boldsymbol{u})^2 = \boldsymbol{t}'^2 - (\boldsymbol{t}' \times \boldsymbol{u})^2$, elevando a quadrato,

$$(\boldsymbol{t}' \wedge \boldsymbol{u})^2 \cos^2\beta = (\boldsymbol{t}' \times \boldsymbol{u})^2 \operatorname{sen}^2\beta. \tag{12}$$

Ma dalle formule del n. 1 si ha subito dalla (11)

$$
(a)\quad\left\{\begin{aligned}
&\boldsymbol{t}' = \Omega \wedge \boldsymbol{t} + \varphi' \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{t} = \left\{ \left(\varphi' - \frac{1}{n}\right) \boldsymbol{u} + \frac{1}{m} \boldsymbol{w} \right\} \wedge \boldsymbol{t}, \\
&\boldsymbol{t}' \times \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} \wedge \left\{ \left(\varphi' - \frac{1}{n}\right) \boldsymbol{u} + \frac{1}{m} \boldsymbol{w} \right\} \times \boldsymbol{t} = - \frac{\operatorname{sen}\alpha \cos\varphi}{m}, \\
&\boldsymbol{t}' \wedge \boldsymbol{u} = \left(\varphi' - \frac{1}{n}\right) \boldsymbol{t} - \cos\alpha \left\{ \left(\varphi' - \frac{1}{n}\right) \boldsymbol{u} + \frac{1}{m} \boldsymbol{w} \right\}, \\
&(\boldsymbol{t}' \wedge \boldsymbol{u})^2 = \left(\varphi' - \frac{1}{n}\right)^2 \operatorname{sen}^2\alpha - \\
&\qquad - \frac{2}{m} \left(\varphi' - \frac{1}{n}\right) \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha \operatorname{sen}\varphi + \frac{\cos^2\alpha}{m^2};
\end{aligned}\right.
$$

sostituendo nella (12) si ha, dopo un calcolo ovvio,

$$
(13)\qquad m\left(\varphi' - \frac{1}{n}\right) \operatorname{sen}\alpha \cos\beta = \cos\alpha \cos\beta \operatorname{sen}\varphi \pm \cos\gamma \cos\varphi
$$

equazione differenziale in φ che determina φ.

Ottenuto φ in funzione di t, integrando la (13), la (11) dà $\boldsymbol{t}$ in funzione di t e quindi la linea cercata è determinata, perchè per il suo punto generico P si ha

$$
P = O + \int h \boldsymbol{t} dt,
$$

una volta fissato h funzione di t.

Della linea P abbiamo già l'arco s dato dalla (9) e il vettore $\boldsymbol{t}$ dato dalla (11) con φ soluzione della (13). Vogliamo ora determinare gli elementi $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{f}$, ρ, τ, il che faremo nei due numeri seguenti, distinguendo il caso $\cos\beta \neq 0$ dal caso $\cos\beta = 0$.

3. — Supponiamo $\cos\beta \neq 0$, cioè $\beta \neq \pi/2$. Allora a causa delle (10) si ha pure $\operatorname{sen}\alpha \neq 0$, cioè $\alpha \neq 0$.

Se ricordiamo la (11′), risulta subito, essendo ϵ il segno di h, $\epsilon h/\rho = \operatorname{mod} \boldsymbol{t}'$; e poichè $\boldsymbol{t}' \times \boldsymbol{u} = \operatorname{mod} \boldsymbol{t}' \cos\beta$, per la seconda delle (a) si ha

$$
(14)\qquad \frac{h}{\rho} = - \frac{\operatorname{sen}\alpha}{m \cos\beta}\, \epsilon \cos\varphi,
$$

e la costante arbitraria che contiene φ per la (13), deve esser tale che $\epsilon h/\rho$ sia positivo.

Da $\boldsymbol{t}' = (h/\rho)\,\boldsymbol{n}$ si trae subito, per la prima (a),

$$\boldsymbol{n} = \frac{\rho}{h}\left\{\left(\varphi' - \frac{1}{n}\right)\boldsymbol{u} + \frac{1}{m}\boldsymbol{w}\right\}\wedge \boldsymbol{t},$$

e sostituendo a ρ/h il valore (14) e a $\boldsymbol{t}$ l'espressione (11) si ha, dopo alcune riduzioni,

$$\text{(15)}\quad \boldsymbol{n} = \frac{\epsilon}{\operatorname{sen}\alpha}\left\{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta\,\boldsymbol{u} - (\cos\alpha\cos\beta\cos\varphi \mp \cos\gamma\operatorname{sen}\varphi)\,\boldsymbol{v} - (\cos\alpha\cos\beta\operatorname{sen}\varphi \pm \cos\gamma\cos\varphi)\,\boldsymbol{w}\right\},$$

quando, si intende, si elimini φ' mediante la (13).

Dall'essere $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{t}\wedge\boldsymbol{n}$ e dalle (11), (15) si ha

$$\text{(16)}\quad \boldsymbol{b} = \frac{\mp\epsilon}{\operatorname{sen}\alpha}\left\{\operatorname{sen}\alpha\cos\gamma\,\boldsymbol{u} - (\cos\alpha\cos\gamma\cos\varphi \pm \cos\beta\operatorname{sen}\varphi)\,\boldsymbol{v} - (\cos\alpha\cos\gamma\operatorname{sen}\varphi \mp \cos\beta\cos\varphi)\,\boldsymbol{w}\right\}.$$

Derivando la (16) e moltiplicando ($\times$) poi per $\boldsymbol{n}$ si ha

$$\boldsymbol{b}' = \Omega\wedge\boldsymbol{b} \pm \frac{\epsilon\varphi'}{\operatorname{sen}\alpha}\left\{(-\cos\alpha\cos\gamma\operatorname{sen}\varphi \mp \cos\beta\cos\varphi)\,\boldsymbol{v} + (\cos\alpha\cos\gamma\cos\varphi \pm \cos\beta\operatorname{sen}\varphi)\,\boldsymbol{w}\right\},$$

$$\boldsymbol{b}'\times\boldsymbol{n} = -\Omega\times\boldsymbol{t} - \varphi'\cos\alpha = -\left(\varphi' - \frac{1}{n}\right)\cos\alpha - \frac{\operatorname{sen}\alpha}{m}\operatorname{sen}\varphi;$$

ma $\boldsymbol{b}' = (h/\tau)\,\boldsymbol{n}$ e quindi $h/\tau = \boldsymbol{b}'\times\boldsymbol{n}$, cioè

$$\text{(17)}\quad \frac{h}{\tau} = -\left(\varphi' - \frac{1}{n}\right)\cos\alpha - \frac{\operatorname{sen}\alpha}{m}\operatorname{sen}\varphi,$$

e si può eliminare la φ' mediante la (13).

Da $hf = (h/\rho)\,\boldsymbol{b} - (h/\tau)\,\boldsymbol{n}$ e dalle formule precedenti risulta hf espresso linearmente mediante $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$; non abbiamo fatta la sostituzione, ma pare si ottenga una espressione complicata. Sotto forma assai semplice, sebbene non esplicita, si ha

$$\text{(18)}\quad hf = \boldsymbol{n}\wedge\boldsymbol{n}',$$

poichè $f = \boldsymbol{n}\wedge(d\boldsymbol{n}/ds)$ e $\boldsymbol{n}' = h\,(d\boldsymbol{n}/ds)$.

4. — Quando $\cos\beta = 0$, cioè $\beta = \pi/2$, allora, dalla (10), $\alpha + \gamma = \pi/2$. In tale ipotesi la (13) dà $\cos\gamma \cos\varphi = 0$, cioè $\operatorname{sen}\alpha \cos\varphi = 0$; per $\operatorname{sen}\alpha = 0$ φ è arbitrario; per $\operatorname{sen}\alpha \neq 0$ deve essere $\cos\varphi = 0$. Si può dunque prendere sempre $\varphi = \pi/2$, cioè nel caso considerato si ha

$$\beta = \pi/2, \qquad \alpha + \gamma = \pi/2, \qquad \varphi = \pi/2.$$

Allora dalla (11) si ha

$$\boldsymbol{t} = \cos\alpha\, \boldsymbol{u} + \operatorname{sen}\alpha\, \boldsymbol{w}. \tag{19}$$

Derivando ed essendo η il segno di $(\cos\alpha)/m + (\operatorname{sen}\alpha)/n$,

$$\frac{h}{\rho}\, \boldsymbol{n} = \left(\frac{\cos\alpha}{m} + \frac{\operatorname{sen}\alpha}{n}\right) \boldsymbol{v}, \qquad \frac{\epsilon h}{\rho}\, \boldsymbol{n} = \eta \left(\frac{\cos\alpha}{m} + \frac{\operatorname{sen}\alpha}{n}\right) \epsilon\eta\, \boldsymbol{v}$$

e in conseguenza

$$\frac{h}{\rho} = \epsilon\eta \left(\frac{\cos\alpha}{m} + \frac{\operatorname{sen}\alpha}{n}\right), \tag{20}$$

$$\boldsymbol{n} = \epsilon\eta\, \boldsymbol{v}, \tag{21}$$

$$\boldsymbol{b} = \epsilon\eta\, (\cos\alpha\, \boldsymbol{w} - \operatorname{sen}\alpha\, \boldsymbol{u}). \tag{22}$$

Derivando la (22), $(h/\tau)\, \boldsymbol{n} = \boldsymbol{b}'$, si ha

$$\frac{h}{\tau} = \frac{\cos\alpha}{n} - \frac{\operatorname{sen}\alpha}{m}, \tag{23}$$

e sostituendo nella nota espressione di $h\boldsymbol{f}$,

$$h\boldsymbol{f} = \frac{1}{m}\, \boldsymbol{w} - \frac{1}{n}\, \boldsymbol{u} = \Omega. \tag{24}$$

Per $\alpha = 0$, ovvero $\alpha = \pi/2$, si ottengono le linee P, delle quali è assegnata, in ogni punto, la direzione della *tangente* o della *binormale*.

5. — Le linee P in ogni punto delle quali è assegnata la direzione della *normale principale*, si ottengono dal n. 3

per $\cos\beta = 1$ e quindi $\alpha = \gamma = \pi/2$ (5). La (13) dà in tal caso $m(\varphi' - 1/n) = 0$, vale a dire, essendo $m \neq 0$,

$$\varphi = \int \frac{dt}{n}, \tag{25}$$

e quindi le (11), (14)-(18) dànno, per il valore (25) di φ,

$$\left\{ \begin{aligned} &\boldsymbol{t} = \cos\varphi\,\boldsymbol{v} + \operatorname{sen}\varphi\,\boldsymbol{w}, \\ &\boldsymbol{n} = \epsilon\boldsymbol{u}, \\ &\boldsymbol{b} = \epsilon(\operatorname{sen}\varphi\,\boldsymbol{v} - \cos\varphi\,\boldsymbol{w}), \\ &hf = \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{u}' = \frac{1}{m}\boldsymbol{w}, \\ &\frac{h}{\rho} = -\frac{\epsilon}{m}\cos\varphi, \qquad \frac{h}{\tau} = -\frac{1}{m}\operatorname{sen}\varphi. \end{aligned} \right. \tag{26}$$

Per $1/n = 0$, cioè (cfr. (8)) $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u}' \wedge \boldsymbol{u}'' = 0$, e quindi $\boldsymbol{u}$ parallelo ad un piano fisso, la linea P è un'*elica* tracciata su di un cilindro le cui generatrici sono parallele al vettore $\boldsymbol{w}$, che è costante, poichè $\boldsymbol{w}' = (1/n)\,\boldsymbol{v} = 0$. In particolare per $\operatorname{sen}\varphi = 0$ (essendo φ costante nel caso considerato) la linea P è piana.

6. — La determinazione della linea P in ogni punto della quale è assegnata la direzione, f, della *rettificante*, ed è parallela ad $\boldsymbol{u}$, si riduce al caso precedente (6).

Il vettore (cfr. (7)) $f \wedge (df/ds)$ è parallelo ad $\boldsymbol{n}$; ma, per ipotesi, $f = k\boldsymbol{u}$ e quindi $f \wedge f' = k^2 \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{u}'$, vale a dire $\boldsymbol{n}$ è parallelo a $\boldsymbol{w}$. Si ha dunque

$$\boldsymbol{n} = \pm \boldsymbol{w}, \tag{27}$$

e si ricade appunto nel caso del n. 4 sostituendo $\boldsymbol{w}$ ad $\boldsymbol{u}$.

---

(5) Si hanno così sotto forma geometrica generale, e insieme a molte altre, le trasformazioni considerate da G. Sannia, *Trasformazioni di Combescure ed altre analoghe* (" Rend. Palermo ", T. XX, pp. 83-92). Si può anche vedere una Nota di M. Bottasso di prossima pubblicazione, nella quale sono generalizzate le trasformazioni di Combescure.

(6) Non appartiene al caso generale del n. 2, perchè f, salvo per l'Elica, non è collegata invariabilmente con $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$ (cfr. n. 7).

Ma partendo dalla (27) e facendo uso delle formule del n. 1 si può trattare direttamente la questione in modo semplicissimo. Si ha certamente

$$t = \cos\varphi\, \boldsymbol{u} + \operatorname{sen}\varphi\, \boldsymbol{v} \tag{28}$$

e quindi

$$\boldsymbol{b} = \pm \operatorname{sen}\varphi\, \boldsymbol{u} \mp \cos\varphi\, \boldsymbol{v} \tag{29}$$

essendo φ funzione ignota di t e tale che le derivate di $\boldsymbol{t}$ e $\boldsymbol{b}$ siano parallele ad $\boldsymbol{n}$. Derivando le (28), (29) si ha

$$(b) \quad \begin{cases} \dfrac{h}{\rho}\boldsymbol{n} = \Omega \wedge \boldsymbol{t} + \varphi'(-\operatorname{sen}\varphi\, \boldsymbol{u} + \cos\varphi\, \boldsymbol{v}), \\[2mm] \dfrac{h}{\tau}\boldsymbol{n} = \Omega \wedge \boldsymbol{b} \pm \varphi'(\cos\varphi\, \boldsymbol{u} + \operatorname{sen}\varphi\, \boldsymbol{v}), \end{cases}$$

e moltiplicando per $\boldsymbol{u}$

$$0 = \boldsymbol{u} \wedge \Omega \times \boldsymbol{t} - \varphi' \operatorname{sen}\varphi = -\left(\frac{1}{m} + \varphi'\right) \operatorname{sen}\varphi,$$

$$0 = \boldsymbol{u} \wedge \Omega \times \boldsymbol{b} \pm \varphi' \cos\varphi = \pm\left(\frac{1}{m} + \varphi'\right) \cos\varphi;$$

e quindi, dovendo essere entrambe verificate, si ha

$$\varphi = -\int \frac{dt}{m}. \tag{30}$$

Se moltiplichiamo ($\times$) le (b) per $\boldsymbol{n}$ si ha

$$\frac{h}{\rho} = \mp \frac{1}{n} \operatorname{sen}\varphi, \tag{31}$$

$$\frac{h}{\tau} = \frac{1}{n} \cos\varphi, \tag{32}$$

e per il vettore $\boldsymbol{f}$

$$h\boldsymbol{f} = -\frac{1}{n}\boldsymbol{u}. \tag{33}$$

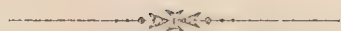
Si è implicitamente escluso il caso $\boldsymbol{u} = \text{cost}$. Per $\boldsymbol{u} = \text{cost.}$, la linea P è piana e situata in un piano normale ad $\boldsymbol{u}$.

7. — Quanto si è esposto nei nn. 2, 3 vale, invariato, anche nel caso che β sia una assegnata funzione di t, essendo sempre α costante.

Se si vuole che anche α sia una assegnata funzione di t, allora nel secondo membro della prima delle (a), n. 2, occorre aggiungere il termine

$$\alpha' \{ - \operatorname{sen} \alpha \boldsymbol{u} + \cos \alpha (\cos \varphi \boldsymbol{v} + \operatorname{sen} \varphi \boldsymbol{w}) \},$$

e le altre formule restano modificate in conseguenza, conducendo a risultati analoghi a quelli già ottenuti, ma più complessi. Il lettore può esaminare la questione.

Torino, febbraio 1918.

Le proprietà magnetiche degli acciai e la loro utilizzazione nel collaudo dei proietti.

Nota degli Ingegneri
GUSTAVO COLONNETTI ed ALBERTO POZZO.

(Con due Tavole).

Il favore con cui l'industria metallurgica ha accolta la nostra proposta — fatta or è poco più di un anno in una brevissima Nota comparsa nei " Rendiconti della R. Accademia dei Lincei „ (1) — di utilizzare le proprietà magnetiche degli acciai nelle operazioni di collaudo dei proietti, ha indotta una grande Casa costruttrice di strumenti elettrici, la " Compagnie pour la Fabrication des Compteurs „ (2), a mettere in commercio un apparecchio portatile coll'aiuto del quale le misure da noi prospettate potessero eseguirsi nel modo più semplice e rapido.

L'apparecchio, che la sullodata Casa ha costruito in varî tipi secondo i nostri brevetti (3), ha dato in pratica così soddisfacenti risultati da indurci a ritornare qui brevemente sull'argomento, nel duplice intento di precisare quegli elementi del metodo sui quali all'inizio dei nostri studî non avevamo ancora creduto di poterci pronunciare in modo definitivo, e di accennare ad una applicazione di esso che, a quell'epoca, noi stessi non avevamo ancora preveduta.

---

(1) G. Colonnetti e A. Pozzo, *Le proprietà magnetiche degli acciai e la loro utilizzazione nel collaudo dei proietti.* " Rendiconti della R. Accademia dei Lincei „, vol. XXV, serie 5ª, 1° semestre 1916.

(2) *Compagnie pour la fabrication des compteurs.* Ancienne Maison Michel & C. Paris, Boulevard de Vaugirard, 16 et 18.

(3) Data di deposito in Italia del brev. princ.: 16 giugno 1916; brev. compl.: 7 luglio 1916, 17 gennaio e 28 febbraio 1917.

***

Non intendiamo ripetere qui tutte le considerazioni che ci hanno guidati nelle nostre prime indagini, inducendoci a cercare nelle relazioni esistenti tra la permeabilità magnetica degli acciai e le loro caratteristiche meccaniche la possibilità di giungere ad una verifica indiretta di queste caratteristiche mediante semplici misure magnetiche.

Ci limiteremo soltanto a ricordare quanto occorre per precisare, a scanso di ogni equivoco, gli scopi dei nostri studî e le finalità del metodo da noi proposto.

Il problema si era a noi presentato nella forma seguente: arrivare in modo semplice, e sopratutto rapido, ad una valutazione anche soltanto approssimativa delle caratteristiche meccaniche dei bossoli d'acciaio per proietti, la quale, potendo eseguirsi su tutti i bossoli immediatamente dopo il loro trattamento termico, ed in ogni caso prima del loro passaggio ad una lavorazione ulteriore, e senza che questa ne restasse menomamente ritardata od intralciata, permettesse ad un tempo di sorvegliare l'andamento dei forni di tempra e di selezionare i bossoli in discorso rinviando a nuovo trattamento quelli che eventualmente non dessero affidamento di corrispondere alle prescrizioni di collaudo, cioè di possedere una resistenza alla rottura per trazione compresa entro dati limiti.

Ciò premesso, supponiamo di avere un lotto di proietti preparati tutti con un acciaio di dato tipo, cioè di composizione chimica determinata, ma trattati diversamente; ed esaminiamo un certo numero di questi proietti dal punto di vista magnetico: noi potremo facilmente raggrupparli in un certo numero di gruppi, ciascuno dei quali sia formato di proietti dal punto di vista magnetico sensibilmente identici.

Sottoponiamo un certo numero di proietti di ciascun gruppo ad una prova di resistenza alla trazione: si constaterà facilmente che tutti i proietti di un medesimo gruppo presentano presso a poco la medesima resistenza, e che quelli appartenenti a gruppi diversi presentano resistenze sensibilmente diverse, tanto più grandi quanto più la loro permeabilità magnetica era stata riconosciuta debole.

Questa corrispondenza è stata da noi sperimentalmente riscontrata in modo costante: abbiamo anzi avuto agio di convincerci che certe piccole variazioni nella composizione chimica, anche superiori a quelle che abitualmente si tollerano nelle analisi industriali e nel controllo dei materiali correntemente forniti dalle acciaierie, hanno un'influenza assai modesta, e non infirmano il valore pratico del nostro asserto.

Si prelevino ora due proietti rispettivamente da quelli dei gruppi che, nelle prove meccaniche, hanno presentata la massima e la minima resistenza ammissibili.

I proietti da accettarsi, dovendo avere tutti una resistenza compresa tra quelle che si attribuiscono a questi due proietti campione, dovranno anche presentare una permeabilità magnetica rispetto ad essi intermedia.

Ora per riconoscere se questa condizione è verificata, è ben evidente che non occorre conoscere il valore numerico della permeabilità: non occorre cioè eseguire una misura assoluta; basta una misura comparativa che si effettua in modo estremamente semplice se i pezzi in esame hanno tutti esattamente la medesima forma e le stesse dimensioni.

Siano infatti genericamente m ed n (fig. 1) due pezzi di acciaio, geometricamente identici, tra le cui proprietà magnetiche si voglia istituire un paragone: si collochino detti pezzi nell'interno di due bobine costituite ciascuna da due distinti avvolgimenti: un primario ed un secondario.

I due primarî fra loro identici P e P' sono collegati in serie con una forza elettromotrice E, un amperometro A ed un reostato R. Chiudendo il tasto T essi verranno pertanto percorsi da una corrente, di intensità regolabile a volontà, il cui senso può essere invertito facendo fare un mezzo giro all'invertitore I.

Ad ogni inversione si inverte il flusso magnetico nei pezzi di acciaio m ed n e si genera per conseguenza una forza elettromotrice nei due avvolgimenti secondarî S ed S'. Questi secondarî, pure identici fra loro, sono alla lor volta collegati in serie con un galvanometro balistico G. I collegamenti sono però fatti in modo che le due forze elettromotrici risultano sempre in opposizione.

Ne segue che, se i due pezzi di acciaio sono anche magne-

ticamente identici, riescono fra loro eguali i due campi magnetici generati dai due primarî, e per conseguenza anche le due forze elettromotrici che, ad ogni inversione, hanno origine nei due secondarî; esse pertanto si compensano mutuamente.

Ma se uno dei pezzi di acciaio, *m* per esempio, presenta una permeabilità magnetica maggiore di quella dell'altro, *n*,

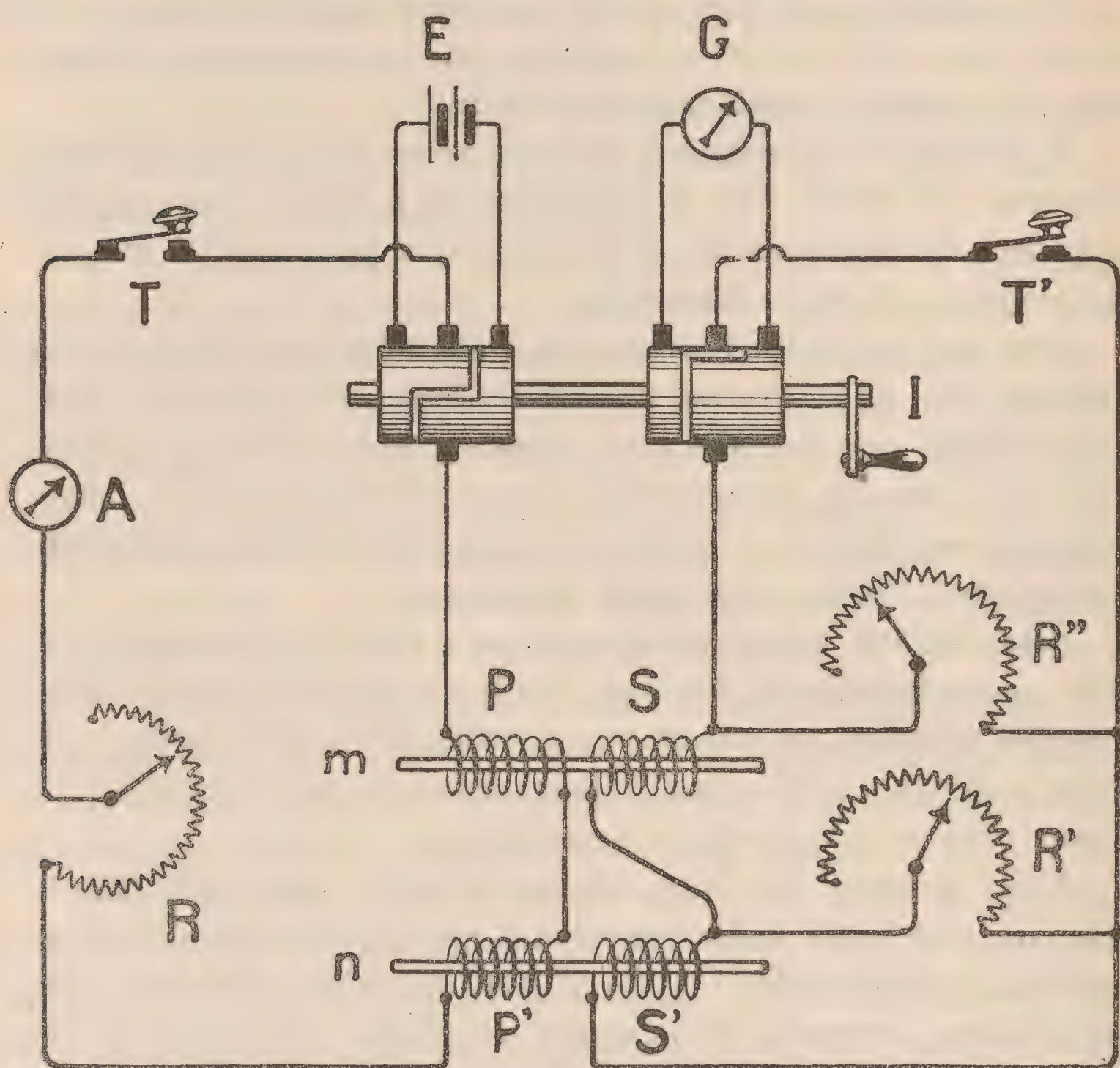



Fig. 1.

una delle accennate forze elettromotrici prevarrà sull'altra; a tasto T' chiuso, il circuito secondario verrà percorso da una certa quantità di elettricità, ed il galvanometro balistico riceverà una certa impulsione.

E siccome l'invertitore I di cui si è già parlato, oltre all'invertire la corrente nei due avvolgimenti primarî, provvede anche ad invertire le connessioni del galvanometro nel circuito

secondario, le elongazioni si produrranno sempre nel medesimo senso, tanto quando la corrente magnetizzante passa da un certo valore i al valore $-i$ come quando essa ripassa da $-i$ ad i.

Elongazioni in senso contrario si avrebbero invece se il pezzo d'acciaio m avesse una permeabilità magnetica minore di quella propria del pezzo n.

Volendo rendere i risultati della misura indipendenti dalle possibili differenze delle due bobine, conviene tenere fermo uno dei pezzi d'acciaio, servendosene a guisa di semplice tara, ed introdurre i pezzi da paragonarsi successivamente al posto dell'altro.

Se uno di questi pezzi lo si vuol assumere come campione, e si vogliono ad esso riferire tutti gli altri, converrà ridurre per esso a zero l'elongazione del galvanometro; ciò può facilmente ottenersi manovrando opportunamente la resistenza R' che funziona da *shunt* per l'avvolgimento S'.

Abbiamo già detto che, nel caso dei proietti, lo scopo della misura è di constatare se la loro permeabilità magnetica è o non è compresa tra dati limiti; conviene allora manovrare la resistenza R' in modo che pei due campioni limiti le elongazioni risultino eguali e di segno contrario. L'ampiezza di queste elongazioni si può poi regolare a volontà mediante un'altra resistenza R'' la quale *shunta* ad un tempo entrambi i secondarî; si può così far in modo che una data regione centrale della scala funzioni da zona di accettazione. I proietti che dànno luogo ad elongazioni oltrepassanti da una parte ovvero dall'altra i limiti di questa zona saranno allora da considerarsi come troppo duri ovvero come troppo dolci; gli uni dovranno venire ricotti, gli altri dovranno invece essere rinviati alla tempra.

L'apparecchio quale trovasi in commercio ad uso delle fabbriche di proietti è rappresentato nella tav. I; due cassette di legno lo racchiudono intiero. In una di esse trovansi i tasti, l'invertitore, le resistenze di regolazione, nonchè gli avvolgimenti di quella delle bobine nell'interno della quale deve collocarsi il proietto destinato a servire di tara. Un'apposita camera, praticata in un fianco della stessa cassetta, serve ad ospitare, per comodità di trasporto, la bobina destinata a ricevere i proietti da collaudare; al momento dell'uso questa bobina

verrà naturalmente estratta dalla sua sede, e resterà collegata alla cassetta mediante una lunga treccia a quattro fili.

L'altra cassetta serve invece di custodia, durante il trasporto, e, al momento dell'uso, di sopporto al galvanometro balistico. L'equipaggio mobile di questo è dotato di indice e di specchio; col primo si possono eseguire letture dirette se le elongazioni sono di grande ampiezza; quando invece le elongazioni sono piccole si apprezzano su di una scala trasparente, che si può montare sulla cassetta principale, e sulla quale lo specchio mobile riflette l'immagine del filamento incandescente di una piccola lampadina elettrica tenuta accesa dalla stessa batteria di accumulatori (non visibile in figura) che alimenta il circuito primario.

***

Due cause d'errore si sono a noi rivelate all'atto pratico non sempre trascurabili: esse traggono origine l'una dalla variabilità della composizione chimica degli acciai, l'altra dalla incostanza di dimensioni dei proietti.

Questa incostanza di dimensioni può essere più o meno sensibile a seconda del modo con cui viene eseguita la sgrossatura; i proietti vengono infatti sottoposti al trattamento ed al relativo collaudo quando sono ancora semplicemente sgrossati. In condizioni normali i bossoli sgrossati dovrebbero presentare, rispetto a ciò che dovranno essere a lavorazione ultimata, un semplice soprametallo di spessore costante; ma l'urgenza ha in questi anni indotti molti industriali ad affidare la sgrossatura a quelle officine che per la loro attrezzatura imperfetta non davano affidamento di poter eseguire a dovere i lavori di finitura. Si dovettero per conseguenza ammettere per la sgrossatura delle tolleranze eccezionali.

Se pertanto in un primo periodo dei nostri studî noi abbiamo potuto considerare come costante la forma dei proietti da collaudarsi, a questa ipotesi semplificativa abbiamo poi dovuto rinunciare. Ci siamo chiesti allora in qual modo gli errori ad essa imputabili potevano venir eliminati o almeno ridotti a più modeste proporzioni.

Fortunatamente non tutte le dimensioni dei proietti sgros-

sati riescono egualmente incerte: accade infatti nella lavorazione corrente che una discreta costanza si raggiunga facilmente anche senza l'impiego di cure speciali nella misura del diametro del corpo cilindrico; le più sensibili differenze si riscontrano invece quasi sempre alle due estremità del bossolo, in corrispondenza cioè dell'ogiva e del fondello.

Questa specie di localizzazione delle differenze di forma tra proietto e proietto ci ha permesso di risolvere il problema in un modo assai semplice, senza che l'uso pratico del nostro apparecchio venisse in alcun modo ad esserne complicato.

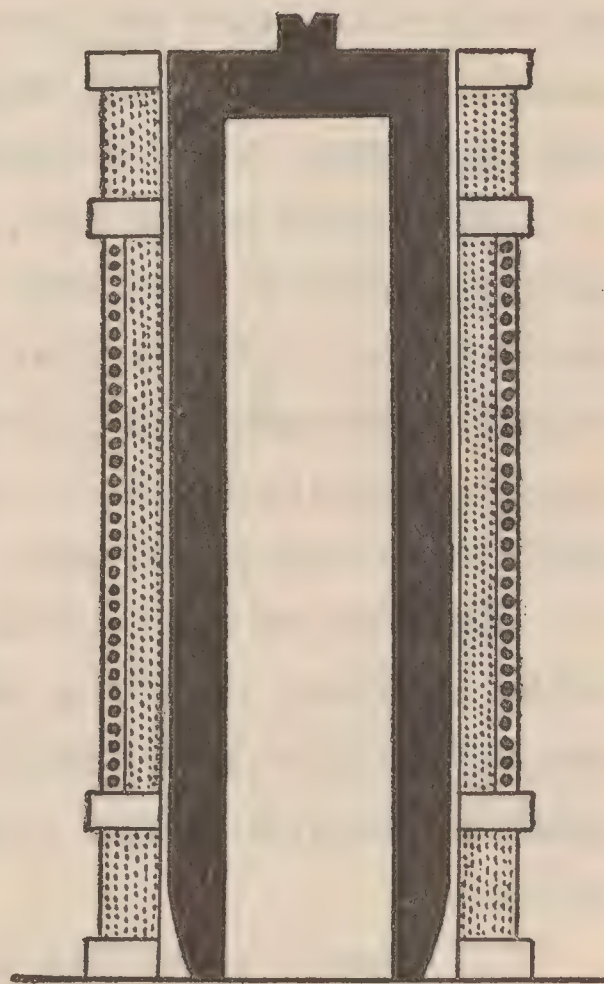
Noi costruiamo oggi le nostre bobine di prova divise in tre sezioni (fig. 2); la centrale, corrispondente alla sola parte cilindrica del bossolo, contiene i soliti due circuiti, primario e secondario, fra loro sovrapposti; nelle due sezioni laterali, che abbracciano il bossolo rispettivamente in corrispondenza dell'ogiva e del fondello, si prolunga invece il solo secondario, ed il senso dell'avvolgimento è in esse l'opposto di quello adottato per la sezione centrale.

Fig. 2.

Avviene così che la forza elettromotrice disponibile ai morsetti della detta bobina riesce eguale alla differenza fra quella indotta nella porzione di secondario occupante la sezione centrale, e quella indotta nelle due porzioni laterali.

Ora quest'ultima forza elettromotrice è, per ragione di posizione, più energicamente influenzata dalle predette differenze di forma. Si può quindi, con un numero relativamente piccolo di spire nelle sezioni laterali, compensare in un certo senso l'effetto che quelle stesse differenze di forma producono sulle spire assai più numerose della sezione centrale.

Si tratta naturalmente di una compensazione tutt'affatto empirica: ma ciò non impedisce che i risultati che se ne ottengono siano in pratica ottimi. Si arriva infatti con questo sem-

plice artificio a rendere praticamente insensibili delle variazioni di profilo dell'ogiva o di spessore del fondello assai maggiori di quelle che si riscontrano nelle sgrossature anche le più trascurate.

***

Più grave si presentò il problema quando si trattò di rendere le indicazioni dell'apparecchio indipendenti da variazioni non di rado cospicue della composizione chimica, allo scopo di poterlo utilizzare per tutte quelle svariatissime qualità di acciai che le imprescindibili necessità del momento ci hanno costretti ad impiegare nella fabbricazione dei proietti.

È infatti ovvio che, al mutare della composizione chimica, la permeabilità magnetica degli acciai può mutare indipendentemente da ogni ragione di trattamento. Ci è quindi parso inevitabile procedere ad una preliminare selezione degli acciai stessi, classificandoli in un certo numero di categorie a seconda della loro composizione.

Questa selezione si era d'altronde venuta imponendo anche sotto il punto di vista della buona esecuzione del trattamento, che, effettuato alla cieca sui materiali più disparati, dava da qualche tempo luogo a percentuali di scarto eccessivamente elevate.

A questa selezione avanti tempra provvede del resto nel miglior modo l'apparecchio stesso che, dopo tempra, dovrà servire al collaudo. Eseguendo infatti una lunga serie di esperienze su pezzi di acciai diversi, presi per esempio allo stato ricotto, noi abbiamo potuto constatare che potevano trarsi, relativamente alle variazioni di composizione chimica a pari trattamento, delle conclusioni affatto analoghe a quelle che abbiamo già esposte relativamente alle influenze dei diversi trattamenti su acciai di composizione chimica fissa.

Supponiamo, per fissar le idee, di avere una serie di campioni, al solito geometricamente identici, di acciai differenti, ma tutti uniformemente ricotti, e sottoponiamoli alla consueta misura magnetica comparativa: noi potremo immediatamente classificarli in un certo numero di categorie, ciascuna delle

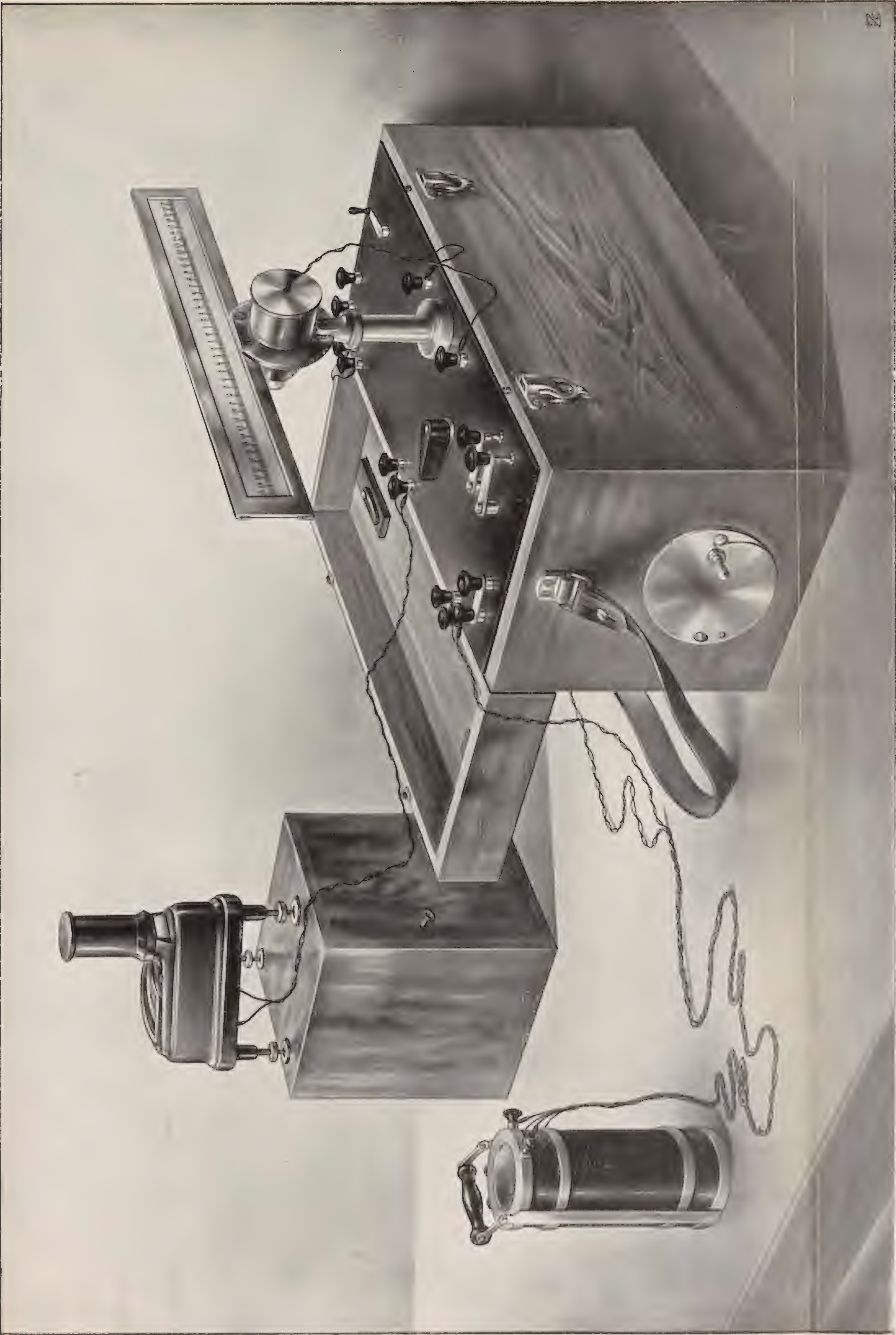
quali sia formata di materiali, dal punto di vista magnetico, sensibilmente identici.

Preleviamo da ciascuna categoria un certo numero di campioni e sottoponiamoli ad una prova di resistenza alla trazione o addirittura all'analisi chimica: si constaterà subito che la suddivisione in categorie ha ravvicinati i materiali più simili, e separati quelli che, anche dal punto di vista meccanico o chimico, più si differenziano tra loro: sicchè per ciascuna categoria si potrà effettuare il trattamento ed eseguire poi il collaudo come se si trattasse di materiali omogenei.

Questa selezione preliminare che alcune officine avevano da principio istituita sui bossoli sgrossati da trattare, venne in questi ultimi tempi con maggior vantaggio applicata addirittura alle barre ed alle billette greggie di laminazione, specialmente a quelle che ci giungono dall'estero, presentanti promiscuamente tutte le possibili gradazioni di durezza iniziale, e che quindi vanno necessariamente classificate se si vuole essere certi di distribuire alle singole industrie dei materiali adatti alle loro rispettive lavorazioni.

La fotografia che riproduciamo nella tav. II dà un'idea assai chiara del modo estremamente semplice e rapido con cui procede questo lavoro di selezione nel parco di scarico degli acciai della Commissione di Collaudo d'Artiglieria di Torino, la quale ha per la prima adottato su vasta scala ed in forma ufficiale il nostro sistema.

L'Accademico Segretario
CARLO FABRIZIO PARONA

TAV. II.

Selezione delle barre da 80 mm. nel parco di scarico degli acciai della Commissione di Collaudo d'Artiglieria di Torino.

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona. Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di **C. Frati, A. Baudi di Vesme** e **C. Cipolla.**

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in-f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di **C. Cipolla, G. De Sanctis** e **P. Fedele.**

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in-4°, di 70 pagg. e 96 tav.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza del 27 Gennaio 1918 . *Pag.* 205

Classi Unite.

Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza del 3 Febbraio 1918 . *Pag.* 207

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza del 10 Febbraio 1918 . *Pag.* 209
Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza del 24 Febbraio 1918 . „ 210
Burali-Forti (C.). — Linea in ogni cui punto è assegnata una direzione invariabilmente collegata al triedro principale . „ 213
Colonnetti (Gustavo) e Pozzo (Alberto). — Le proprietà magnetiche degli acciai e la loro utilizzazione nel collaudo dei proietti (con due Tavole) . . . . „ 225

Tip. Vincenzo Bona – Torino

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. LIII, Disp. 9ª, 1917-1918.

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 3.
1918

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 10 Marzo 1918

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE ENRICO D'OVIDIO
DIRETTORE DELLA CLASSE

Sono presenti i Soci SALVADORI, NACCARI, SEGRE, PEANO, JADANZA, FOÀ, GUARESCHI, GUIDI, MATTIROLO, GRASSI, SOMIGLIANA e PARONA Segretario.

Scusa l'assenza il Socio PANETTI indisposto, ed il Socio FOÀ scusa le assenze alle adunanze precedenti causate da doveri di ufficio.

Si legge e si approva l'atto verbale della precedente adunanza.

Il Presidente con parole di rimpianto e di elogio comunica la morte del Socio corrispondente Senatore Pietro BLASERNA e dice che l'Accademia fu rappresentata ai funerali dell'illustre estinto dal Socio nazionale VOLTERRA. Comunica poi dello stesso Socio VOLTERRA una lettera di ringraziamento alle congratulazioni espressegli dalla Classe per la sua nomina a Socio straniero dell'Istituto di Francia.

Il Socio SOMIGLIANA presenta in omaggio una copia del primo volume delle opere di Alessandro Volta, riferendosi alla comunicazione fatta nell'adunanza del 18 novembre u. s.

Il Socio Salvadori offre in omaggio, da parte della Direzione del Museo Civico di Storia Naturale in Genova, il vol. VII (serie 3ª) degli Annali del Museo stesso.

Il Presidente comunica l'omaggio fatto dal Socio corrispondente M. A. Lacroix del suo volumetto *Les gisements de l'Or dans les Colonies françaises*, ed ai donatori esprime i vivi ringraziamenti della Classe.

Presentano per la pubblicazione negli *Atti*:

Il Socio Guareschi la sua Nota (I): *I leucoderivati solfitici del triaminotrifenilmetano quali reattivi dell'alcalinità e della dissociazione dei sali.*

Il Socio Peano due Note: una della Drª Rosetta Frisone, *Le varie definizioni di prodotto*; l'altra di M. le capitaine Lagneau, *Logique des propositions.*

Il Socio Parona la Nota del Prof. F. Zambonini, *Leucite pseudomorfa di nefelite di Parco Chigi, presso Ariccia, nei Monti Albani.*

Raccoltasi infine la Classe in seduta privata procedette alla nomina di tre Soci nazionali residenti, e riuscirono eletti i Professori Giacomo Ponzio, Federico Sacco e Quirino Majorana. Salvo l'approvazione Sovrana.

LETTURE

I leucoderivati solfitici del triaminotrifenilmetano quali reattivi dell'alcalinità e della dissociazione dei sali

Comunicazione I del Socio I. GUARESCHI

In seguito ad alcune mie ricerche intorno alla natura dei composti solfitici che si formano per l'azione dell'acido solforoso o dei bisolfiti alcalini in presenza di acido cloridrico, sulle basi, e derivati alchilici, del trifenilmetano, fui condotto ad esaminare come si comportino questi coloranti, *decolorati*, in presenza degli alcali, dei bicarbonati alcalini e dei sali ad acidi deboli, più o meno facilmente dissociabili.

Già nel 1912 [1] io ho dimostrato che la fucsina decolorata coll'acido solforoso o reattivo di Schiff era anche un eccellente reattivo per riconoscere il bromo libero non solamente in soluzione acida, ma specialmente quando è allo stato di vapore e fatto passare insieme all'aria sopra una cartina imbevuta del reattivo; si manifesta una bella colorazione azzurro-violetta. Ed in seguito feci notare che questo reattivo poteva servire anche a caratterizzare la presenza dei bromati e degli ipobromiti.

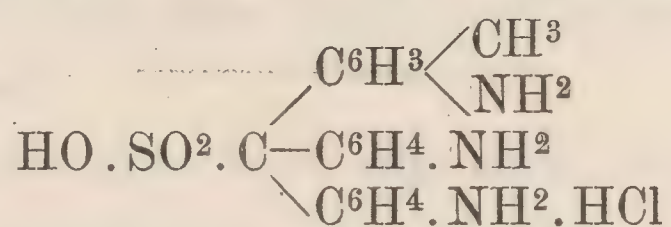
Allora feci pure notare che altre materie coloranti del gruppo del trifenilmetano, convenientemente ridotte, quali la *fucsina* S, il *violetto d'Hofmann* (il vecchio violetto o primitivo), il *metilvioletto* β *extra*, il *metilvioletto rossastro*, il *cristalvioletto* o *violetto cristallizzato* o *cloridrato di esametil p.triaminotrifenilme-*

[1] I. GUARESCHI, *Nuova reazione del bromo sensibilissima anche in presenza degli altri alogeni.* " Atti R. Accad. delle Sc. di Torino ", 1912, t. 47.

tano, potevano essere pure buoni reattivi del bromo ed anche degli ipobromiti [1].

In seguito, ho fatto alcune ricerche le quali dimostrano che questi reattivi valgono anche per la ricerca della alcalinità, specialmente per le acque potabili. Si possono fare delle istruttive esperienze di lezione.

Non si conosce ancora la composizione dei composti incolori che si ottengono per l'azione dell'acido solforoso o dei bisolfiti sui colori del trifenilmetano. Può ammettersi che il composto incoloro che si ottiene colla fucsina sia il cosidetto *acido fucsinsolforoso* [2]:

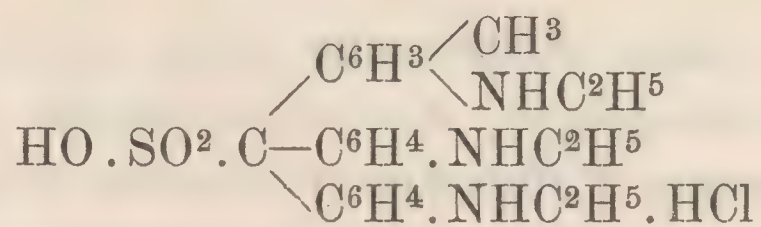
$$HO.SO^2.C \begin{cases} C^6H^3 \begin{cases} CH^3 \\ NH^2 \end{cases} \\ C^6H^4.NH^2 \\ C^6H^4.NH^2.HCl \end{cases}$$

e per analogia il leucoderivato solfitico del violetto d'Hofmann avrebbe una formula simile. Queste formole però sono da me ammesse con molta riserva.

L'intensità della colorazione coll'alcalinità delle acque è maggiore quando la molecola del leucoderivato contiene C^2H^5 invece di CH^3, e specialmente quando C^2H^5 vi si trova come $—NHC^2H^5$.

Con questi reattivi non vi è bisogno di concentrare l'acqua per evaporazione, perchè il segno dell'alcalinità si ha direttamente agendo sull'acqua, data la grande sensibilità.

1. — Violetto d'Hofmann o cloridrato di trietilrosanilina.

Il *violetto di trietilrosanilina* o *cloridrato di trietiltriaminotrifenilmetano* decolorato col gas solforoso sarebbe:

$$HO.SO^2.C \begin{cases} C^6H^3 \begin{cases} CH^3 \\ NHC^2H^5 \end{cases} \\ C^6H^4.NHC^2H^5 \\ C^6H^4.NHC^2H^5.HCl \end{cases}$$

(1) I. Guareschi, *Sulla diffusione del bromo in natura e sua ricerca anche nelle materie organiche.* Nota II. “Atti R. Accad. Sc. Torino„, 1912, t. 47; *Altre osservazioni sulle mie nuove reazioni caratteristiche e sensibilissime del bromo.* Nota III. “Atti R. Accad. Sc. Torino„, 1912, t. 48.

(2) A. Hantzsch e G. Ostwald. “Ber.„, 1900, t. 33, p. 289.

e costituisce un eccellente reattivo per gli alcali, i carbonati alcalini, i bicarbonati alcalino-terrosi e quindi anche per le acque potabili che hanno lievissima reazione alcalina. Però il violetto deve essere decolorato ossia trasformato nel suo leucoderivato per riduzione coi bisolfiti o col gas solforoso, come già dissi nella mia seconda nota sulla ricerca del bromo (1). Preparo il reattivo nel modo seguente: 1 gr. di violetto Hofmann si scioglie in 100 cm³ di acqua distillata, poi si aggiungono 6 gr. di bisolfito sodico e 10-11 cm³ di acido cloridrico a 1,19. Dibattendo la soluzione, a poco a poco diventa quasi incolora. È bene che il reattivo non contenga un eccesso di gas solforoso; quello preparato da un certo tempo reagisce meglio.

Se si versa una o due goccie di reattivo in 100 o 150 cm³ di acqua distillata, entro cilindro, e si mescola bene, non si ha nessuna colorazione, nemmeno dopo un'ora. Se invece si versa una o due goccie del reattivo nell'acqua potabile (ad esempio quella di Torino; in acqua del Po, o in acque di pozzi, ecc.), si ha *istantaneamente* colorazione violetta intensa.

Con soluzione diluitissima di carbonato o di idrato sodico si ha la stessa colorazione. Anche colla soluzione diluita di idrato di calcio si produce intensa ed istantanea colorazione violetta. Meglio usare vetri buoni poco o niente alcalini.

Una goccia di reattivo versata e dibattuta in 120 cm³ di soluzione molto diluita di bicarbonato calcare (contenente circa gr. 0,0013 di CaO) produce istantaneamente una intensa colorazione violetta.

Nella mia nota del 1912 ho fatto osservare che questo reattivo si colora in azzurro col bromo; così è pure cogli ipobromiti e cogli ipocloriti, perchè hanno reazione alcalina. Una goccia di reattivo in 150 cm³ di acqua contenente delle traccie minime di ipoclorito di calcio o di sodio produce istantaneamente una magnifica colorazione azzurro-violetta, come si ha col bromo, ma più rapida. Non si può però confondere la reazione con quella del bromo, perchè in questo caso si opera

(1) *Sulla diffusione del bromo in natura e sua ricerca anche nelle materie organiche.* Nota II. "Atti R. Acc. Sc. Torino", 1912, t. 47; "Zeit. f. analyt. Chem.", 1913, t. 52, p. 545.

sempre in soluzione acida (per acido cromico, acido solforico, ecc.) o sul vapore che se ne elimina.

Il reattivo funziona benissimo anche quando è da lungo tempo preparato. Il colore aderisce molto al vetro.

Quando l'alcalinità è debolissima: 1 : 100.000 o 1 : 200.000, allora basta una gocciolina piccola di reattivo; un eccesso di reattivo versato subito, danneggia la reazione.

Con 1 mgr. di NaOH in 200 cm³ di acqua distillata, cioè 1 : 200.000, si ha ancora una netta colorazione violetta, se si aggiunge solo una piccola quantità di reattivo.

Questa sensibilità è superiore a quella che si avrebbe adoperando il tornasole od altro indicatore.

Con questo reattivo si dimostra facilmente la reazione alcalina dei fosfati bimetallici, dei borati, dei sali di piombo (acetato neutro e basico), dell'acetato di sodio, ecc. Basta sciogliere un poco del sale entro un cilindro, diluire, se si vuole, sino a 100 cm³ e versarvi una goccia di reattivo. Dopo pochi istanti si ha colorazione azzurro-violacea. Anche colle soluzioni di *solfato basico di chinina* si ha colorazione intensa, ed ancor più colle soluzioni diluite di *anilina.*

Invece con sali veramente neutri, quali il cloruro di sodio, non si ha colorazione alcuna, anche dopo mezz'ora, lievissima colorazione dopo molto tempo, nel qual caso si ha anche coll'acqua distillata.

Agitando con acqua il *fosfato tricalcico* ed aggiungendovi una goccia del reattivo, dopo pochi minuti si osserva intensa colorazione azzurro-violacea; si dimostra la reazione alcalina anche col *fosfato bicalcico,* ma molto meno intensa; nessuna reazione, o lievissima col tempo, col *fosfato monocalcico.*

Il fosfato di magnesio ed il fosfato ammonico-magnesico dimostrano pure reazione alcalina col mio reattivo.

È noto che il carbonato di calcio, anche purissimo, reagisce lievemente alcalino al tornasole ed alla fenolftaleina. Ma reagisce molto più intensamente alcalino col mio reattivo.

---

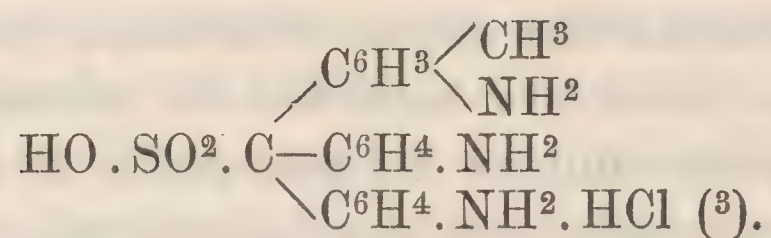
(1) In tal modo si può fare anche una esperienza di scuola. In tre tubi da saggio si mette circa 1 gr. dei tre fosfati e 10 cm³ di acqua, poi in ognuno una goccia di reattivo e si agita. Si avrà intensa reazione col fosfato tricalcico, minore col bicalcico e nulla col monocalcico.

Ho saggiato questo reattivo, ed altri derivanti dal trifenilmetano, con numerose sostanze minerali e con sostanze organiche azotate e riferirò in una seconda nota.

Come esporrò in una seconda comunicazione, con questo reattivo si può dimostrare la decomposizione idrolitica di diversi composti minerali ed organici.

Può essere utilizzato per reazioni microchimiche degli albuminoidi, di taluni aminoacidi, ecc. ([1]). In pochi istanti si può dimostrare la differenza fra l'amido di frumento e l'amido di riso; quest'ultimo contiene sempre più o meno di materie albuminoidi e ne dà netta la reazione col mio reattivo, mentre invece l'amido di frumento che non contiene albuminoidi non dà la reazione.

2. — Fucsina decolorata col gas solforoso o coi bisolfiti ([2]).

$$HO.SO^2.C \begin{cases} C^6H^3 \begin{cases} CH^3 \\ NH^2 \end{cases} \\ C^6H^4.NH^2 \\ C^6H^4.NH^2.HCl \end{cases}$$ ([3]).

Se in 100 o 150 cm^3 di acqua potabile (acqua potabile di Torino, acqua del Po, acqua di pozzo, ecc.) si versa, e poi si agita, una goccia del reattivo fucsinico, si manifesta subito una bella colorazione rosa. Nelle stesse condizioni coll'acqua distillata si ha pure la reazione, ma dopo 5-10 minuti. La reazione si ha egualmente con acque contenenti gli ipobromiti od ipocloriti alcalini, o l'ipoclorito di calcio. Si ottiene pure con traccie di acqua di calce, perchè questi sali hanno reazione alcalina. Se si versano una o due goccie di reattivo in 100 cm^3 di soluzione diluitissima di bicarbonato di calcio $CaH^2(CO^3)^2$, a poco a poco si manifesta la colorazione rosea.

([1]) Si vegga la mia Memoria letta alla R. Accademia di Agricoltura: *Di alcuni errori sulla localizzazione dei composti chimici nei semi di frumento e di riso e sul cosidetto aleurone.* " Annali della R. Accad. di Agric. di Torino ", 1918.

([2]) Il reattivo si prepara come già dissi nel 1912.

([3]) Io ammetto questa formola, come le altre, con riserva.

Il mio reattivo pel bromo e per gli ipobromiti e pei bromati vale dunque anche per gli ipocloriti. Ma nel caso degli ipocloriti la reazione è dovuta all'alcalinità, mentre la ricerca del bromo si fa in soluzione acida o sul vapore. Il reattivo non vale dunque a scoprire gli ipocloriti nelle acque potabili.

Che questo colore di anilina decolorato col gas solforoso ritornasse al suo colore naturale per l'azione degli alcali era noto; e lo ricorda anche Grey quando vuol riconoscere col reattivo di Schiff la formazione di aldeide per fermentazione anaerobica del glucosio col *bacillus coli communis* (1).

3. — Cloridrato di pararosanilina decolorato coi bisolfiti.

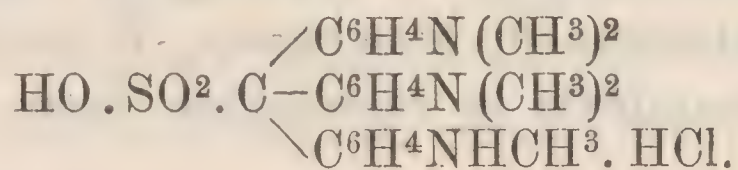
Si prepara il reattivo come il precedente.

Se si versa 1-2 goccie di reattivo in 150 cm³ di acqua potabile, si osserva istantaneamente una bella colorazione rosa; nelle stesse condizioni con acqua distillata si ha una lievissima colorazione rosea solamente dopo 5 a 10 minuti.

Bastano traccie minime di ipobromito di sodio o di ipoclorito di calcio per produrre una intensa colorazione violetta. Ma in questi casi certamente la reazione è dovuta alla maggiore alcalinità dovuta agli ipocloriti.

Se ad una soluzione diluitissima di bicarbonato di calcio si aggiunge qualche goccia del reattivo, si manifesta quasi subito una colorazione rosea; ma molto meno rapida e intensa che non col violetto d'Hofmann decolorato.

4. — Metilvioletto β o cloridrato di pentametil-p-rosanilina (metilvioletto rossastro) decolorato.

$$HO.SO^2.C\begin{cases}C^6H^4N(CH^3)^2\\C^6H^4N(CH^3)^2\\C^6H^4NHCH^3.HCl.\end{cases}$$

Questo colorante è un eccellente reattivo per riconoscere l'alcalinità di un liquido e quindi anche per le acque potabili.

---

(1) E. Ch. Grey, *The production of acetaldehyde during the anerobic fermentation of glucose by " bacillus coli communis "*, in " Biochem. Journal ", 1913, t. VII, p. 360.

Bisogna prima ridurre il colorante in leucoderivato. Io adopro la soluzione seguente:

Metilvioletto β extra	0,5 gr.
Acqua distillata	1000 „
Bisolfito di sodio	6 „
Acido cloridrico a 1,19 . .	5,5 „

Questa soluzione incolora o quasi si conserva bene. Dopo quasi due anni, la soluzione che ho ancora, è giallognola, ma dà benissimo le reazioni.

Questo violetto, detto anche violetto d'Hofmann, benchè non sia il vero e primitivo violetto d'Hofmann, che sarebbe un trietilderivato della rosanilina, decolorato col bisolfito, è, come dicevo, un eccellente reattivo per gli alcali. Una soluzione di NaOH in acqua al 1 : 100.000 si colora in bel violetto con una o due goccie di reattivo e dà netta la reazione ancora a 1 : 200.000 ed anche più diluita.

Coll'acqua distillata non produce colorazione o lievissima, ma coll'acqua potabile dà la bella colorazione violetto-rosea. Con una goccia di reattivo in 100 a 150 cm^3 si ha istantaneamente colorazione violacea intensa coll'acqua potabile e solamente dopo alcuni minuti una lievissima colorazione coll'acqua distillata.

Manifesta bene la colorazione violetta colle soluzioni diluite dei fosfati bisodico e trisodico; come pure coll'acqua di calce, ma meno intensamente che non la colorazione prodotta dal vecchio violetto d'Hofmann.

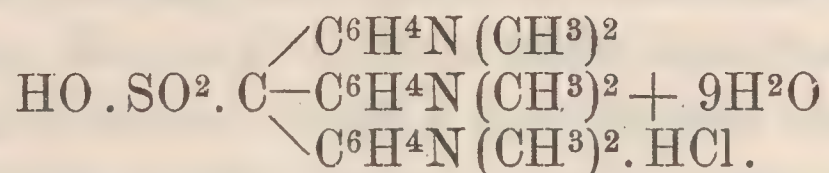
Se a 100-150 cm^3 di una soluzione molto diluita di *bicarbonato di calcio* si versa una goccia del reattivo, si ha una colorazione azzurra come gli alcali, ma meno pronta e meno intensa di quella che dà il violetto d'Hofmann.

Una cartina imbevuta del reattivo e posta nel vapore di bromo o di cloro nulla dà di veramente caratteristico.

Se si versa il reattivo in acqua distillata contenente piccola quantità di ipoclorito di sodio o di ipoclorito di calcio, si manifesta colorazione azzurra. Se l'acqua contiene traccie di *cloro libero*, come nell'*acqua di cloro*, il liquido si colora pure in azzurro.

5. — Violetto cristallizzato (krystallviolet)

o *cloridrato di esametil-p.rosanilina* $C^{25}H^{30}N^3Cl$, ossia:

$$HO.SO^2.C\begin{cases} C^6H^4N(CH^3)^2 \\ C^6H^4N(CH^3)^2 + 9H^2O \\ C^6H^4N(CH^3)^2.HCl. \end{cases}$$

Questa materia colorante si presta pure bene alla ricerca degli alcali.

Il reattivo si prepara in modo affatto simile ai precedenti (¹):

Violetto cristallizzato . . .	0,5	gr.
Acqua distillata	500	cm³
Bisolfito di sodio	5	gr.
Acido cloridrico a 1,19 . .	5	cm³

Se in 100 a 150 cm³ di acqua potabile si versa una goccia del reattivo, istantaneamente si ha colorazione violetta intensa. Coll'acqua distillata nelle stesse condizioni non si ha nulla; lievissima colorazione dopo mezz'ora.

Se l'acqua distillata contiene traccie di ipoclorito o di acqua di cloro, si ha colorazione azzurra.

Se l'acqua distillata contiene traccie di bromo libero, si ha pure una pronta colorazione azzurra. Si comporta pressochè come l'antico violetto d'Hofmann.

Una cartina imbevuta del reattivo si colora in azzurro chiaro quando è immersa nel vapore di bromo, ma ha nulla di caratteristico e non può servire come reattivo del bromo.

Invece può servire a svelare delle piccolissime quantità di ipocloriti nelle acque; ma serve meglio il violetto d'Hofmann trietilico: la colorazione data dal violetto d'Hofmann è più bella e più intensa.

Così pure si comporta col *bicarbonato di calcio.*

G. A. Le Roy (²) ha trovato nell'*esametiltriaminotrifenilmetano* o *violetto cristallizzato* un buon reattivo per riconoscere gli

---

(¹) Loc. cit., Nota III.

(²) " C. R. ", 1916, t. 163, p. 226.

ipocloriti nelle acque potabili. Però io credo che possa nascere qualche confusione colla alcalinità, per il fatto che anche le acque potabili, o per la loro alcalinità, o per la dissociazione dei sali, producono una colorazione molto somigliante, un poco più lenta a svilupparsi, ma ad ogni modo una colorazione si ha anche quando non vi sono gli ipocloriti.

La preparazione del reattivo come l'ho indicata io nel 1912, cioè la scolorazione del cristal-violetto, è molto più semplice che non quella indicata dal Roy. La diversità dei risultati che io ho ottenuto può dipendere dal diverso modo di preparare il reattivo; io ho decolorato il violetto coll'acido solforoso ed il Roy ha adoperato il cloridrato di esametiltriaminotrifenilmetano preparato sia dall'ortoformiato di etile sia dal tetrametildiaminobenzidrolo, sia riducendo il violetto cristallizzato con zinco e acido cloridrico. Io non ho preparato il reattivo secondo questi metodi e non posso dire con sicurezza se si comporta in tutto identicamente al mio.

Da quanto ho esposto si può concludere:

1. I derivati solfitici del triaminotrifenilmetano, e specialmente il violetto d'Hofmann trietilico, decolorato col bisolfito, costituiscono dei buoni reattivi per l'alcalinità anche in quei casi in cui il tornasole od altre materie coloranti non servano bene. Si evita la concentrazione dell'acqua a piccolo volume.

Ho fatto delle esperienze di confronto con la tintura di tornasole, con la fenolftaleina, ecc., ma indubbiamente la sensibilità e bellezza della reazione è molto maggiore colle materie coloranti da me indicate.

2. Molti sali e specialmente quelli ad acido debole quando sono in soluzione diluitissima reagiscono assai bene col mio reattivo o violetto di Hofmann trietilico decolorato. Queste reazioni possono servire a dimostrare la dissociazione di sali quali i borati, i fosfati, ecc. e nella microchimica, come esporrò in una seconda Nota.

Torino. R. Università. Laboratorio di Chimica farmaceutica e tossicologica. Marzo 1918.

Le varie definizioni di prodotto

Nota della Dr. ROSETTA FRISONE
(R. Scuola Normale di Torino)

In questa nota esamino i vari modi con cui nel linguaggio comune si esprime l'idea di prodotto; poi faccio l'analisi della definizione che si trova comunemente nei libri scolastici, e che si può far rimontare ad Euclide; poi quella di Cauchy, quella di Cantor, gli studi del compianto prof. Capelli in questa questione, e infine espongo la definizione per induzione.

Il prodotto di due numeri, per esempio 2 e 3, si indica con 2×3, che si legge in matematica " 2 moltiplicato per 3 "; nel linguaggio comune la stessa idea si esprime:

a) colla semplice apposizione verbale; così cinquecento = cento×cinque. Parimenti in " cinque metri " e " cinque dita " l'apposizione significa ×.

b) con suffissi grammaticali: così 2×3 si legge " il doppio di 3 " o " il triplo di 2 "; cioè il suffisso *-plo* di *duplo, triplo,* ecc., indica ×. Parimenti in " 2 terne = 2×3 ", " 2 dozzine = 2×12 ", il suffisso *-na* di *terna, dozzina,* significa ×. In " 3 paia = 3 coppie = 3×2 ", al segno $\times 2$ si son sostituite delle parole speciali: *paio, coppia.*

c) colla parola *volte*: " 2 volte 3 = 3×2 ".

La scrittura simbolica, usata in Aritmetica e in Algebra, rappresenta questa idea sempre collo stesso simbolo ×, qualche volta sottinteso. La notazione simbolica fa corrispondere ad ogni idea un simbolo solo, mentre il linguaggio ordinario esprime la stessa idea sotto molte forme diverse.

Nel nostro ordinamento scolastico, la moltiplicazione si insegna nella prima elementare; si fa uso del segno ×, e non si dà alcuna definizione. Le definizioni cominciano a comparire in 4ª elementare, e sono comuni nei libri delle scuole medie e superiori. Non fu sempre così. Per la storia dell'insegnamento

dell'aritmetica nelle scuole elementari, vedasi la mia nota: *Le prime definizioni in aritmetica* [1].

L'idea $\times$ si esprime in lingua volgare coll'apposizione o con suffissi grammaticali, e se ne studiano le proprietà nelle classi elementari. Quindi la definizione che si insegna nelle scuole medie non può più avere per scopo di far conoscere la moltiplicazione, già nota, ma può avere per solo scopo di analizzare questa operazione, facendo vedere come si scomponga in idee più semplici, e si arrivi infine alle idee primitive; cosa che non si fa nella scuola inferiore, perchè l'analisi delle idee di aritmetica è recente.

È comune nei libri scolastici la definizione:

1. — " Il prodotto di due numeri a e b è la somma di tanti numeri eguali ad a quante sono le unità contenute in b ".

Alcuni autori aggiungono ancora la condizione $a \times 0 = 0$, e $a \times 1 = a$, ritenendo che non abbia senso l'espressione " somma di 0 numeri " e " somma di 1 numero ". Altri invece ritengono che queste condizioni siano implicite nella definizione generale e non le aggiungono più.

Questa definizione 1 si può far rimontare ad Euclide. Questi, nel libro V, def. 2, usa la parola *multiplice*, e la definisce mediante la misura, o divisione. Lo stesso fa, parlando dei numeri, nel libro VII, def. 5, ove comincia a trattare l'aritmetica. Nel libro VII, la def. 15 dice: *Ἀριθμὸς ἀριθμὸν πολλασιάζειν λέγεται, ὅταν, ὅσαι εἰσὶν ἐν αὐτῷ μονάδες, τοσαυτάκις συντεθῇ ὁ πολλασιαζόμενος, καὶ γένηταί τις*; che traduco: " Un numero dicesi moltiplicare un numero, quando, quante sono in esso unità, altrettante volte si compone (si somma) il numero moltiplicato, e si genera qualche numero ".

Ma sull'autenticità delle definizioni di Euclide molto si è discusso. Esse non sono in generale eguaglianze in cui in un membro c'è la parola nuova che si definisce e nell'altro c'è un gruppo di parole note. Il loro titolo non è *ὁρισμός* = definizione, ma *ὅρος* = termine. Perciò ripeto quanto scrive il prof. Vacca in *Euclide, il primo libro degli Elementi*, Firenze, 1916, pag. 2:

---

[1] Nel " Bollettino di Matematiche e di Scienze fisiche e naturali ", anno 1917.

" traduco con *termini* il greco *ὅροι,* piuttosto che con *definizioni,* come si fa comunemente, perchè queste prime pagine introduttorie, invece che *definizioni matematiche,* sono piuttosto chiarimenti o spiegazioni analoghe a quelle che si dànno oggi nei dizionari. Queste prime proposizioni sono state, con tutta probabilità, assai alterate „. Nel nostro caso, delle proposizioni in cui si parla di *moltiplicazione* dopo aver parlato di *multiplo,* e si esprime il *multiplo* mediante il *divisore,* hanno nulla che fare colle definizioni come si intendono comunemente.

Qualunque ne sia la sua origine, per esaminare la definizione 1 sostituisco ad a e a b i numeri particolari cento e cinque:

2. — " cinque cento, cioè cento $\times$ cinque, è la somma di tanti numeri eguali a 100 quante sono le unità contenute in 5 „.

Ora la frase " tante dita quante sono le unità contenute in 5 „ significa " 5 dita „. La prima è un allungamento della seconda; così " la metà del doppio di 5 „ per indicare 5, è allungamento ottenuto aggiungendo tante parole il cui valore complessivo è nullo. Ogni frase si può allungare indefinitamente aggiungendovi delle parole il cui valore complessivo è nullo; lo stesso avviene nelle formole matematiche; l'algebra insegna le regole, del tipo $a - a = 0$, per ridurre alla forma più semplice le espressioni composte. Ne segue che la frase 2 si semplifica in

3. — " cinque cento = somma di 5 numeri eguali a 100 „

In generale la definizione 1 diventa:

4. — " $a \times b$ = somma di b numeri eguali ad a „.

E siccome la parola *somma* esprime un'idea nota, rappresentata dal simbolo $+$, ed *eguale* esprime un'altra idea nota, rappresentata dal simbolo $=$, e così pure *numero* si può ritenere spiegato nelle nozioni precedenti, la definizione 4 pare legittima. Ma invano si tenterebbe di sostituire le parole *somma* ed *eguale* coi simboli $+$ ed $=$.

Riprendiamo il nostro esempio e nella 3 " cinquecento = somma di 5 numeri eguali a 100 „ si vede che la parola *eguali* non può essere sostituita col segno $=$, ma è un pleonasmo, perchè la posso sopprimere, ed ottengo

5. — “ cinquecento = somma di cinque numeri 100 „.

In quest'ultima eguaglianza la parola *numeri* è un pleonasmo, perchè “ il numero cento „ significa “ cento „. Sopprimo, ho:

6. — “ cinque cento = somma di cinque cento „.

Risulta così che qui la parola *somma* è un pleonasmo, come in “ somma di 5 lire = 5 lire „, e trovo, fatta la semplificazione, l'identità

7. — “ cinque cento = cinque cento „,

ossia “ cinque cento „ è l'abbreviazione del suo allungamento.

In “ cinque cento „ la moltiplicazione è indicata dall'apposizione delle due parole, ed è vano il definire quest'apposizione mediante tante apposizioni quante sono le parole del secondo membro meno una. E precisamente, nella definizione 1 dell'apposizione mediante molte apposizioni, quella che nel secondo membro ha il valore di × sta fra le due parole “ tanti numeri „, “ *b* numeri „.

L'apposizione verbale ha molti significati. Oltre quella vista di ×, in “ ventidue „ significa +; ed in altre frasi ha varii valori logici e grammaticali.

Alcuni autori allungano la definizione dicendo:

8. — “ Prodotto di due fattori è la somma di tanti *termini* o *addendi*, eguali al *moltiplicando*, quante *unità* sono nel *moltiplicatore* „.

Così l'idea di prodotto, che appartiene al linguaggio volgare, e di cui si fanno numerosi esempi nella prima classe elementare, è espressa mediante le parole: *termini, addendi, moltiplicando, unità, moltiplicatore,* che appartengono al linguaggio scientifico, e che si insegnano nelle scuole medie varii anni dopo. Quella definizione esprime il noto per l'ignoto. E se essa pare chiara, si è perchè esprime un'idea già chiara.

***

Cauchy, nella classica opera *Cours d'Analyse* del 1821 (“ Œuvres „, 2e série, t. 3, p. 337), proponendosi di dare una

definizione generale del prodotto servente per gli interi, pei fratti e per gli irrazionali, disse:

9. — “ Multiplier le nombre A par le nombre B, c'est opérer sur le nombre A précisément comme on opère sur l'unité pour obtenir B „.

Ma il termine *operare* è generico; e dal sapere che $f1 = B$, cioè che l'operazione o funzione f eseguita su 1 dà per risultato B, nulla posso conchiudere sul valore di fA, cioè sul risultato della stessa operazione eseguita su A. Qui la parola *operazione* deve essere intesa nel significato specifico di *moltiplicazione* o, diversamente detto, di *proporzionalità* o funzione *distributiva,* quindi si definisce la moltiplicazione mediante essa stessa.

Per esporre la stessa obbiezione sotto forma più elementare, vogliasi colla definizione di Cauchy trovare il significato di $a \times 2$. Siccome 2 si ottiene da 1 colle operazioni:

$$2 = \text{successivo di } 1 = 3 - 1 = 4/(1 + 1) = \text{ecc.},$$

troverò per $a \times 2$ i valori

$$\text{successivo di } a,\ 3 - a,\ 4/(a + a),\ \text{ecc.},$$

tutti diversi da $a \times 2$.

La definizione di Cauchy si diffuse largamente nei libri scolastici; ma dopo le obbiezioni fatte nella “ Rivista di Matematica „, anno 1891, pag. 101, dal prof. Peano, ed a pag. 121 dal prof. Burali-Forti, essa è pressochè scomparsa.

*
* *

Siccome i numeri si presentano dapprima in apposizione “ due occhi, quattro piedi, cinque dita „, ove l'apposizione significa moltiplicato, e solo più tardi da essa si astrae il numero detto astratto “ due, quattro, cinque „, così si può proporre di vedere se l'idea di moltiplicazione non sia più semplice di quella dell'addizione.

Questa questione fu trattata dall'illustre e compianto professore A. Capelli, nell'articolo *Sull'ordine di precedenza fra le operazioni fondamentali dell'Aritmetica* (“ Rend. della R. Accad. di Napoli „, 16 giugno 1900). Ivi spiega i vari possibili ordina-

menti logici delle quattro operazioni di Aritmetica, e fa vedere come si possa dare una definizione diretta di prodotto, senza passare per la somma. Egli dice:

10. — " Per prodotto di due numeri m ed n intenderemo il numero delle coppie che si possono formare combinando in tutti i modi possibili uno qualunque degli elementi di un aggregato di numerosità m con uno qualunque degli elementi di un aggregato di numerosità n „.

Questa definizione già trovasi in G. Cantor, in una Nota pubblicata contemporaneamente nei " Mathematische Annalen „, t. XLVI, e nella " Rivista di Matematica „, anno 1895, pag. 129. Ivi si introducono i numeri cardinali, che comprendono, oltre i numeri dell'Aritmetica, varie specie di infiniti, e a pag. 134 si definisce direttamente la somma, il prodotto e la potenza di due numeri cardinali.

Queste definizioni sono tradotte in simboli di Logica matematica nel " Formulario Mathematico „, tomo V, pag. 136. Qui traduco letteralmente la prop. 6. " Essendo x e y due numeri di classi, o numeri cardinali finiti o infiniti, allora prendo due classi a e b, tali che il numero degli a sia x, e il numero dei b sia y; e considero il numero delle coppie che si possono formare combinando ogni ente di a con ogni ente di b. Il valore costante di questo numero di coppie, qualunque siano le classi a e b, si pone per definizione $= xy$ „. Per provare che $x \times y$ esiste, bisogna provare che il numero delle coppie di un a con un b rimane invariato, sostituendo a e b con altre classi egualmente numerose, ed è così che fa il Cantor nella pagina citata.

Ogni definizione deve essere omogenea nelle lettere variabili. Così con $x \times y$, o più generalmente con $f(x, y)$, posso indicare un'espressione contenente le sole variabili x e y; ma se io indico con quella notazione un'espressione contenente x, y, z, avrò dato lo stesso nome, e chiamati eguali, degli enti che per la loro natura sono diseguali. La definizione, in cui in un membro figurano solo $f(x, y)$ e nell'altro x, y, z, si può rendere omogenea dicendo:

$f(x, y) =$ il valore costante dell'espressione con x, y, z, qualunque sia z;

e segue il teorema che questo $f(x, y)$ esiste, o sempre, o sotto nuove ipotesi.

Oppure si può assumere la definizione non omogenea, e dimostrarne la legittimità, provando che il secondo membro non varia cambiando z.

Per es. non è omogenea la definizione del prodotto di due frazioni, che si trova in tanti libri scolastici:

$$(a/b)\times(c/d) = (ac)/(bd),$$

" prodotto di due frazioni è quella frazione che ha per numeratore il prodotto dei numeratori e per denominatore il prodotto dei denominatori ". Poichè il primo membro contiene il prodotto di due frazioni, e nel secondo comparisce un'espressione contenente non le frazioni, ma i loro numeratori e denominatori. Ora dall'essere $2/3 = 4/6$, non segue che il numeratore di $2/3$ sia quello di $4/6$. Volendo assumere quella definizione, bisogna giustificarla dimostrando che l'espressione considerata non varia sostituendo una frazione con una sua eguale.

La giustificazione della definizione del prodotto di due numeri cardinali, che si trova in Cantor, non si trova nella Nota citata del Capelli, ma è sviluppata nell'opera dello stesso autore, *Istituzione di analisi algebrica*, 1902, pag. 20:

" Il numero degli elementi dell'aggregato prodotto dipende soltanto dai numeri degli elementi dei fattori ".

La teoria del Capelli penetrò in qualche libro scolastico, per esempio in quello del compianto Lo Monaco; ma non sempre la definizione non omogenea è accompagnata dalla sua giustificazione. La teoria del Capelli è pure citata, ma non usata dal Färber, *Arithmetik*, 1911, pag. 16.

In ogni caso la teoria di Cantor, che è l'unica via per trattare quegli infiniti, non pare appropriata ad una teoria scolastica dei numeri finiti.

* * *

Ciò che si vuol esprimere con la definizione 1 è il sistema di eguaglianze:

$$a\times 0 = 0 \qquad a\times 2 = a + a$$
$$a\times 1 = a \qquad a\times 3 = a + a + a$$

eccetera,

ognuna delle quali è completamente scritta in simboli. Esse contengono nel primo membro il segno $\times$, e nel secondo membro il segno $+$, dunque si possono assumere come definizioni dei primi membri. Però siccome non possiamo scrivere effettivamente le infinite eguaglianze del tipo considerato, ossia siccome nell'*eccetera* sta inclusa l'idea dell'infinito, bisogna ancora fare un passo per definire $a \times b$, qualunque sia il numero b. Tutte queste infinite eguaglianze sono compendiate nelle due:

11. $a \times 0 = 0. \qquad a \times (b + 1) = a \times b + a.$

Ponendo nella seconda al posto di b successivamente 0, 1, 2, ecc. troviamo tutte le eguaglianze precedenti.

Questa definizione dicesi per induzione, perchè definisce $a \times (b + 1)$ mediante $a \times b$. Nella teoria delle serie dicesi " definizione ricorrente ".

Le proposizioni 11, antichissime, furono assunte come definizioni del prodotto negli *Arithmetices principia* del prof. PEANO nel 1889, prima teoria scritta interamente in simboli di logica matematica.

Questa definizione per induzione penetrò in alcuni libri scolastici, come l'*Aritmetica* di BURALI-FORTI e RAMORINO, gli *Elementi di Aritmetica* di CATANIA, ora alla 6ª edizione, nel libro del GAZZANIGA, anno 1900, e in altri. Però essendo in questi libri le definizioni simboliche più o meno mescolate al linguaggio comune, la necessità della definizione 11 risulta meno evidente.

Quanto precede fu oggetto di una conferenza da me tenuta nell'Università di Torino, alla presenza di varii professori; e ho fatto uso delle osservazioni che in quell'occasione mi furono fatte specialmente dal prof. Peano e dalla prof. Viriglio.

Logique des propositions

par le Capitaine LAGNEAU

1° — Implicatives et conjonctives

On considère des *propositions.*

Certaines propositions sont *vraies.*

Dire que telle proposition est vraie est une *affirmation.*

Quand on considère une proposition l et une proposition m, alors on considère une proposition que l'on nomme l'*implicative* de l sur m, on l'écrit $l \supset m$, que l'on prononce *l donc m.*

1 A toute implicative, on peut appliquer le raisonnement d'*implication: quand l'implicative* $\mathrm{l} \supset \mathrm{m}$ *est vraie et quand la proposition* l *est vraie, alors la proposition* m *est vraie.*

Quand on considère une proposition l et une proposition m, alors on considère une proposition que l'on nomme la *conjonctive* de l et m, on l'écrit $l \cap m$ que l'on prononce *l et m.*

2 A toute conjonctive, on peut appliquer le raisonnement de *conjonction: quand la proposition* l *est vraie et quand la proposition* m *est vraie, alors la conjonctive* $\mathrm{l} \cap \mathrm{m}$ *est vraie.*

Une affirmation que l'on obtient en appliquant à des propositions vraies les raisonnements d'implication et de conjonction est nommée un *théorème* et la suite de ces propositions et de ces raisonnements est la *démonstration* du théorème.

Une affirmation que l'on admet sans démonstration est un *postulat.*

Nous admettrons les postulats suivants :

3 $\quad l \supset l$

4 $\quad l \supset . m \supset l$

5 $\quad m \supset l . \supset l : \supset : l \supset m . \supset m$

6 $\quad l \supset m . \cap . m \supset n . \supset . l \supset n$

7 $\quad l \supset m . \cap . l \supset n . \supset . l \supset m \cap n$

8 $\quad l \supset . m \supset n : \supset . l \cap m \supset n$

9 $\quad l \cap m \supset n . \supset : l \supset . m \supset n$

THÉORÈMES :

11 $\quad l \cap m \supset l$ par 8-4-1

Démonstration. $l \supset . m \supset l : \supset . l \cap m \supset l$ par 8 d'où 11 par 4 et 1

12 $\quad l \cap m \supset m$ par 4-3-8-1

Dém. $m \supset m . \supset : l \supset . m \supset m$ par 4 d'où $l \supset . m \supset m$ par 3 et 1
$l \supset . m \supset m : \supset . l \cap m \supset m$ par 8, d'où 12 par 1

13 $\quad l \cap l \supset l$ par 11

14 $\quad l \supset l \cap l$ par 7-3-2-1

Dém. $l \supset l . \cap . l \supset l . \supset . l \supset l \cap l$ par 7
$l \supset l . \cap . l \supset l$ par 3-2 d'où 14 par 1

21 $\quad l \supset m . \cap l . \supset m$ par 8-3-1

Dém. $l \supset m . \supset . l \supset m : \supset : l \supset m . \cap l . \supset m$ 8

22 $\quad l \supset . m \supset l \cap m$ par 9-3-1

Dém. $l \cap m \supset l \cap m . \supset : l \supset . m \supset l \cap m$ 9

23 $\quad l \cap m \supset n . \cap l . \supset . m \supset n$ par 8-9-1

Dém. $l \cap m \supset n . \supset : l \supset . m \supset n \therefore \supset : l \cap m \supset n . \cap l . \supset . m \supset n$ 8

24 $\quad l \supset m . \supset . l \supset l \cap m$ par 23-7-3-2-1

Dém. $l \supset l . \cap . l \supset m . \supset . l \supset l \cap m : \cap . l \supset l : l \supset m . \supset . l \supset l \cap m$ 23

31 $\quad l \cap m \supset m \cap l$ par 7-12-11-2-1

Dém. $l \cap m \supset m . \cap . l \cap m \supset l . \supset . l \cap m \supset m \cap l$ 7

32 $\quad m \supset n . \cap . l \supset m . \supset . l \supset n$ par 6-31-2-1

Dém. $m \supset n . \cap . l \supset m . \supset . l \supset m . \cap . m \supset n : \cap : l \supset m . \cap . m \supset n . \supset . l \supset n :$
$: \supset : m \supset n . \cap . l \supset m . \supset . l \supset n$ 6

33 $\quad l \supset n . \cap . l \supset m . \supset . l \supset m \cap n$ par 6-31-7-2-1

Dém. $l \supset n . \cap . l \supset m . \supset . l \supset m . \cap . l \supset n : \cap : l \supset m . \cap . l \supset n . \supset . l \supset m \cap n :$
$: \supset : l \supset n . \cap . l \supset m . \supset . l \supset m \cap n$ 6

34 $\quad l \cap m \supset n . \supset . m \cap l \supset n$ par 23-6-31-2-1

Dém. $m \cap l \supset l \cap m . \cap . l \cap m \supset n . \supset . m \cap l \supset n : \cap . m \cap l \supset l \cap m :$
$: \supset : l \cap m \supset n . \supset . m \cap l \supset n$ 23

35 *lɔ . mɔn : ɔ . m∩lɔn* par 34-8-6-2-1

36 *m∩lɔn . ɔ : lɔ . mɔn* par 34-9-6-2-1

37 *lɔ . mɔn : ɔ : mɔ . lɔn* par 6-35-9-2-1

Dém. *lɔ . mɔn : ɔ . m∩lɔn ∴ ∩ ∴ m∩lɔn . ɔ : mɔ . lɔn ∴ ɔ ∴*
∴ lɔ . mɔn : ɔ : mɔ . lɔn 6

42 *mɔ . lɔl∩m* par 6-4-24-2-1

Dém. *mɔ . lɔm : ∩ : lɔm . ɔ . lɔl∩m : ɔ : mɔ . lɔl∩m* 6

43 *m∩lɔn . ∩l . ɔ . mɔn* par 8-36-1

Dém. *m∩lɔn . ɔ : lɔ . mɔn ∴ ɔ : m∩lɔn . ∩l . ɔ . mɔn* 8

44 *lɔm . ɔ . lɔm∩l* par 43-7-3-2-1

Dém. *lɔm . ∩ . lɔl . ɔ . lɔm∩l : ∩ . lɔl : ɔ : lɔm . ɔ . lɔm∩l* 43

45 *nɔl∩m . ɔ . nɔl* par 43-6-11-2-1

Dém. *nɔl∩m . ∩ . l∩mɔl . ɔ . nɔl : ∩ . l∩mɔl : ɔ :*
: nɔl∩m . ɔ . nɔl 43

46 *nɔl∩m . ɔ . nɔm* par 43-6-12-2-1

47 *nɔl∩m . ɔ . nɔl . ∩ . nɔm* par 45-46-7-2-1

51 *lɔ : lɔm . ɔm* par 4-5-6-2-1

Dém. *lɔ : mɔl . ɔl* 4 *mɔl . ɔl : ɔ : lɔm . ɔm* 5

52 *mɔn . ɔ : lɔm . ɔ . lɔn* par 9-32-1

Dém. *mɔn . ∩ . lɔm . ɔ . lɔn : ɔ ∴ mɔn . ɔ : lɔm . ɔ . lɔn* 9

53 *lɔm . ɔ . nɔm : ɔ : mɔl . ɔ . nɔl* par 37-5-52-6-2-1

Dém. *lɔm . ɔ . nɔm : ɔ ∴ nɔ : lɔm . ɔm* 37
nɔ : lɔm . ɔm ∴ ɔ ∴ nɔ : mɔl . ɔl 5-52-1

54 *mɔn . ɔ : nɔl . ɔ . mɔl* par 9-6-1

Dém. *mɔn . ∩ . nɔl . ɔ . mɔl : ɔ ∴ mɔn . ɔ : nɔl . ɔ . mɔl* 9

55 *l∩lɔm . ɔ . lɔm* par 54-14-1

Dém. *lɔl∩l . ɔ : l∩lɔm . ɔ . lɔm* 54

56 *lɔ . lɔm : ɔ . lɔm* par 6-8-55-2-1

Dém. *lɔ . lɔm : ɔ . l∩lɔm ∴ ∩ : l∩lɔm . ɔ . lɔm ∴ ɔ ∴ lɔ . lɔm :*
: ɔ . lɔm 6

57 *lɔm . ɔl : ɔl* par 5-56-1

Dém. *lɔ . lɔm : ɔ . lɔm ∴ ɔ ∴ lɔm . ɔl : ɔl* 5

61 *lɔm . ɔ . l∩nɔm* par 23-6-11-2-1

Dém. *l∩nɔl . ∩ . lɔm . ɔ . l∩nɔm : ∩ . l∩nɔl : ɔ :*
: lɔm . ɔ . l∩nɔm 23

62 *lɔm . ɔ . n∩lɔm* par 23-6-12-2-1

63 *l∩nɔm . ɔ . l∩nɔm∩n* par 7-43-12-2-1

Dém. *l∩nɔm . ∩ . l∩nɔn . ɔ . l∩nɔm∩n* 7

64 *n∩lɔm . ɔ . n∩lɔn∩m* par 7-23-11-2-1

65 $l \supset m \,.\supset.\, l \frown n \supset m \frown n$ par 6-61-63-2-1

Dém. $l \supset m \,.\supset.\, l \frown n \supset m :\frown: l \frown n \supset m \,.\supset\, l \frown n \supset m \frown n :$
$:\supset: l \supset m \,.\supset.\, l \frown n \supset m \frown n$ 6

66 $l \supset m \,.\supset.\, n \frown l \supset n \frown m$ par 6-62-64-2-1

67 $l \supset m \,.\frown.\, n \supset p \,.\supset.\, l \frown n \supset m \frown p$ par 65-66-6-2-1

Dém. $l \supset m \,.\supset.\, l \frown n \supset m \frown n$ par 65 d'où $l \supset m \,.\frown.\, n \supset p \,.\supset.$
$.\, l \frown n \supset m \frown n \,.\frown\, n \supset p$ 65-1
$n \supset p \,.\supset.\, m \frown n \supset m \frown p$ par 66 d'où $l \frown n \supset m \frown n \,.\frown.$
$.\, n \supset p \,.\supset.\, l \frown n \supset m \frown n \,.\frown.\, m \frown n \supset m \frown p$ 66-1

71 $l \supset m \,.\frown n \,.\supset.\, l \supset m \frown n$ par 66-4-1-7-6-2

Dém. $n \supset \,.\, l \supset n :\supset: l \supset m \,.\frown n \,.\supset.\, l \supset m \,.\frown.\, l \supset n$ 66

72 $l \supset m \,.\frown n \,.\supset.\, l \supset n \frown m$ par 22-66-6-2-1

Dém. $l \supset m \,.\frown n \,.\supset.\, l \supset m \,.\frown.\, m \supset n \frown n$ 22-66-1

73 $m \frown l \supset n \,.\supset: l \supset m \,.\supset.\, l \supset n$ par 23-6-63-21-2-1

Dém. $l \supset m \,.\frown l \,.\supset.\, m \frown l :\frown.\, m \frown l \supset n :\supset: l \supset m \,.\frown l \,.\supset n \therefore$
$\therefore \frown: l \supset m \,.\frown l \,.\supset m \frown l \therefore \supset \therefore m \frown l \supset n \,.\supset: l \supset m \,.\, l \frown \,.\supset n$ 23
$l \supset m \,.\frown l \,.\supset m :\supset: l \supset m \,.\frown l \,.\supset m \frown l$ 63

74 $l \supset m \,.\supset.\, l \supset n :\supset.\, m \frown l \supset n$ par 71-8-67-4-3-32-6-31-2-1

Dém. $l \supset m \,.\supset.\, l \supset n :\supset.\, l \supset m \,.\frown l \,.\supset n \therefore \frown: m \frown l \supset \,.\, l \supset m \,.\frown l \therefore \supset \therefore$
$\therefore l \supset m \,.\supset.\, l \supset n :\supset: l \supset m \,.\frown l \,.\supset n :\frown: m \frown l \supset \,.\, l \supset m \,.\frown l$ 71
$m \supset \,.\, l \supset m :\frown.\, l \supset l :\supset: m \frown l \supset \,.\, l \supset m \,.\frown l$ 67

75 $m \supset l \,.\supset n :\supset: m \supset n \,.\supset n$ par 54-65-6-57-36-2-1

Dém. $m \supset n \,.\frown: m \supset l \,.\supset n :\supset: n \supset l \,.\supset.\, m \supset l :\frown: m \supset l \,.\supset n$ 54-65-1
d'où $m \supset n \,.\frown: m \supset l \,.\supset n :\supset: n \supset l \,.\supset n$ 6-2-1
d'où $m \supset n \,.\frown: m \supset l \,.\supset n :\supset n$ 57-6-2-1

76 $l \frown m \,.\frown n \,.\supset.\, l \frown \,.\, m \frown n$ par 61-11-12-7-2-1

Dém. $l \frown m \supset l \,.\supset: l \frown m \,.\frown n \,.\supset l$ 61 d'où $l \frown m \,.\frown n \,.\supset l$ 11-1
$l \frown m \supset m \,.\supset: l \frown m \,.\frown n \,.\supset m$ 61 d'où $l \frown m \,.\frown n \,.\supset m$ 12-1
$l \frown m \,.\frown n \,.\supset n$ 12 d'où $l \frown m \,.\frown n \,.\supset m \frown n$ 7-2-1
d'où $l \frown m \,.\frown n \,.\supset l \frown \,.\, m \frown n$ 7-2-1

77 $l \frown \,.\, m \frown n \,.\supset.\, l \frown m \,.\frown n$ par 62-11-12-7-2-1

2° — Égalités

Quand on considère une proposition l et une proposition m, alors on considère une proposition que l'on nomme l'*égalité* entre l et m, on l'écrit $l = m$ que l'on prononce *l égal m*.

POSTULATS :

101 $l = m \supset . l \supset m$ (*)

102 $l = m \supset . m \supset l$

103 $l \supset m . \frown . m \supset l . \supset l = m$

THÉORÈMES :

104 $l = m \supset . l \supset m . \frown . m \supset l$ par 101-102-7

105 $l = m . = . l \supset m . \frown . m \supset l$ par 103-104

Dém. $l = m \supset . l \supset m . \frown . m \supset l : \frown : l \supset m . \frown . m \supset l . \supset l = m :$
$: \supset : l = m . = . l \supset m . \frown . m \supset l$ 103

106 $l = l \frown m \supset . l \supset m$ par 6-101-46

Dém. $l = l \frown m \supset . l \supset l \frown m : \frown : l \supset l \frown m . \supset . l \supset m : \supset :$
$: l = l \frown m \supset . l \supset m$ 6

107 $l \supset m . \supset l = l \frown m$ par 71-24-103-6

Dém. $l \supset m . \supset . l \supset l \frown m : \frown . l \frown m \supset l : \supset :$
$: l \supset m . \supset . l \supset l \frown m . \frown . l \frown m \supset l$ 71

108 $l \supset m . = . l = l \frown m$ par 106-107-103

111 $l = m . \frown l . \supset m$ par 65-101-21-6

Dém. $l = m \supset . l \supset m : \supset : l = m . \frown l . \supset . l \supset m . \frown l$ 65

112 $l = m . \frown m . \supset l$ par 65-102-21-6

113 $l \supset m = l \frown m$ par 4-12-22-7-103-6

Dém. $l \frown m \supset m . \supset : l \supset . l \frown m \supset m$ 4 $l \supset . m \supset l \frown m$ 22

114 $l \frown m \supset l = m$ par 67-4-103-6

Dém. $l \supset . m \supset l : \frown : m \supset . l \supset m : \supset : l \frown m \supset . m \supset l . \frown . l \supset m$ 67

115 $l \frown . l = m . = l \frown m$ par 7-11-114-64-111-31-6-103

Dém. $l \frown m \supset l . \frown . l \frown m \supset l = m . \supset : l \frown m \supset . l \frown . l = m$ 7
$l \frown . l = m . \supset m : \supset : l \frown . l = m . \supset l \frown m$ 64

121 $l = m \supset m = l$ par 104-31-103-6

122 $l = m . = . m = l$ par 121-103

123 $l = m \supset . l \supset n . = . m \supset n$ par 67-54-103-104-6

Dém. $l \supset m . \supset : m \supset n . \supset . l \supset n \therefore \frown \therefore m \supset l . \supset : l \supset n . \supset . m \supset n \therefore$
$\therefore \supset \therefore l \supset m . \frown . m \supset l . \supset : m \supset n . \supset . l \supset n : \frown : l \supset n . \supset . m \supset n$ 67

124 $l = m \supset . n \supset l . = . n \supset m$ par 67-52-103-104-6

(*) Le signe $\supset$ commande le signe $=$, c'est à dire qu'à l'égalité des points on opère sur $=$ avant d'opérer sur $\supset$.

125 $l = m . \cap . l = n . \supset m = n$ par 67-101-102-6-32-7-103

Dém. $l = m \supset . m \supset l : \cap : l = n \supset . l \supset n : \supset :$

$: l = m . \cap . l = n . \supset . m \supset l . \cap . l \supset n$ 67

$l = m \supset . l \supset m : \cap : l = n \supset . n \supset l : \supset :$

$: l = m . \cap . l = n . \supset . l \supset m . \cap . n \supset l$ 67

126 $m = l . \cap . n = l . \supset m = n$ par 67-101-102-6-32-7-103

127 $l = m \supset . l = n . = . m = n$ par 7-125-9-121-6-103

Dém. $l = m \supset . l = n \supset m = n : \cap : l = m \supset . m = n \supset l = n : \supset : l =$

$= m \supset . l = n \supset m = n . \cap . m = n \supset l = n$ 7

128 $l = m \supset . n = l . = . n = m$ par 7-126-36-121-6-103

Dém. $l = m \supset . n = m \supset n = l : \cap : l = m \supset . n = l \supset n = m : \supset : l =$

$= m \supset . n = m \supset n = l . \cap . n = l \supset n = m$ 7

131 $l = . l = m . \supset m$ par 52-101-6-56-105-127-121-9-5-7-21

Dém. $l = m \supset . l \supset m : \supset \therefore l \supset l = m . \supset : l \supset . l \supset m$ 52

d'où $l = . l = m . \supset : l \supset . l \supset m$ 101-6

d'où A $l = . l = m . \supset . l \supset m$ 56-6

$l = m . = l : = : l \supset m . \cap . m \supset l . = l$ 105-127

d'où $l = . l = m . \supset \therefore l \supset m . \supset : m \supset l . \supset l$ 121-101-9-6

d'où $l = . l = m . \supset \therefore l \supset m . \supset : l \supset m . \supset m$ 5-52-6

d'où $l = . l = m . \supset m$ A-7-21-6

132 $m \supset . l = . l = m$ par 4-52-6-5-8-104-54-114-36-7-103

Dém. $m \supset : l \supset m . \supset m$ 4

d'où $l \supset m . \supset m : \supset \therefore l \supset m . \supset : l \supset m . \supset m$ 52-6

d'où $m \supset \therefore l \supset m . \supset : m \supset l . \supset l$ 6-5-52

d'où $m \supset : l \supset m . \cap . m \supset l . \supset l$ 8-52

d'où $m \supset . l = m \supset l$ 104-54-52

$m \supset . l \supset l = m$ 114-36 d'où $m \supset . l = . l = m$ 7-103-6

133 $l = . l = m : = m$ 131-132-103

134 $l = n . = . m = n . \supset l = m$ par 113-127-6-115-71-126-101-37-121-52-35-73-133-122-128-7-103

Dém. $l \supset . l = n . = . l \cap . l = n$ 113

d'où $l \supset : l = n . = . m = n : = : l \cap . l = n . =$

$= . m = n$ 127-6

$l \cap n = . m = n : = : l \cap . l = n . = . m = n$ 115-127

d'où $l \supset \therefore l = n . = . m = n : = : l \cap n =$

$= . m = n$ 71-126-6

d'où B $l = n . = . m = n . \supset : l \supset . l \cap n = . m = n$

101-6-37

$n = l \cap n \supset : l \cap n = . m = n : = : n = . m = n$ 127-121-6

d'où $l \supset : l \cap n = . m = n : = : n = . m = n$ 52-113

d'où $l \cap n = . m = n : \cap l : \supset : n = . m = n$ 101-6-35

d'où $l \supset . l \cap n = . m = n : \supset .\therefore l \supset : n = . m = n$ 73

d'où $l = n . = . m = n . \supset .\therefore l \supset : n = . m = n$ B-6

$l \supset . n = . m = n : \supset . l \supset m$ 133-122-128-101-52

d'où $l = n . = . m = n . \supset . l \supset m$ 6

d'où $l = n . = . m = n . \supset . m \supset l$ 121-6

135 $l = m . = : l = n . = . m = n$ par 127-134-103

136 $l = m . = : n = l . = . n = m$ par 122-127-128-126-135

Dém. $l = n . = . m = n : = : n = l . = . m = n$ 122-127

$n = l . = . n = m : = : n = l . = . m = n$ 122-128

d'où $n = l . = . n = m : = : l = n . = . m = n$ 126

137 $l = m . = n : = : l = . m = n$ par 122-127-136-121-126-133-125

Dém. $l = m . = n : = : m = l . = n$ 122-127

$m = . m = l : = . m = n .\therefore = : m = l . = n$ 136-121

d'où $m = . m = l : = . m = n .\therefore = : l = m . = n$ 126

$m = . m = l : = . m = n .\therefore = : l = . m = n$ 133-127

141 $l = l$ par 103-3

142 $l = l \cap l$ par 12-14-103

143 $l \cap m = m \cap l$ par 31-103

144 $l = m \supset l \cap n = m \cap n$ par 101-102-65-6-7-103

Dém. $l = m \supset . l \supset m$ 101 $\quad l \supset m . \supset . l \cap n \supset m \cap n$ 65

$l = m \supset . m \supset l$ 102 $\quad m \supset l . \supset . m \cap n \supset l \cap n$ 65

145 $l = m \supset n \cap l = n \cap m$ par 101-102-66-6-7-103

146 $l = m . \cap . n = p . \supset . l \cap n = m \cap p$ par 144-121-6-145-67-125

Dém. $l = m \supset l \cap n = m \cap n$ 144

d'où $l = m \supset m \cap n = l \cap n$ 121-6

$n = p \supset m \cap n = m \cap p$ 145

d'où $l = m . \cap . n = p . \supset . m \cap n = l \cap n . \cap . m \cap n = = m \cap p$ 67

147 $l \cap m . \cap n . = . l \cap . m \cap n$ 76-77-103

148 $l \cap n \supset m . = . l \cap n \supset m \cap n$ 63-45-103

Quand on considère des propositions l, m, n, alors on considère une proposition $l \cap m \cap n$.

151 Postulat $l \cap m \cap n = . l \cap m . \cap n$

THÉORÈMES :

152 $l \frown m \frown n =. l \frown . m \frown n$ par 147-122-125-126-151

153 $l \frown m \frown n = m \frown l \frown n$ par 143-144-122-125-126-151-152
$= n \frown l \frown m$
$= l \frown n \frown m$
$= m \frown n \frown l$
$= n \frown m \frown l$

Quand on considère des propositions l, m, n, p, alors on considère une proposition $l \frown m \frown n \frown p$.

154 Postulat $l \frown m \frown n \frown p =. l \frown m \frown n . \frown p$

THÉORÈMES :

155 $l \frown m \frown n \frown p =: l \frown m . \frown n : \frown p$ par 147-122-125-126-151-152-154
$=. l \frown m . \frown . n \frown p$
$=: l \frown : m \frown . n \frown p$
$=: l \frown . m \frown n : \frown p$
$=: l \frown : m \frown n . \frown p$
$=. l \frown . m \frown n \frown p$

156 $l \frown m \frown n \frown p = m \frown l \frown n \frown p$ par 143-144-122-125-126-151-153-154-155
$= n \frown l \frown m \frown p$
etc. . . .

Quand on considère des propositions l, m, n, alors on considère une proposition $l = m = n$.

161 Postulat $l = m = n . =: l = m . = n$

THÉORÈMES :

162 $l = m = n . =: l = . m = n$ par 137-122-125-126-161

163 $l = m = n . = . m = l = n$ par 122-127-128-125-126-161-162
$= . n = l = m$
$= . l = n = m$
$= . m = n = l$
$= . n = m = l$

Quand on considère des propositions l, m, n, p, alors on considère une proposition $l = m = n = p$.

164 Postulat $l = m = n = p \,.\!=: l = m = n \,.\!= p$

THÉORÈMES :

165 $l = m = n = p \,.\!= \therefore l = m \,.\!= n := p$ par 136-122-125-
$=: l = m \,.\!= . n = p$ 126-161-162-164
$= \therefore l =: m = . n = p$
$= \therefore l = . m = n := p$
$= \therefore l =: m = n \,.\!= p$
$=: l = . m = n = p$

166 $l = m = n = p \,.\!= . m = l = n = p$ par 122-127-128-125-
$= . n = l = m = p$ 126-161-163-164-165
etc....

171 $n \supset l \frown m \,.\!= . n \supset l \,.\, \frown \,.\, n \supset m$ par 7-47-103

172 $l \supset m \,.\, \supset l := l$ par 4-57-103

173 $l \frown m \supset n \,.\!= . m \frown l \supset n$ par 34-103

174 $m \supset . l \supset n := : l \supset . m \supset n$ par 37-103

175 $l \frown m \supset n \,.\!= : l \supset . m \supset n$ par 8-9-103

176 $m \frown l \supset n \,.\!= : l \supset m \,.\, \supset . l \supset n$ par 73-74-103

177 $l \supset m = n \,.\!= : l \supset m \,.\!= . l \supset n$ par 176-173-175-125-126-146-171-105-152

Dém. $l \supset . m \supset n := : l \supset m \,.\, \supset . l \supset n$ 176-173-175-125-126

181 $l \supset m \,.\, \supset . n \supset m := : m \supset l \,.\, \supset . n \supset l$ par 53-103

182 $l \supset m \,.\!= . n \supset m \,.\, \supset : m \supset l \frown n \,.\, \supset l = n$ par 181-146-101-67-54-47-52-103-6

Dém. $l \supset m \,.\, \supset . n \supset m : \frown : n \supset m \,.\, \supset . l \supset m := : m \supset l \,.\, \supset . n \supset l : \frown :$
$: m \supset n \,.\, \supset . l \supset n$ 181-146

$m \supset l \,.\, \supset . n \supset l : \frown : m \supset n \,.\, \supset . l \supset n : \supset :$
$: m \supset l \,.\, \frown . m \supset n \,.\, \supset . n \supset l \,.\, \frown . l \supset n$ 67

$m \supset l \frown n \,.\, \supset . m \supset l \,.\, \frown . m \supset n : \supset \therefore$
$\therefore m \supset l \,.\, \frown . m \supset n \,.\, \supset . n \supset l \,.\, \frown . l \supset n : \supset :$
$: m \supset l \frown n \,.\, \supset . n \supset l \,.\, \frown . l \supset n$ 54

$n \supset l \,.\, \frown . l \supset n \,.\, \supset l = n : \supset \therefore$
$\therefore m \supset l \frown n \,.\, \supset . n \supset l \,.\, \frown . l \supset n : \supset : m \supset l \frown n \,.\, \supset l = n$ 52

183 $l \frown m = l \frown n = . l \supset m = n$ par 175-64-46-103-125-146-171-105-124

Dém. $l \supset . m \supset n := : l \frown m \supset l \frown n$ 175-64-46-103-125

3° — Alternatives

Quand on considère une proposition l et une proposition m, alors on considère une proposition que l'on nomme l'*alternative* de l ou m, on l'écrit $l \cup m$ que l'on prononce l *ou m*.

201 Postulat $l \cup m = : l \supset m . \supset m$

Théorèmes :

202 $l \cup m \supset m \cup l$ par 201-101-102-5-6

203 $l \cup m = m \cup l$ par 202-103

204 $l \cup l \supset l$ par 57-201-101-6

205 $l \supset l \cup l$ par 4-201-102-6

206 $l \cup l = l$ par 204-205-103

207 $l \supset m . \cup l$ par 57-201-112

208 $l \cup m = . m \supset l . \supset l$ par 201-203-125

211 $m \supset l \cup m$ par 4-201-102-6

212 $l \supset l \cup m$ par 211-202-6

213 $l \cup m \supset m . \supset . l \supset m$ par 6-212-23

Dém. $l \supset l \cup m . \cap . l \cup m \supset m . \supset . l \supset m$ 6

214 $l \supset m . \supset . l \cup m \supset m$ par 6-201-101-23-51

Dém. $l \cup m \supset : l \supset m . \supset m .\therefore \cap .\therefore l \supset m . \supset m : \supset m .\therefore \supset . l \cup m \supset m$ 6

d'où $l \supset m . \supset m : \supset m .\therefore \supset . l \cup m \supset m$ 201-101-23

$l \supset m . \supset .\therefore l \supset m . \supset m : \supset m$ 51

215 $l \supset m . = . l \cup m \supset m$ par 213-214-103

216 $l \cup m = m \supset . l \supset m$ par 213-61-104-6

217 $l \supset m . \supset l \cup m = m$ par 214-211-71-103-6

218 $l \supset m . = m = l \cup m$ par 216-217-103-162

219 $l = m = l \cap m = l \cup m$ par 218-108-125-165-166

221 $l \supset . l \cap . l \cup m$ par 24-212

Dém. $l \supset l \cup m . \supset : l \supset . l \cap . l \cup m$ 24

222 $l \cap . l \cup m . = l$ par 221-11-103

223 $l \cap m . \cup l . \supset l$ par 214-11

Dém. $l \cap m \supset l . \supset : l \cap m . \cup l . \supset l$ 214

224 $l \cup . l \cap m . = l$ par 223-202-6-212-103

225 $l \supset m . \supset . l \supset m \cup n$ par 6-212-43

Dém. $l \supset m . \cap . m \supset m \cup n . \supset l \supset m \cup n$ 6

226 $l \supset m . \supset . l \supset n \cup m$ par 6-211-43

231 $l \cup m \supset n . \supset . l \supset n$ par 6-212-23

Dém. $l \supset l \cup m . \cap . l \cup m \supset n . \supset . l \supset n$ 6

232 $m \cup l \supset n . \supset . l \supset n$ par 6-211-23

233 $l \supset n . \cap . m \supset n : \supset . l \cup m \supset n$ par 77-6-65-75-8-36-201-101-54-31

Dém. $l \supset m . \supset m : \cap . m \supset n . \cap . l \supset n : \supset . \therefore l \supset m . \supset m :$
$: \cap . m \supset n . \therefore \cap . l \supset n$ 77

$l \supset m . \supset m : \cap . m \supset n . \therefore \cap . l \supset n . \therefore \supset : l \supset m . \supset n : \cap . l \supset n$ 6-65

$l \supset m . \supset n : \cap . l \supset n : \supset n$ 75-8

d'où $m \supset n . \cap . l \supset n . \supset . \therefore l \supset m . \supset m : \supset n$ 6-36

$l \supset m . \supset n : \supset n . \therefore \supset . l \cup m \supset n$ 201-101-54

234 $l \supset n . \cap . m \supset n . = . l \cup m \supset n$ par 233-231-232-7-103

235 $l \cup . m \cup n . \supset . l \cup m . \cup n$ par 211-225-233-312

Dém. $m \supset l \cup m$ 211 d'où $m \supset . l \cup m . \cup n$ 225

$n \supset . l \cup m . \supset n$ 211 d'où $m \cup n \supset . l \cup m . \cup n$ 233

$l \supset l \cup m$ 202 d'où $l \supset . l \cup m . \cup n$ 225

d'où $l \cup . m \cup n . \supset . l \cup m . \cup n$ 233

236 $l \cup m . \cup n . \supset . l \cup . m \cup n$ par 212-226-233-211

237 $l \cup . m \cup n . = . l \cup m . \cup n$ par 235-236-103

241 $l \supset m \cup n . \supset . l \cup n \supset m \cup n$ par 233-211-43

Dém. $l \supset m \cup n . \cap . n \supset m \cup n . \supset . l \cup n \supset m \cup n$ 233

242 $l \cup n \supset m \cup n . \supset . l \supset m \cup n$ par 6-212-23

Dém. $l \supset l \cup n . \cap . l \cup n \supset m \cup n . \supset . l \supset m \cup n$ 6

243 $l \supset m \cup n . = . l \cup n \supset m \cup n$ par 241-242-103

244 $l \supset m . \supset . l \cup n \supset m \cup n$ par 6-225-241

Dém. $l \supset m . \supset . l \supset m \cup n : \cap : l \supset m \cup n . \supset . l \cup n \supset m \cup n : \supset :$
$: l \supset m . \supset . l \cup n \supset m \cup n$ 4

245 $l \supset m . \supset . n \cup l \supset n \cup m$ par 244-202-71-6-32

246 $l \supset m . \cap . n \supset p . \supset . l \cup n \supset m \cup p$ par 244-245-67-6

Dém. $l \supset m . \cap . n \supset p . \supset . l \cup n \supset m \cup n . \cap . m \cup n \supset m \cup p$ 244-245-67

247 $l = m \supset l \cup n = m \cup n$ par 244-67-103-104-6

248 $l = m \supset n \cup l = n \cup m$ par 245-67-103-104-6

249 $l = m . \cap . n = p . \supset l \cup n = m \cup p$ par 247-248-67-121-65-125-6

251 $l \cap . m \cup n . \supset . m \cup . l \cap n$ par 201-101-66-71-31-6-52-62-47-54

Dém. $l \cap . m \cup n . \supset : l \cap : m \supset n . \supset n$ 201-101-66

$l \cap : m \supset n . \supset n : \supset : m \supset n . \supset l \cap n$ 71-31-6-52

$m \supset n . \supset l \cap n : \supset : m \supset n . \cap . m \supset n . \supset l \cap n$ 62

$m \supset l . \cap . m \supset n . \supset l \cap n : \supset : m \supset l \cap n . \supset l \cap n$ 47-54

252 $l \cap . m \cup n . \supset . l \cap m . \cup . l \cap n$ par 251-64-202-66-6

Dém. $l \cap . m \cup n . \supset : l \cap : m \cup . l \cap n$ 251-64

$l \cap : m \cup . l \cap n : \supset : l \cap : l \cap n . \cup m$ 202-66

$l \cap : l \cap n . \cup m : \supset . l \cap n . \cup . l \cap m$ 251

253 $l \cap m . \cup . l \cap n . \supset . l \cap . m \cup n$ par 233-11-246-12-7

Dém. $l \cap m \supset l . \cap . l \cap n \supset l . \supset : l \cap m . \cup . l \cap n . \supset l$ 233

$l \cap m \supset m . \cap . l \cap n \supset n . \supset : l \cap m . \cup . l \cap n . \supset m \cup n$ 246

254 $l \cap . m \cup n . = . l \cap m . \cup . l \cap n$ par 252-253-103

255 $l \cup . m \cap n . \supset . l \cup m . \cap . l \cup n$ par 7-212-67-211-233

Dém. $l \supset l \cup m . \cap . l \supset l \cup n . \supset : l \supset . l \cup m . \cap . l \cup n$ 7

$m \supset l \cup m . \cap . n \supset l \cup n . \supset : m \cap n \supset . l \cup m . \cap . l \cup n$ 67

256 $l \cup m . \cap . l \cup n . \supset . l \cup . m \cap n$ par 251-31-6-245-251-235-204-244

Dém. $l \cup m . \cap . l \cup n . \supset : l \cup : l \cup n . \cap m$ 251-31-6

$l \cup : l \cup n . \cap m : \supset : l \cup : m \cap . l \cup n$ 31-245

$l \cup : m \cap . l \cup n : \supset : l \cup l . \cup . m \cap n$ 251-245-235

257 $l \cup . m \cap n . = . l \cup m . \cap . l \cup n$ par 255-256-103

261 $l \supset m \cup n . \cap . l \cap n \supset m . \supset . l \supset m$ par 24-252-52-244-223-31-6-67

Dém. $l \supset m \cup n . \supset : l \supset . l \cap . m \cup n$ 24

$l \supset . l \cap . m \cup n : \supset : l \supset . l \cap m . \cup . l \cap n$ 252-52

$l \cap n \supset m . \supset : l \cap m . \cup . l \cap n . \supset . l \cap m . \cup m$ 244

$l \cap m . \cup . l \cap n . \supset . l \cap m . \cup m : \supset : l \cap m . \cup . l \cap n . \supset m$ 223-31-244-52 d'où $l \supset m \cup n . \cap . l \cap n \supset m . \supset :$ $: l \supset . l \cap m . \cup . l \cap n : \cap : l \cap m . \cup . l \cap n . \supset m$ 6-67

262 $l \supset m . = . l \supset m \cup n . \cap . l \cap n \supset m$ par 261-225-61-7-103

263 $l \supset m . = . l \cup n \supset m \cup n . \cap . l \cap n \supset m \cap n$ p. 233-148-146-126

264 $l = m . = . l \cup n = m \cup n . \cap . l \cap n = m \cap n$ par 263-146-155-156-105-126

265 $m \cup . l \supset m . \supset . l \supset m$ par 21-23-4-201-101-6

Dém. $m \supset . l \supset m : \cap \therefore m \supset . l \supset m : \supset . l \supset m \therefore \supset . l \supset m$ 21

d'où $m \supset . l \supset m : \supset . l \supset m \therefore \supset . l \supset m$ 23-4

266 $m \cup . l \supset m . = . l \supset m$ par 265-211-103

267 $m \cup . l \supset m . = . m \cup . l = m$ par 113-207-202-257-105-248-126

Dém. $m \cup . m \supset l . \supset : m \cup . l \supset m . = : m \cup . m \supset l : \cap : m \cup . l \supset m$ 113

$m \cup : m \supset l . \cap . l \supset m : = : m \cup . m \supset l : \cap : m \cup . l \supset m$ 257

271 $m \frown n \supset l . \supset . m \supset l . \smile . n \supset l$ par 113-207-101-31-252-54-233-6-36-8

Dém. $m \supset l . \smile m . \supset : n = : m \supset l . \smile m : \frown n$ 113
d'où $n \supset . m \supset l . \frown n : \smile . m \frown n$ 207-101-31-252
d'où $m \supset l . \frown n : \smile . m \frown n : \supset l .\therefore. \supset . n \supset l$ 54
d'où $m \supset l . \frown n . \supset l : \frown : m \frown n \supset l : \supset . n \supset l$ 233-6
d'où $m \frown n \supset l . \supset .\therefore. m \supset l . \frown n . \supset l : \supset . n \supset l$ 36
$m \supset l . \frown n . \supset l : \supset . n \supset l .\therefore. \supset .\therefore. m \supset l . \supset . n \supset l : n \supset l$ 8-54
d'où $m \frown n \supset l . \supset .\therefore. m \supset l . \supset . n \supset l : \supset . n \supset l$ 6

272 $m \frown n \supset l . = . m \supset l . \smile . n \supset l$ par 61-62-233-271-103

273 $l \supset m \smile n . \supset . l \supset m . \smile . l \supset n$ par 4-225-201-101-6-8-64-11-246-252-223-52-7-37-66-54-9-202

Dém. $m \supset . l \supset m . \smile n$ 4-225
d'où $m \supset .\therefore. l \supset m . \supset n : \supset n$ 201-101-6
d'où $m \frown : l \supset m . \supset n : \supset n$ 8
d'où $m \frown : l \supset m . \supset n : \supset m \frown n$ 64
$n \frown . l \supset m . \supset n : \supset n$ 11
d'où $m \frown : l \supset m . \supset n .\therefore. \smile .\therefore. \frown n : l \supset m . \supset n .\therefore.$
$\supset . m \supset n . \smile n$ 246
d'où $m \smile n . \frown : l \supset m . \supset n : \supset n$ 252-223
d'où $l \supset : m \smile n . \frown : l \supset m . \supset n .\therefore. \supset . l \supset n$ 52
d'où $l \supset m \smile n . \frown .\therefore. l \supset : l \supset m . \supset n .\therefore. \supset . l \supset n$ 7
d'où $l \supset m \smile n . \frown : l \supset m . \supset . l \supset n : \supset . l \supset n$ 37-66-54
d'où $l \supset m \smile n . \supset .\therefore. l \supset m . \supset . l \supset n : \supset . l \supset n$ 9
d'où $l \supset m \smile n . \supset . l \supset m . \smile . l \supset n$ 201-102-6

274 $l \supset m \smile n . = l \supset m . \smile . l \supset n$ par 225-226-233-273-103

275 $l \supset m . \smile . n \supset p . \supset . n \supset m . \smile . l \supset p$ par 51-207-233-54-31-6-61-77-66-4-35-21-65-62-76-11-252-37-63-9-201-102-245-271-36

Dém. $n \supset m . \smile n . \supset .\therefore. n \supset m . \smile n . \supset p : \supset p$ 51
d'où $n \supset m . \supset p : \frown . n \supset p : \supset p$ 207-233-54
d'où $n \supset p . \frown : n \supset m . \supset p : \supset p$ 31-6
d'où $n \supset p . \frown : n \supset m . \supset p .\therefore. \frown l .\therefore. \supset p$ 61
d'où $n \supset p . \frown .\therefore. n \supset m . \supset p : \frown l .\therefore. \supset p$ 77
A d'où $n \supset p . \frown .\therefore. l \frown : n \supset m . \supset p .\therefore. \supset p$ 31-66-54
$n \supset m . \supset p : \supset . m \supset p$ 4-54 d'où $m \frown : n \supset m . \supset p : \supset p$ 35
$l \supset m . \frown l : \frown : n \supset m . \supset p : \supset : m \frown : n \supset m . \supset p$ 21-65
d'où $l \supset m . \frown l : \frown : n \supset m . \supset p : p$ 6
d'où $l \supset m . \frown .\therefore. l \frown : n \supset m . \supset p .\therefore. \supset p$ 77
d'où $n \frown :: l \supset m . \frown .\therefore. l \frown : n \supset m . \supset p :: \supset p$ 62

B d'où $n \frown . l \supset m : \frown .\therefore l \frown : n \supset m . \supset p .\therefore \supset p$ 76

$p \frown .\therefore l \frown : n \supset m . \supset p .\therefore \supset p$ 11

C d'où $n \supset p . \smile .\therefore n \frown . l \supset m : \smile p :: \frown .\therefore l \frown :$
$: n \supset m . \supset p :: \supset p$ 233-252-51-6-A-B

$l \supset : n \supset m . \supset p .\therefore \frown l .\therefore \supset . n \supset m . \supset p$ 21

d'où $n \supset m . \supset . l \supset p : \frown l : \supset : l \frown . n \supset m . \supset p$ 37-65-6-63-31

d'où $n \supset p . \smile .\therefore n \frown . l \supset m : \smile p :: \frown .\therefore n \supset m . \supset . l \supset p :$
$: \frown l :: \supset p$ 66-6-C

d'où $n \supset p . \smile .\therefore n \frown . l \supset m : \smile p .\therefore \supset .\therefore n \supset m . \supset . l \supset p :$
$: \supset . l \supset p$ 9

d'où $n \supset p . \smile .\therefore n \frown . l \supset m . \supset p : \supset p .\therefore \supset .\therefore n \supset m . \supset . l \supset p :$
$: \supset . l \supset p$ 201-102-245-54

$n \frown . l \supset m . \supset p : \supset . n \supset p .\therefore \supset .\therefore n \supset p . \smile .\therefore n \frown . l \supset m . \supset p : \supset p$
35-271

d'où $n \frown . l \supset m . \supset p : \supset . n \supset p .\therefore \supset .\therefore n \supset m . \supset . l \supset p :$
$: \supset . l \supset p$ 54-6

d'où $l \supset m . \supset . n \supset p : \supset . n \supset p .\therefore \supset .\therefore n \supset m . \supset . l \supset p :$
$: \supset . l \supset p$ 36

d'où $l \supset m . \smile . n \supset p . \supset . n \supset m . \smile . l \supset p$ 201-101-102-6

276 $l \supset m . \smile . n \supset p . = . n \supset m . \smile . l \supset p$ 275-103

277 $l \supset m . \smile . n \supset p . = . l \frown n \supset m \smile p$ par 272-274-249-237-247-248-276-206

Dém. $l \frown n \supset m \smile p . = : l \supset m . \smile . l \supset p : \smile : n \supset m . \smile . n \supset p$ 272-274-249

Quand on considère les propositions l, m, n, alors on considère une proposition $l \smile m \smile n$.

281 Postulat $l \smile m \smile n = . l \smile m . \smile n$

Théorèmes :

282 $l \smile m \smile n = . l \smile . m \smile n$ par 237-122-125-126-281

283 $l \smile m \smile n = m \smile l \smile n$ par 203-247-122-125-126-281-282
$= n \smile l \smile m$
$= l \smile n \smile m$
$= m \smile n \smile l$
$= n \smile m \smile l$

Quand on considère les propositions l, m, n, p, alors on considère une proposition $l \smile m \smile n \smile p$.

284 Postulat $l \smile m \smile n \smile p = . l \smile m \smile n . \smile p$

THÉORÈMES :

285 $l \cup m \cup n \cup p =: l \cup m \, . \cup n : \cup p$ par 237-122-125-126-
$= . \, l \cup m \, . \cup . \, n \cup p$ 281-282-284
$=: l \cup : m \cup . \, n \cup p$
$=: l \cup : m \cup n \, . \cup p$
$=: l \cup . \, m \cup n : \cup p$
$= . \, l \cup . \, m \cup n \cup p$

286 $l \cup m \cup n \cup p = m \cup l \cup n \cup p$ par 203-247-122-125-126-
$= n \cup l \cup m \cup p$ 281-283-284-285
etc. . . .

4° — Le Faux

On considère une proposition $\bigwedge$ nommée le *Faux*.

301 Postulat $\bigwedge \supset l$

THÉORÈMES :

302 $\bigwedge = l \cap \bigwedge$ par 301-108-111
303 $l = \bigwedge \cup l$ par 301-218-111
304 $\bigwedge = . \, l \supset \bigwedge . \cap l$ par 21-7-4-301-103
Dém. $l \supset \bigwedge . \cap l . \supset \bigwedge$ 21
$\bigwedge \supset . \, l \supset \bigwedge : \cup . \bigwedge \supset l : \supset : \bigwedge \supset . \, l \supset \bigwedge . \cup l$ 7

5° — Contradictoires

Quand on considère une proposition l, alors on considère une proposition nommée la *contradictoire* de l, on l'écrit $-l$ que l'on prononce *non* l.

321 Postulat $-l = . \, l = \bigwedge$

THÉORÈMES :

322 $-\bigwedge$ par 137-122-128-126-133-321-111
Dém. $-\bigwedge = . \bigwedge = \bigwedge : =: \bigwedge = . \bigwedge = -\bigwedge$ 137-122-128-126

La contradictoire du faux est vraie, on la nomme le *Vrai*.

323 $l = l = -\Lambda$ par 133-322-112-162

Dém. $l = . l = -\Lambda$ 133-322-112

324 $l \supset -\Lambda$ par 4-322

325 $l = l \cap -\Lambda$ par 108-324

326 $l \cup -\Lambda$ par 217-324-322-112

Dém. $l \cup -\Lambda = -\Lambda$ 217-324

327 $-\Lambda \supset l . \supset l$ par 23-21-322

Dém. $-\Lambda \supset l . \cap -\Lambda . \supset l : \cap -\Lambda : \supset : -\Lambda \supset l . \supset l$ 23

328 $-\Lambda \supset l . = l$ par 327-4-103

331 $--l = l$ par 321-137-126-122-128-134

Dém. $--l = -l . = \Lambda$ 321-137 $-l = l . = \Lambda$ 321-137

$--l = -l . = . l = -l . \supset --l = l$ 134

332 $-l \cup l$ par 42-301-103-6-244-207-321-112

Dém. $l \supset \Lambda . \supset . l \supset \Lambda . \cap . \Lambda \supset l$ 42-301

d'où $l \supset \Lambda . \cap l . \supset . l = \Lambda . \cup l$ 103-6-244

333 $-l \cap l \supset \Lambda$ par 111-321-101-65-6

Dém. $l = \Lambda . \cap l . \supset \Lambda$ 111

334 $-l \cap l = \Lambda$ par 333-301-103

335 $l = m . = . -l = -m$ par 321-137-126-165

336 $l -= m . = l = -m$ par 321-137-125-127-122

Dém. $l -= m . = : l = . m = \Lambda$ 321-137-125

$l = . m = \Lambda : = . l = -m$ 321-127-122

341 $l \cup . -l \cap m . = l \cup m$ par 257-332-113-202-6-126

Dém. $l \cup . -l \cap m . = . l \cup -l . \cap . l \cup m$ 257

$-l \cup l \supset . l \cup m = . l \cup -l . \cap . l \cup m$ 113-202-6

342 $l \cap . -l \cup m . = l \cap m$ par 254-334-143-125-248-303-126

Dém. $l \cap . -l \cup m . = . l \cap -l . \cup . l \cap m$ 254

$l \cup m = . l \cap -l . \cup . l \cap m$ 334-143-125-248-303

343 $l \supset m . \supset -l \cup m$ par 245-21-332-6

Dém. $l \supset m . \supset . -l \cup l \supset -l \cup m$ par 245

$-l \cup l \supset -l \cup m . \supset -l \cup m$ 21-332

344 $-l \cup m \supset . l \supset m$ par 113-342-143-125-128-124-111-106-6

Dém. $-l \cup m \supset . l = . -l \cup m . \cap l$ 113

$l \cap m = . -l \cup m . \cap l$ 342-143-125

$-l \cup m \supset l = l \cap m$ 128-124-111

345 $l \supset m . = -l \cup m$ par 343-344-103

346 $l \supset m . = . -m \supset -l$ par 345-331-247-203-125

351 $l - \cap m \supset -l \cup -m$ par 321-101-248-341-331-144-125-303-114-165-166-236-332-203-211-6

Dém. $l - \cap m \supset l \cap m = \bigwedge$ 321-101

$l \cap m = \bigwedge \supset . -l \cup . l \cap m . = -l \cup \bigwedge$ 248

$-l \cup . l \cap m . = -l \cup m$ 341-331-144-248-125

d'où $-l \cup . l \cap m . = -l \cup \bigwedge : = . -l \cup m = -l$ 303-114-165-166

$-l \cup m = -l \supset . -l \cup m . \cup -m . = -l \cup -m$ 247

$-l \cup m . \cup -m$ 236-332-203-211

352 $-l \cup -m \supset l - \cap m$ par 113-342-143-125-128-101-147-334-144-302-321-6

Dém. $-l \cup -m \supset . l = . -l \cup -m . \cap l$ 113

$l \cap -m = . -l \cup -m . \cap l$ 342-143-125

d'où $l = . -l \cup -m . \cap l . \supset . \supset l = l \cap -m$ 128-101

$l = l \cap -m \supset . l \cap -m . \cap m . = l \cap m$ 65

$l \cap -m . \cap m . = \bigwedge$ par 147-334-144-143-302-125

353 $l - \cap m = -l \cup -m$ par 351-352-103

354 $l - \cup m = -l \cap -m$ par 353-331-247-248-6

355 $l - \supset m . = l \cap -m$ par 345-354-331-144-125

356 $l = m = . -l \cup m . \cap . -m \cup l$ par 345-105-146-125-162

357 $l = m = . l \cap m . \cup . -l \cap -m$ par 356-254-342-143-125-331-247-249

Dém. $-l \cup m . \cap . -m \cup l . = . -l \cup m . \cap -m : \cup : -l \cup m . \cap l$ 254

$-l \cup m . \cap l . = l \cap m$ 342-143-125

$-l \cup m . \cap -m . = . -m \cap . --m \cup -l$ 331-247-143-125

358 $l = -m = . l - \cap m . \cap . l \cup m$ par 356-331-247-203-125-146

Dém. $l = -m = . -l \cup -m . \cap . --m \cup l$ 356

$--m \cup l = . l \cup m$ 331-247-203-125

$-l \cup -m = l - \cap m . \cap . --m \cup l =$

$= l \cup m . \supset . -l \cup -m . \cup . --m \cup l . = . l - \cap m . \cap . l \cup m$ 146

361 $m \cap l . \cup . n \cap -l . = . n \cup l . \cap . m \cup -l$

Dém. $m \cap l . - \cup . n \cap -l : \cap : n \cup l . \cap . m \cup -l : = \bigwedge$

$m \cap l . - \cup . n \cap -l : \cup : n \cup l . \cap . m \cup -l$

d'où $m \cap l . -- \cup . n \cap -l : = . n \cup l . \cap . m \cup -l$ 358

362 $l = l \cap m = -l \cup m$ par 345-108

363 $-l = l \cap m = l \cap -m$ par 362-335-354

364 $-m \cup . l \supset m$ par 345-237-202-332-211

365 $-l \cup . l \supset m . = . l \supset m$ par 345-237-206-247.

Aux armées, le 4 février 1918.

Leucite pseudomorfa di nefelite di Parco Chigi, presso Ariccia, nei Monti Albani

Nota di FERRUCCIO ZAMBONINI

Il peperino di Parco Chigi, presso Ariccia, nei Monti Albani, contiene numerosi ed assai interessanti aggregati minerali, di composizione molto svariata, e che presentano sovente delle analogie notevoli con quelli similari che si rinvengono nei tufi del Monte Somma.

Come accade anche al Vesuvio, sono sopratutto gli aggregati che presentano nitidi e bei cristalli, quelli che i raccoglitori di minerali ricercano con particolare cura nel peperino del Parco Chigi e di altre località nei dintorni di Roma. Pure, non sono quelli, almeno in generale, i più interessanti dal punto di vista scientifico: è, al contrario, in alcuni aggregati poco appariscenti e raccolti più che altro per caso, che si sono rinvenute, negli ultimi anni, delle novità non prive di importanza, come la cuspidina ed un nuovo fluosilicato di calcio, che furono studiati, nell'Istituto da me diretto, dal Dott. F. STELLA STARRABBA (1). In un altro campione, che, a prima vista, sembra assai poco promettente, io ho trovato, già da qualche tempo, la nuova pseudomorfosi, intorno alla quale mi propongo di riferire brevemente nel presente lavoro.

Il blocco del quale intendo occuparmi si compone di un impasto di leucite in granuli cristallini che misurano fino a 5 mm. di diametro, di sanidino, di nefelina, di granato bruno scuro, insieme a poca augite ed orneblenda. Le quantità rispettive di

(1) *Sulla cuspidina degli inclusi nel peperino dei Monti Albani*, " Rend. R. Accad. Lincei ", 1913 (5ª), XXII, 871.

questi diversi costituenti variano molto nelle diverse parti del blocco. La leucite, al microscopio, appare nettamente birifrangente e presenta bellissima la struttura poli-sintetica: non contiene che poche inclusioni. Quanto al granato, che è di colore bruno nelle lamine sottili, possiede spesso nitida forma cristallina }110{ }211{ anche nella massa del blocco, ma si rinviene pure in granuli.

Il blocco in questione presenta alcune piccole cavità, nelle quali si notano dei cristallini di variabili dimensioni di *granato bruno*, presentanti, come quelli che si trovano nella massa del blocco, la combinazione }110{ }211{, di *sanidino*, tabulari secondo }010{, e che possono raggiungere anche 7-8 mm. di lunghezza, ma che, di solito, sono poco ben conformati, quantunque ve ne sia qualcuno assai bello, di *leucite* incolora, ed anche alcuni, piccoli e rari, di una haüynite pressochè incolora o lievemente verdognola, nonchè qualcuno, rarissimo, di orneblenda.

Vi sono, poi, qua e là, dei cristalli bianchi che arrivano fino a misurare 6 mm. nella loro maggiore dimensione, che, per il loro aspetto, si riconoscono subito come metamorfosati.

In qualche caso, la trasformazione è stata così profonda, che la forma primitiva del minerale originario non è rimasta conservata che tutt'al più molto imperfettamente, e siccome la sostanza originaria non è stata rimpiazzata completamente dalla nuova formazione, sono rimaste numerose e più o meno piccole cavità, le cui pareti sono tappezzate da minutissimi cristallini limpidi ed incolori, la natura dei quali, come vedremo, è facile a determinare. Nella maggior parte dei casi, nei cristalli metamorfosati la trasformazione è stata limitata ad una zona più o meno superficiale, senza modificazione molto notevole della forma esterna primitiva, che può, così, essere tuttora facilmente riconosciuta.

È, infatti, manifesto che i cristalli metamorfosati dei quali ci occupiamo rappresentano la combinazione di un prisma esagono con la base: talvolta, gli spigoli di combinazione tra queste due forme appaiono smussate da strette facciette di una bipiramide esagonale.

I cristalli sono ora alquanto allungati secondo l'asse verticale, ora, invece, tozzi. Le faccie si presentano scabre, tutte irte di minuti cristallini sporgenti, irregolarmente disposti: mai

appare libera una porzione, sia pure piccola, delle faccie originarie.

L'*habitus* dei cristalli metamorfosati è, evidentemente, quello della nefelina, e che si tratti proprio di questo minerale risulta stabilito da qualche misura, solo approssimativa s'intende, eseguita dell'angolo che le faccette accennate di bipiramide formano con la base. I valori trovati oscillano fra 44° e 45°, mentre nella nefelina si ha $(0001):(10\bar{1}1) = 44°5'$.

Rompendo i cristallini, si nota che, nell'interno, essi sono inalterati, ed al microscopio risultano costituiti da una sostanza incolora, trasparente, omogenea, otticamente uniassica, negativa, con birifrangenza debole (0,004 circa), senza anomalie ottiche. I frammentini inalterati hanno un peso specifico di 2,65 (determinato col metodo della sospensione): nell'acido cloridrico diluito si sciolgono completamente, e dalla soluzione concentrata si separa della silice gelatinosa. Con i soliti mezzi si può accertare, inoltre, la presenza dell'alluminio, del sodio e del potassio. Sfaldature *nitide* mancano. Questo complesso di caratteri basta a stabilire in modo sicuro che il minerale originario dei cristalli metamorfosati del blocco di Parco Chigi è la *nefelina*.

Quanto al minerale che si è formato a spese della nefelina, un semplice esame con la lente dei cristalli metamorfosati permette di stabilire che si tratta di *leucite*. Infatti, la sostanza che occupa attualmente la porzione superficiale dei cristalli metamorfosati è nettamente cristallina, e nella maggior parte dei casi i singoli individui sono nitidamente cristallizzati in bellissimi trapezoedri $\{211\}$, incolori e trasparenti, talvolta lievemente giallognoli, con la loro forma caratteristica sicuramente riconoscibile. Essi sono quasi sempre piccolissimi, ma qualcuno arriva fino a misurare 0,5 mm., sicchè mi è stato possibile anche di eseguire qualche misura goniometrica. Così, in un cristallino io ho potuto determinare con esattezza gli angoli seguenti:

$$(211):(121) = 33°\ 52'$$
$$(211):(112) = 33\ \ 31$$
$$(121):(112) = 33\ \ 36\ .$$

Il valore teorico, se la leucite fosse, alla temperatura ordinaria, veramente cubica, sarebbe $33°\ 33\,^1/_2{}'$.

Assai spesso i cristallini anche più piccoli presentano degli angoli rientranti ben visibili, e qualche volta si possono anche riconoscere sulle faccie del pseudoicositetraedro le caratteristiche strie descritte dal vom Rath. In tutti i più minuti particolari, i cristallini formatisi a spese della nefelina nel blocco di Parco Chigi corrispondono ai cristalli di leucite trasparente del Monte Somma, illustrati così bene dal vom Rath.

Che si tratti davvero di leucite, oltre che dalla forma caratteristica, risulta in modo indubbio da tutte le altre proprietà. Al microscopio, il minerale presenta evidenti i caratteri di una sostanza polisintetica, biassica, ma con debolissima birifrangenza: l'indice di rifrazione n è notevolmente più basso di ω e di ϵ della nefelina, e risulta appena superiore a 1,5. I cristallini sono intaccati dall'acido cloridrico con separazione di silice polverulenta: nella soluzione si possono riconoscere microchimicamente l'alluminio ed il potassio: la reazione del sodio riesce pure positiva, sicchè i cristallini in questione rappresentano una leucite un po' sodifera.

Al microscopio, tra i cristallini di leucite, si riconoscono anche delle minute laminette di sanidino, evidentemente formatosi insieme alla leucite durante la trasformazione della nefelite. Su i cristalli di nefelite metamorfizzata si notano talvolta anche dei cristallini macroscopici di sanidino, tabulari secondo }010{, ma, in genere, mal conformati. Su i cristalli in questione ho visto anche, qualche volta, impiantati dei cristallini di granato, evidentemente posteriori alle trasformazioni subìte dalla nefelite.

Che nei cristalli studiati si abbia a che fare con vere e proprie pseudomorfosi di leucite su nefelina, e non con incrostazioni di leucite di nuova formazione su nefelina preesistente, risulta in modo evidente, qualora si esaminino delle sezioni, le quali permettono di scorgere chiaramente che fra leucite e nefelina non vi è un limite regolare, corrispondente alla forma primitiva della nefelina, ma che, al contrario, il limite fra i due minerali è irregolarissimo, ed indubbia appare la formazione della leucite a spese della nefelina.

Almeno per quanto mi risulta dalla letteratura che ho potuto consultare, pseudomorfosi di leucite su nefelina non mi sembra che sieno state finora descritte. Come è noto, la nefe-

lina è soggetta a molteplici alterazioni, fra le quali le più frequenti sono quelle in zeoliti (natrolite e idronefelite, mescolate a piccole quantità di thomsonite, di diasporo e di idrargillite, come pure in analcime) ed in sodalite. Anche comuni sono le trasformazioni in cancrinite ed in muscovite, limitata quest'ultima, però, ad alcuni particolari tipi di roccie. Recentemente, io ho descritto (1) delle pseudomorfosi di davyna su nefelite, del Monte Somma (2).

La leucite pseudomorfa di nefelina di Parco Chigi presenta un notevole interesse, perchè costituisce la trasformazione inversa di quella della leucite in nefelina e sanidino, che, osservata per la prima volta al M. Somma, è stata, poi, riconosciuta nella " pseudoleucite „ di alcune roccie profonde e filoniane. La trasformazione della nefelina in leucite costituisce anche l'inversa del passaggio da leucite a caliofilite, da me constatato con certezza al Monte Somma (3). Come ho mostrato nei lavori ricordati, quest'ultimo passaggio è assai semplice, potendosi rappresentare con l'equazione:

$$\underset{\text{leucite}}{K\,Al\,Si_2\,O_6} = \underset{\text{caliofilite}}{K\,Al\,Si\,O_4} + Si\,O_2 .$$

(1) *Appendice alla Mineralogia vesuviana*, Napoli, 1912, pag. 39.

(2) St. J. Thugutt (*Ueber den Zeagonit, als neues Zersetzungsproduct des Nephelins*, " Neues Jahrb. für Min. Geol. u. s. w. „, 1900, II, 65) ha riferito alla *zeagonite* il prodotto principale di alterazione della nefelina della nefelinite del monte Löbau, in Sassonia. È da notare, però, che, come io ho mostrato, la *zeagonite* delle leucititi romane, alla quale Thugutt compara il prodotto di alterazione della nefelina da lui analizzato, non è altro che phillipsite (vedasi F. Zambonini, *Kurzer Beitrag zur chemischen Kenntniss einiger Zeolithe der Umgegend Roms*, " Neues Jahrb. für Min. Geol. u. s. w. „, 1902, II, 63). Che, però, la sostanza analizzata da Thugutt debba proprio identificarsi con la phillipsite delle leucititi romane analizzata da Kobell, da Marignac e da me non può ritenersi certo, data la mancanza di dati ottici caratteristici ed il fatto che la composizione della " zeagonite „ del Löbau fu stabilita dal Thugutt ammettendo la presenza di varie altre sostanze (diasporo, limonite, nefelina), e calcolandone le rispettive quantità in modo non troppo sicuro.

(3) *Mineralogia vesuviana*, Napoli, 1910, pag. 134. *Appendice alla Mineralogia vesuviana*, pag. 22 e seg.

Il biossido di silicio dà, poi, col calcio ed il magnesio dei blocchi calcarei nei quali si rinviene la leucite trasformata in caliofilite, origine a dei cristallini di pirosseno, che si rinvengono, infatti, tra gli aghetti della caliofilite.

Molto più complessa, certamente, è la formazione di leucite $KAlSi_2O_6$ (e di sanidino, molto subordinato, del resto $(K,Na)AlSi_3O_8$) a spese della nefelina $(Na,K,\frac{1}{2}Ca)AlSiO_4$ oltre ad un lieve eccesso di silice. G. Strüver, lo scopritore delle pseudomorfosi di sodalite su nefelina, ammise che la trasformazione avvenisse per l'azione di soluzioni calde di cloruro di sodio, e Lemberg, con le sue esperienze, potè verificare sperimentalmente la supposizione dello Strüver. A me sembra che le pseudomorfosi descritte di leucite su nefelina possano ritenersi originate per azione di soluzioni contenenti silicato potassico sulla nefelina, a temperatura, s'intende, abbastanza elevata.

Torino, Istituto di Mineralogia della R. Università.

L'Accademico Segretario
Carlo Fabrizio Parona

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona. Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di **C. Frati, A. Baudi di Vesme** e **C. Cipolla.**

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in–f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di **C. Cipolla, G. De Sanctis** e **P. Fedele.**

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in–4°, di 70 pagg. e 96 tav.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza del 10 Marzo 1918 . *Pag.* 235

Guareschi (I.). — I leucoderivati solfitici del triaminotrifenilmetano quali reattivi dell'alcalinità e della dissociazione dei sali (Comunicazione I) . . . . „ 237

Frisone (Rosetta). — Le varie definizioni di prodotto . . „ 246

Lagneau. — Logique des propositions . . . . . . „ 254

Zambonini (Ferruccio). — Leucite pseudomorfa di nefelite di Parco Chigi, presso Ariccia, nei Monti Albani . . . . . „ 271

Tip. Vincenzo Bona — Torino

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. LIII. Disp. 10a. 1917-1918.

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 3.
1918

CLASSI UNITE

Adunanza del 17 Marzo 1918

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE GIAMPIETRO CHIRONI
VICEPRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti,

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, i Soci D'Ovidio, Direttore della Classe, Naccari, Segre, Peano, Foà, Guidi, Parona, Grassi, Somigliana e Fusari;

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche, i Soci Pizzi, De Sanctis, Einaudi, Baudi di Vesme, Schiaparelli, Patetta, Vidari, Prato, Cian, Pacchioni, Valmaggi, e Stampini che funge da Segretario.

È scusata l'assenza dei Soci S. E. Boselli, Jadanza, Ruffini, Brondi e Sforza.

Si legge e si approva l'atto verbale della precedente adunanza delle Classi riunite del giorno 3 febbraio u. s.

Il Vicepresidente Chironi, con parole di vivo compianto, comunica all'Accademia la morte del Socio Senatore Antonio Manno, ricordandone brevemente le insigni benemerenze scientifiche, le quali saranno oggetto di speciale commemorazione da parte di un Socio della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche. Poscia il Vicepresidente invita il Socio Segretario della Commissione per il XX Premio Bressa a leggere la Relazione, già distribuita a stampa a tutti i Soci nazionali residenti e non residenti dell'Accademia, sulle opere presentate o proposte

per il detto Premio. Letta la Relazione dal Socio De Sanctis, il Vicepresidente apre la discussione sulle proposte della Commissione. Nessuno chiedendo di parlare, il Vicepresidente invita l'Accademia a stabilire il giorno in cui si dovrà procedere alla votazione per il conferimento del detto Premio, avvertendo che parecchi Soci non potrebbero assistere all'adunanza che avesse luogo il giorno 24 corrente. Si stabilisce che l'adunanza per la votazione abbia luogo domenica, 7 aprile, alle ore 10.

In fine il Vicepresidente invita l'Accademia a nominare una Commissione di tre Soci appartenenti alla Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali la quale riferisca sui lavori presentati dal Signor Ettore Parigi, aspirante al Premio stabilito dalla Istituzione del Senatore Giovanni Morelli in Bergamo.

Prendono parte alla votazione 22 Soci, e il risultato della votazione è il seguente:

Fusari . . .	voti	22
Foà	„	21
Naccari . . .	„	20
Parona . . .	„	2

La Commissione pertanto riesce costituita dei Soci Fusari, Foà e Naccari.

Gli Accademici Segretari
Carlo Fabrizio Parona
Ettore Stampini

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 24 Marzo 1918

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE ENRICO D'OVIDIO
DIRETTORE DELLA CLASSE

Sono presenti i Soci Salvadori, Peano, Jadanza, Guareschi, Guidi, Mattirolo, Grassi, Somigliana, Fusari, Panetti e Naccari ff. di Segretario.

Scusa l'assenza il Socio Segretario Parona assente da Torino per dovere d'ufficio.

Si legge e si approva l'atto verbale della precedente adunanza.

Il Segretario dà notizia che i Soci corrispondenti recentemente nominati: Albenga, Albertoni, Artini, Berzolari, Brugnatelli, Colonnetti, Corbino, Dal Piaz, De Stefani, De Toni, Grassi, Lombardi, Maggi, Marconi, Nasini, Palazzo, Pincherle, Ricci-Curbastro, Rosa, Vialleton, hanno inviato lettere di ringraziamento.

Il Socio corrispondente Prof. Federico Enriques inviò in omaggio il 2° volume della sua opera *Teoria geometrica delle equazioni*, scritta in collaborazione col Prof. Chisini.

Il Socio corrispondente Prof. Alfonso Bovero inviò in omaggio un suo scritto intitolato: *Per uno scomparso di ieri, Lorenzo Camerano.*

Il Socio Guareschi presenta in dono all'Accademia una sua memoria stampata, che ha per titolo: *Sulla più razionale utilizzazione dei cereali con esperienze ed osservazioni sulla alimentazione col riso sbramato o naturale e a diversi gradi di depauperamento o brillatura.* Offre inoltre all'Accademia un ritratto dell'illustre fisico O. F. Mossotti, ricordandone i meriti insigni, e quello di D. Guglielmini, del quale il Socio stesso Guareschi studiò la vita e le opere.

Il Socio Mattirolo offre all'Accademia in omaggio uno studio da lui fatto col Dr. Issoglio intorno ad una specie di pane che viene preparato in Oropa con la pasta di frumento e serve a mantenere in quel santuario parecchie centinaia di profughi.

Vengono poi accolte per la pubblicazione negli *Atti* le Note seguenti:

Chiantore Dottoressa Giuseppina, *Ricerche sulla struttura della tasca faringea di " Helobdella stagnalis "*, con una tavola, presentata dal Socio Salvadori;

Rossi Giulio Andrea, *Un trasformatore dinamico per correnti alternate*, Nota quinta, presentata dal Socio Grassi;

Campetti Prof. Adolfo, *Conducibilità ed assorbimento dei vapori di sodio*, parte I, presentata dal Socio Naccari.

LETTURE

Sulla struttura della tasca faringea di " Helobdella stagnalis „ L.

Nota della Dott.ª GIUSEPPINA CHIANTORE

(Con 1 Tavola)

La faringe o tromba dei Rincobdellidi è stata studiata a più riprese da vari autori (Bourne, Graf, Brumpt, Brandès, Scriban, ecc.) e la sua struttura istologica può dirsi ormai sufficientemente nota.

Sono invece assai scarsi i dati sulla struttura della guaina o tasca in cui la tromba si muove.

Essa venne ripresa in esame alcuni anni or sono da Scriban (1), il quale, correggendo le vecchie indicazioni date da Hoffmann (2), ne diede una sommaria descrizione, che riferisco qui appresso integralmente (pag. 408):

" En ce qui concerne la structure de la gaine de la trompe, " Hofmann dit aussi que même avec les plus forts grossisse- " ments on n'aperçoit pas d'épithélium sous la cuticule, de sorte " que celle-ci est placée directement sur la couche de tissu con- " jonctif, qui lie les fibres musculaires de la gaine.

" Antérieurement, en décrivant l'insertion des fibres mu- " sculaires sur la cuticule, j'ai parlé aussi de la disposition de " l'épithélium externe et interne de la trompe. La gaine con-

(1) Scriban J. A., 1907: *Notes histologiques sur les Hirudinées*, in " Archives de Zool. expér. et gén. „ (4), 7, p. 397-421.

(2) Hoffmann C. K., 1880: *Untersuchungen über der Bau und die Entwicklungsgeschichte der Hirudineen*, in " Naturk. Verband d. Holl. Mack. Wetens „, 3te Verg. Deel. IV-I. St. Harlem.

" siste en un épithélium simple formé de petites cellules apla-
" ties. Ces cellules sécrètent la cuticule de la gaine de la
" trompe. Cette gaine possède sa propre musculature repré-
" sentée par une série de fibres musculaires longitudinales in-
" timément soudées à la face profonde des cellules épithéliales.
" Quand ces fibres musculaires se contractent, l'épithélium qui
" constitue la gaine et sa cuticule forme des plis circulaires.
" Sur une coupe longitudinale dans la trompe ces plis circu-
" laires sont coupées transversalement, chaque pli ayant deux
" cellules épitéliales „.

Due figure del lavoro di Scriban illustrano la struttura della tasca faringea o guaina della tromba, e cioè la fig. 4 a pag. 406 e la fig. 5 a pag. 408. La prima riproduce una sezione trasversa, la seconda una sezione longitudinale.

Disponendo di alcuni preparati in serie di *Helobdella stagnalis* L., me ne sono valsa per approfondire lo studio della struttura della tasca faringea a complemento dei dati forniti da Scriban.

Scopo di questa Nota è appunto l'esposizione delle mie osservazioni.

Gli esemplari presi in esame erano stati fissati con diversi fissatori: sublimato bollente, sublimato nitrico acetico (Gilson, Carazzi), formolpicroacetico (Bouin), bicromato potassico e acido acetico (Tellyesniczky). Le sezioni spesse 5 o 10 μ. vennero colorate con ematossilina Heidenhain, o emallume Mayer e con coloranti plasmatici di contrasto (eosina, fucsina acida, orange g, scarlatto Biebrich, rosso Bordeaux).

Dalla sommaria descrizione di Scriban e dalle due figure che l'accompagnano risulta che la guaina della tromba di *Helobdella stagnalis* è costituita da cellule epiteliali e da fibre muscolari longitudinali. Questi due tipi di cellule prevalgono senza dubbio in modo assoluto: ho tuttavia potuto riconoscere anche la presenza di una tenue lamina connettiva che avvolge la guaina della tromba. In essa si distinguono bene i nuclei proprî delle cellule connettive, di forma sempre lenticolare (fig. 1 *n. c.*), e delle robuste fibre muscolari oltre a vasi sanguigni. Detta lamina è rappresentata nella fig. 4 di Scriban, con nuclei e fibre muscolari (*m.*), ma di essa non è fatto cenno nella descrizione. Le fibre muscolari tenute assieme dalla lamina connet-

tiva sono distintamente più robuste (fig. 1 *m. pr.*) di quelle contigue (*m. l.*) all'epitelio della tasca della tromba; ma queste ultime sono assai più numerose delle prime: ne contai invero 27 in una sezione trasversa della guaina.

Le fibre muscolari situate nella lamina connettiva hanno il valore di muscoli *retrattori* o *protrattori* della guaina della tromba. I primi sono in numero di quattro, due latero-dorsali e due latero-ventrali (fig. 2 *m. pr.*); si trovano in corrispondenza della porzione più profonda della guaina della tromba e si prolungano all'indietro per inserirsi alla parete dell'esofago. I protrattori sono situati a fianco della porzione della guaina della tromba più prossima all'apertura esterna: sono formati da più di quattro fibre, ma non potei precisare con esattezza il numero.

Alle cellule epiteliali ho particolarmente rivolto la mia attenzione.

I muscoli longitudinali proprî della tasca faringea esercitano predominante influenza sull'aspetto della superficie libera dell'epitelio della tasca stessa. Infatti alla loro contrazione segue un raggrinzimento dell'epitelio, con grinze disposte a mo' di anelli attorno alla tromba. Sono queste appunto i *plis circulaires* ricordati da Scriban (1) e che si potrebbero da noi chiamare *pliche anellari*.

Queste pliche sono riprodotte nella fig. 3 in sezione longitudinale, nella fig. 4 viste di prospetto.

Dall'esame di queste due figure risulta abbastanza palese la disposizione reciproca delle cellule epiteliali nelle pliche anellari. Le singole cellule comprimendosi vicendevolmente assumono la forma su per giù di un fuso con un largo piede di attacco corrispondente ad un fianco del fuso: al piede d'attacco il citoplasma è differenziato in una sottilissima lamina basale.

Se i muscoli longitudinali sono contratti, il diametro trasverso di queste cellule (15-25 μ.) supera di molto il diametro antero-posteriore (2-5 μ.).

L'altezza delle cellule è di circa 16 μ., ma essa non è uniforme, in quanto che accompagna le sporgenze o le rientranze delle pliche. La sezione di una plica lascia scorgere sovente i

---

(1) Loc. cit., pag. 408, fig. 5.

contorni " di due cellule epiteliali „ dice Scriban; ma ciò non è affatto costante.

Nelle sezioni da me esaminate posso dire che frequentissima era la presenza di tre cellule nella sezione di una plica, come risulta dalla fig. 3.

La fissazione con formol-picro-acetico (Bouin) e più ancora quella con bicromato potassico acetico (Tellyesniczky) mettono bene in evidenza i limiti fra le cellule epiteliari.

La forma di nuclei delle cellule epiteliari è in generale tondeggiante, ma non isodiametrica (potendo il diametro variare da 5 a 8 μ.); ciò va ascritto alla compressione reciproca delle cellule epiteliari in seguito al raggrinzimento dell'epitelio. La cromatina è scarsa e distribuita in piccoli granuli più addossati alla membrana e collegati da un reticolo poco distinto. Ogni nucleo possiede un nucleolo parzialmente acidofilo, di forma ovoide, spesso poco più di 1 μ. (fig. 5 *a* e *b*). Il protoplasma delle cellule è un po' più addensato in un sottile strato periferico, ma non mi fu possibile riconoscere una cuticola così spessa e ben delimitata come è rappresentata nella fig. 5 di Scriban.

Degna di nota è la disposizione alquanto regolare che possono assumere i nuclei delle cellule epiteliali negli intervalli compresi fra le fibre muscolari.

La fig. 6 mostra appunto tale disposizione in serie longitudinali (*ep*) parallele alle fibre muscolari, mentre le fig. 1 e 7 provano pure come i nuclei si addentrino negl'intervalli fra le fibre muscolari. Ogni nucleo è accompagnato da una parte del citoplasma: la parte rimanente sporge verso il lume della tasca della tromba, espandendosi più in senso trasverso che in senso longitudinale (v. sopra). Un tale ordinamento dei nuclei si ritrova nei tratti della tasca ove l'epitelio non è raggrinzato, o lo è in scarsa misura.

Dalla fig. 3 appare invece manifesto che i nuclei epiteliali possono spingersi verso la superficie libera delle cellule quando l'epitelio è raggrinzato a formare le pliche anellari. La fig. 5 di Scriban riproduce una condizione analoga e rappresenta pure i nuclei dell'epitelio compresi in uno stesso piano radiale con una fibra muscolare longitudinale, mentre la fig. 4 di Scriban e al pari le mie figg. 1-6-7 dimostrano una posizione dei nuclei epiteliali e delle fibre muscolari *in piani radiali alterni.*

Siccome la presenza delle pliche anellari è in relazione collo stato di contrazione delle fibre muscolari longitudinali della tasca della faringe, così si può concludere che *dalla contrazione o dall'espansione di dette fibre dipende pure l'ordinamento che possono assumere i nuclei delle cellule epiteliali.*

Le fibre muscolari longitudinali della tasca della tromba corrispondono in prevalenza al tipo *assiale* o *Hirudineentypus*, tuttavia non manca fra esse il tipo *laterale* o *Nematodentypus* (1), come già ebbe a notare Des Arts (2).

Le figg. 8 e 9 riproducono rispettivamente tratti di fibre del primo e del secondo tipo. Nel primo tipo il nucleo, per la sua speciale posizione rispetto alle fibrille che lo attorniano, assume forma allungata; nel secondo tipo assume forma tondeggiante. Tuttavia non credo debba realmente parlarsi di due diversi tipi di fibre, ma piuttosto di possibile deformazione della fibra a tipo assiale nella fase di espansione.

Il lobo citoplasmatico contenente il nucleo può spingersi nell'intervallo fra due fibre (fig. 1 *l*), come pure sollevarsi in direzione opposta al lume della tasca della tromba.

Il nucleo delle fibre misura 8-13 μ. in diametro, la sua cromatina è raccolta in grani; non è riconoscibile un nucleolo.

Torino, marzo 1918.

---

(1) Cfr. Prenant A., Bouin P. e Maillard L., 1904: *Traité de histologie*, t. I, pag. 446 e 447; e Schneider K. C., 1908: *Histologisches Praktikum der Tiere*, pag. 58.

(2) Des Arts L., 1909: *Ueber die Musculatur der Hirudineen*, in “ Jena Zeit. Naturw. „, 44, pag. 415-466, tav. 21-23.

Spiegazione della tavola: *Helobdella stagnalis* L.

Le figure vennero disegnate coll'aiuto della camera lucida Nachet e dell'obbiettivo a immersione omogenea 2 mm. Zeiss, ad eccezione della fig. 8, per la quale mi valsi di un obbiettivo a secco Koristka.

Abbreviazioni.

c. g. v. = catena gangliare ventrale.
ep. = cellula epiteliale.
l. = lobo di citoplasma.
m. l. = muscolo longitudinale.
m. pr. = muscolo protrattore.
n. c. = nucleo di cellula connettiva.

Spiegazione delle figure.

Fig. 1 — Sezione trasversa della parete della tasca faringea × 900.
„ 2 — Sezione della lamina connettiva che avvolge la tasca faringea × 140.
„ 3 — Sezione longitudinale dell'epitelio della tasca faringea × 900.
„ 4 *a* e *b* — Pliche anellari dell'epitelio della tasca faringea viste superficialmente × 900.
„ 5 *a* e *b* — Due nuclei di cellule epiteliali della tasca faringea × 3000.
„ 6 — Sezione tangenziale della tasca faringea per mostrare l'allineamento dei nuclei delle cellule epiteliali × 900.
„ 7 — Sezione trasversa della parete della tasca faringea × 900.
„ 8 — Porzione di fibra muscolare longitudinale della tasca faringea di tipo assiale × 1600.
„ 9 — Id. id. di tipo laterale × 1600.

Un trasformatore dinamico per correnti alternate

Nota V di A. G. ROSSI (*)

---

3. Digressione. — In pratica, non conviene far funzionare *in parallelo due (o più) trasformatori statici* se non abbiano uno stesso rapporto di trasformazione delle tensioni; ed è anche desiderabile che abbiano uguali impedenze, o almeno uguali rapporti della reattanza alla resistenza (uguali *costanti di tempo*),

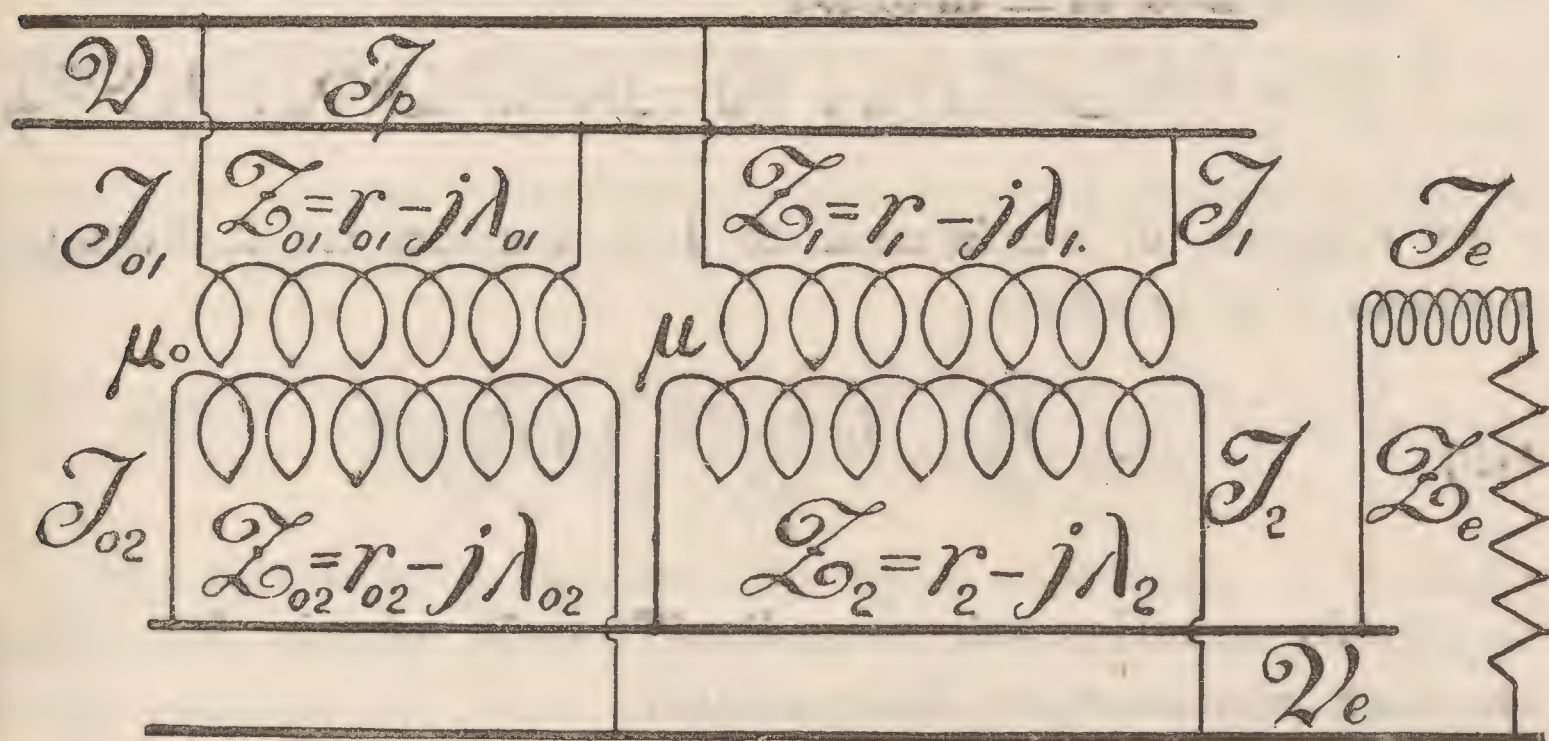



Fig. 3.

negli avvolgimenti corrispondenti. Altrimenti, come mostra la trattazione del caso generale, gli effetti si sommano in modo complicato, rendendo il funzionamento in realtà impraticabile.

(*) Sèguito della Nota IV: " Atti della R. Accad. d. Scienze ", vol. LIII, 1917-18.

Secondo lo schema e i dati della fig. 3, le equazioni del sistema sono difatti:

$$\mathcal{V} = \mathcal{I}_{01}\mathcal{Z}_{01} - j\mu_0\mathcal{I}_{02} = \mathcal{I}_1\mathcal{Z}_1 - j\mu\mathcal{I}_2,$$

$$j\mu_0\mathcal{I}_{01} - \mathcal{I}_{02}\mathcal{Z}_{02} = j\mu\mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_2\mathcal{Z}_2 = \mathcal{V}_e,$$

$$\mathcal{I}_p = \mathcal{I}_{01} + \mathcal{I}_1, \qquad \mathcal{I}_e = \mathcal{I}_{02} + \mathcal{I}_2, \qquad \mathcal{V}_e = \mathcal{I}_e\mathcal{Z}_e.$$

Isolando le quattro correnti e sostituendo le ammettenze apparenti $\mathcal{Y}_i'$, date dalle relazioni, analoghe alle (6), (7),

$$\mathcal{Y}_{01}/\mathcal{Y}_{01}' = \mathcal{Y}_{02}/\mathcal{Y}_{02}' = 1 + \mu_0^2\mathcal{Y}_{01}\mathcal{Y}_{02},$$

$$\mathcal{Y}_1/\mathcal{Y}_1' = \mathcal{Y}_2/\mathcal{Y}_2' = 1 + \mu^2\mathcal{Y}_1\mathcal{Y}_2,$$

si ottengono le espressioni simboliche delle correnti:

$$(18)\quad \begin{cases} \mathcal{I}_{01} = \mathcal{V}\mathcal{Y}_{01}'(1 - j\mu_0\mathcal{Y}_{02}\mathcal{P}) \\ \mathcal{I}_{02} = \mathcal{V}\mathcal{Y}_{02}'[j\mu_0\mathcal{Y}_{01}(\mathcal{Y}_2' + \mathcal{Y}_e) - j\mu\mathcal{Y}_1\mathcal{Y}_2']/(\mathcal{Y}_{02}' + \mathcal{Y}_2' + \mathcal{Y}_e) \\ \mathcal{I}_1 = \mathcal{V}\mathcal{Y}_1'(1 - j\mu\mathcal{Y}_2\mathcal{P}) \\ \mathcal{I}_2 = \mathcal{V}\mathcal{Y}_2'[j\mu\mathcal{Y}_1(\mathcal{Y}_{02}' + \mathcal{Y}_e) - j\mu_0\mathcal{Y}_{01}\mathcal{Y}_{02}']/(\mathcal{Y}_{02}' + \mathcal{Y}_2' + \mathcal{Y}_e), \end{cases}$$

e del rapporto di trasformazione delle tensioni tra la linea secondaria e la primaria:

$$(19)\qquad \mathcal{P} = \frac{\mathcal{V}_e}{\mathcal{V}} = \frac{j\mu\mathcal{Y}_{01}\mathcal{Y}_{02}' + j\mu\mathcal{Y}_1\mathcal{Y}_2'}{\mathcal{Y}_{02}' + \mathcal{Y}_2' + \mathcal{Y}_e}.$$

Anche a carico esterno nullo ($\mathcal{Y}_e = 0$), circola fra i due secondari una corrente differenziale:

$$(20)\qquad \mathcal{I}_{02} - \mathcal{I}_2 = \mathcal{V}(j\mu_0\mathcal{Y}_{01} - j\mu\mathcal{Y}_1)\,2\mathcal{Y}_{02}'\mathcal{Y}_2'/(\mathcal{Y}_{02}' + \mathcal{Y}_2'),$$

non nulla se non sieno: uguali i rapporti di trasformazione delle tensioni nei due singoli apparecchi, $\rho_0 = \mu_0 y_{01}$, $\rho = \mu y_1$, e uguali le costanti di tempo primarie, $b_{01}/g_{01} = b_1/g_1$:

$$(20')\qquad I_{02} - I_2 = 2V\sqrt{\frac{\rho_0^2 + \rho^2 - 2\rho_0\rho\cos(\alpha_{01} - \alpha_1)}{z_{02}'^2 + z_2'^2 + 2z_{02}'z_2'\cos(\alpha_{02}' - \alpha_2')}}.$$

Per dati rapporti di trasformazione, $\rho_0 \gtreqless \rho$, questa corrente di compensazione è minima quando le costanti di tempo apparenti dei due secondari sieno uguali ($\alpha'_{02} = \alpha'_2$). Ovviamente, si suppone di aver collegato in parallelo i secondari con polarità istantanee concordanti, altrimenti il denominatore della (20′) diverrebbe ($z'_{02} - z'_2$) e la corrente differenziale potrebbe raggiungere valori disastrosi.

La differenza di fase delle due correnti secondarie è zero per $g_e + jb_e = 0$, cioè le correnti sono in opposizione fra loro.

Ciò accade altresì, con carico secondario non nullo, allorchè sieno soddisfatte le tre condizioni:

$$(21) \qquad \rho_0^2/\rho^2 = \lambda'_{02}/\lambda'_2 = r'_{02}/r'_2, \qquad \lambda'_{02}/r'_{02} = \lambda'_2/r'_2 = \lambda_e/r_e.$$

Fra le due linee, si realizza il rapporto di trasformazione:

$$(19') \qquad P_V = \frac{V_e}{V} = \sqrt{\frac{\rho_0^2 y_{02}'^2 + \rho^2 y_2'^2 + 2\rho_0 y_{02}' \rho y_2' \cos(\varphi_2 - \varphi_{02})}{(g_{02}' + g_2' + g_e)^2 + (b_{02}' + b_2' + b_e)^2}},$$

il quale, per dati $\rho_0 \gtreqless \rho$, è il più grande quando sia $\cos(\varphi_2 - \varphi_{02}) = 1$. Gli angoli $\varphi_2 = \alpha'_1 + \alpha_2 + \pi/2$ e $\varphi_{02} = \alpha'_{01} + \alpha_{02} + \pi/2$ sono *i ritardi che, nei funzionamenti singoli di corto circuito, le correnti secondarie posseggono sulla tensione primaria applicata;* dati da:

$$(22) \quad \operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{\lambda_1\lambda_2 - r_1 r_2 - \rho^2 z_2^2}{\lambda_1 r_2 + \lambda_2 r_1} = \frac{\lambda_1 \operatorname{sen}\alpha_2 - r_1\cos\alpha_2 - \rho^2 z_2}{r_1 \operatorname{sen}\alpha_2 + \lambda_2\cos\alpha_3}; \quad \operatorname{tg}\varphi_{02} = \ldots$$

Ponendo ora: $\operatorname{tg}\varphi_2 = \omega L/R$, $\operatorname{tg}\varphi_{02} = \omega L_0/R_0$, si possono considerare le (22) come i prodotti di $\omega = 2\pi f$ per caratteristiche *constanti di tempo globali*, ciascuna delle quali definisce, per una data frequenza, il ritardo della corrente (secondaria di c. c.) sulla tensione applicata (primaria). Allora si può dire che, per dati $\rho_0 \gtreqless \rho$, *il rapporto di trasformazione delle tensioni* (19′) *è il più grande allorchè i due trasformatori accoppiati abbiano una stessa costante di tempo globale:* $L/R = L_0/R_0$.

Ciò, in particolare, si verifica altresì se sieno separatamente uguali le costanti di tempo degli avvolgimenti corrispondenti.

Finalmente, ridotte le correnti alla forma $\mathcal{I} = \mathcal{V}(\Gamma + jB)$ e confrontando le due espressioni di $\mathcal{I}_e = \mathcal{V}_e(g_e + jb_e) =$

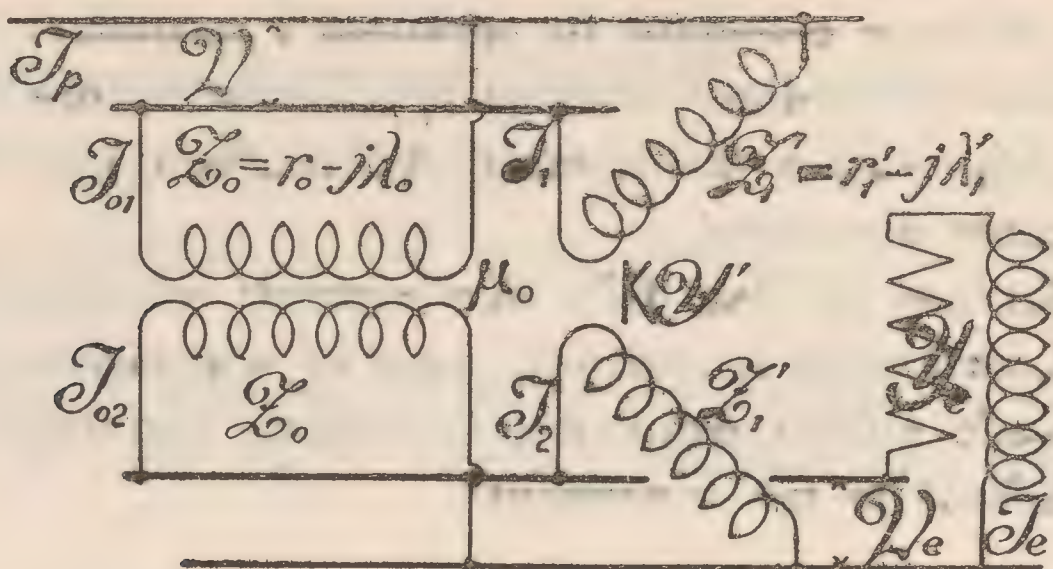



Fig. 4.

$\mathcal{V}_e[\Gamma_{02} + \Gamma_2 + j(B_{02} + B_2)]$ in funzione di φ_{02} e φ_2, se ne conclude: 1° che la corrente di carico si suddividerebbe fra i due secondari semplicemente in ragione delle rispettive ammettenze, se fosse $\rho_0 = \rho$, o se almeno sussistessero le prime due condizioni (21); 2° che il trasformatore avente una maggiore costante di tempo globale assume una componente reattiva della corrente di carico $\mathcal{I}_e$, mentre l'altro trasformatore assume una corrispondente componente attiva; 3° che gli angoli di queste componenti rispetto alla corrente di carico sono proporzionati con le ammettenze.

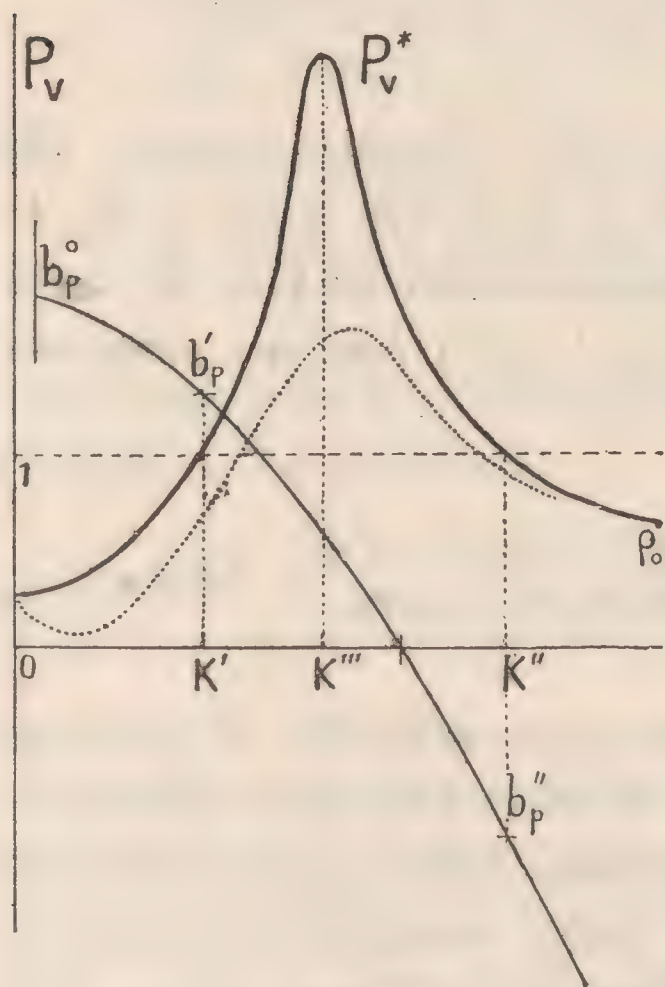



Fig. 2.

4. — Torniamo a considerare un **T. S. in parallelo con un T. D.**, nelle condizioni di simmetria supposte al § 2: $\mathcal{Z}_{02} = \mathcal{Z}_{01} = \mathcal{Z}_0$; $\mathcal{Z}'_2 = \mathcal{Z}'_1$; e con le stesse notazioni colà adoperate (fig. 4).

La costante di tempo globale per il primo (poichè $\varphi_{02} = \alpha'_0 + \pi/2 + \alpha_0$) è data da:

$$(23) \qquad \operatorname{tg} \varphi_{02} = \frac{\omega L_0}{R_0} = \frac{\lambda_0^2 - r_0^2 - \mu_0^2}{2\lambda_0 r_0} = -\frac{G_0^2}{B_0^2} = \frac{\cos 2\alpha_0 + \rho_0^2}{-\operatorname{sen} 2\alpha_0}.$$

Per il secondo, la " costante „ di tempo globale è propriamente una funzione della velocità del rotore, avendosi: $\varphi_2 = \varphi_1 + \alpha' + \pi/2 + \alpha'_1$; e quindi:

$$(24) \qquad \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{\omega L}{R} = \frac{\lambda' 2\lambda_1' r_1' - r'(r_1'^2 - \lambda_1'^2) - r' K^2 y'^2}{r' 2\lambda_1' r_1' + \lambda'(r_1'^2 - \lambda_1'^2) - \lambda' K^2 y'^2} =$$
$$= \frac{P^2 \cos \alpha' + \cos(2\alpha_1' + \alpha')}{P^2 \operatorname{sen} \alpha' - \operatorname{sen}(2\alpha_1' + \alpha')}.$$

L'angolo φ_2 va decrescendo, col crescere della velocità, dal valore iniziale $2\alpha'_1 + \alpha' + \pi/2$, fino a cambiar di segno; come mostrano le seguenti espressioni:

$$(24') \quad \varphi_2 = \alpha'_1 + \operatorname{arc\,tg} \frac{1+P^2}{1-P^2} \operatorname{tg}(\alpha'_1 + \alpha' + \pi/2), \text{ ove } \alpha'_1 + \alpha' + \pi/2 = \widehat{E_2 V};$$
$$= 2\alpha'_1 + \alpha' + \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} \frac{P^2 \operatorname{sen} 2(\alpha_1' + \alpha')}{1 + P^2 \cos 2(\alpha_1' + \alpha')}.$$

Per una determinata velocità, l'angolo φ_2 può divenire uguale all'angolo φ_{02} e allora $L/R = L_0/R_0$: a tale velocità corrisponde precisamente il massimo della curva punteggiata in fig. 2, che rappresenta l'andamento generale del rapporto di trasformazione P_V delle tensioni, (12). La scomparsa del minimo iniziale di questa curva, a vantaggio del massimo (curva $P_V{}^*$), è subordinata alle condizioni $(12^*)_{1,2}$, che facilmente si riscontrano confrontando le (23) e (24) con le espressioni dei coefficienti α, γ nella (12).

La condizione (5'), $r' r'_1 - \lambda' \lambda'_1 = 0$, che riguarda il solo T. D., riduce φ_2 ad essere indipendente dalla velocità, $\varphi_2 \equiv \varphi_1 \equiv \alpha'_1$, e porta la forza elettromotrice indotta secondaria E_2 in fase con la tensione primaria: $\widehat{E_2 V} = \alpha'_1 + \alpha' + \pi/2 = 2\pi$ (cfr. (24')). Questa condizione costruttiva per il T. D. si traduce nella forma già notata:

$$(5') \qquad \frac{\lambda\lambda_1 - r r_1 - \mu^2}{r\lambda_1 + r_1\lambda} = \frac{\mu r}{\mu\lambda - z^2}.$$

Nel primo membro v'ha la *costante di tempo globale* di ciascuno dei trasformatori statici (I, Δ), (Δ, II) che compongono il T. D., $[\omega L_\Delta / R_\Delta = \mathrm{tg}\,\psi = \mathrm{tg}\,(\alpha'_1 + \pi/2 + \alpha)]$, corrispondente cioè al ritardo, sulla tensione applicata, delle correnti indotte staticamente dagli statori sul rotore:

$$\mathcal{I}' = j\mu \mathcal{I}_1 (g + jb) = j\mu \mathcal{V}_1 (g + jb)(g'_1 + jb'_1); \quad \mathcal{I}'' = \ldots$$

Il secondo membro vale la tang. del ritardo, con segno cambiato, della forza elettromotrice indotta dinamicamente sul rotore rispetto alla corrente induttrice di statore:

$$\mathcal{E}'_2 = \kappa u \mathcal{I}_2 (1 - \mu b + j\mu g); \quad \mathcal{E}'_1 = \ldots$$

Risultano così le correnti di rotore, fronteggianti rispettivamente lo statore primario e il secondario:

$$\mathcal{I}_{R_1} = \mathcal{I}' + \mathcal{I}'_2 = j\mu \mathcal{I}_1 (g + jb) + \kappa u \mathcal{I}_2 (g + jb)(1 - \mu b + j\mu g)$$
$$\mathcal{I}_{R_2} = \mathcal{I}'' + \mathcal{I}'_1 = j\mu \mathcal{I}_2 (g + jb) + \kappa u \mathcal{I}_1 (g + jb)(1 - \mu b + j\mu g).$$

Si può dire quindi che in ciascuno dei trasformatori elementari componenti (I, Δ), (Δ, II) coesistano due trasformatori associati in parallelo, l'uno statico, l'altro dinamico, che forniscono come correnti secondarie le correnti di rotore $\mathcal{I}' + \mathcal{I}'_2$ $\mathcal{I}'' + \mathcal{I}'_1$: il ritardo globale nei trasformatori statici è $\psi = \alpha'_1 + \pi/2 + \alpha$; il ritardo nei trasformatori dinamici è $\mathrm{arc\,tg}\,\mu g/(1 - \mu b)$. Se consideriamo questo rapporto come proporzionale alla costante di tempo globale del trasformatore dinamico elementare, possiamo compendiare il significato della condizione (5′) dicendo che: *i due trasformatori elementari statico e dinamico coesistenti nel sistema statore-disco debbano avere una stessa costante di tempo globale.* Se ne può concludere, giusta la deduzione generale fatta dianzi sulla (19′), che la (5′) porterà al più grande valore il *rapporto di trasformazione delle tensioni* nel T. D.:

$$\mathsf{P} = \frac{E_2}{V} = K y' y'_1 = \frac{\kappa \mu u}{z^2} \sqrt{\frac{\mu^2 r^2 + (z^2 - \mu\lambda)^2}{(r\lambda_1 + r_1\lambda)^2 + (\lambda\lambda_1 - r r_1 - \mu^2)^2}}.$$

E difatti, poichè la (5′) conduce in fase E_2 e V, cioè annulla l'*argomento* della $\mathcal{E}_2 / \mathcal{V} = jK\mathcal{Y}'\mathcal{Y}'_1$, essa ne rende massimo il *modulo* P.

5. — Il massimo (14) della curva P_r^*, rapporto di trasformazione delle tensioni a vuoto fra due linee comprendenti il T. S. e il T. D. in parallelo, non è molto grande se δ^2 non sia molto piccolo, tuttavia permanendo >0 come vuole la $(12^*)_1$.

Orbene, partendo di nuovo dalla equazione generale (11), supponiamo $\delta^2 = 0$, ossia che *gli avvolgimenti dei due apparecchi abbiano una stessa costante di tempo:* $b_1'/g_1' = b_0'/g_0'$. Allora il rapporto $\mathcal{Y}_0'/\mathcal{Y}_1'$ non è più complesso:

$$\frac{g_0' + jb_0'}{g_1' + jb_1'} = \frac{g_0'}{g_1'} = \frac{b_0'}{b_1'} = \frac{g_0' g_1' + b_0' b_1'}{g_1'^2 + b_1'^2} = \frac{\sigma^2}{y_1'^2} = \frac{y_0'^2}{\sigma^2};$$

introducendo tale condizione nello sviluppo della (11), si realizza una nuova espressione del rapporto delle tensioni P_r, consistente in una frazione il cui numeratore è funzione sempre crescente della velocità e il cui denominatore raggiunge un minimo, tanto più prossimo a zero quanto più l'angolo $\alpha_1' + \alpha'$ sia prossimo a $3\pi/2$. Cosicchè, con le due condizioni:

$$(25) \qquad b_1'/g_1' = b_0'/g_0' \qquad \text{e } (5') \qquad b_1'/g_1' = g'/b',$$

la funzione P_r raggiungerà un massimo ∞. Si ottiene infatti la espressione:

$$(26) \qquad P_r^{**} = \sqrt{\frac{P^2 g_1'^2 + \rho_0^2 g_0'^2 (1 - P^2)^2 + 2 \rho_0 g_0' g_1' P (1 - P^2) \operatorname{sen} \alpha_0}{(g_1' + g_0'(1 - P^2))^2}},$$

la quale, per P crescente da zero, parte dal valore

$$\rho_0 \frac{g_0'}{g_0' + g_1'} \quad \text{col gradiente iniziale} \quad \frac{g_1' \operatorname{sen} \alpha_0}{g_0' + g_1'} > 0,$$

e passa successivamente per i valori 1, ∞, 1 con $P =$

$$1 < \sqrt{1 + \frac{g_1'}{g_0'}} < \sqrt{\left(1 + \frac{g_1'}{g_0'(1 - \rho_0^2)}\right)^2 - \left(\frac{g_1' \rho_0 \cos \alpha_0}{g_0'(1 - \rho_0^2)}\right)^2} - \frac{g_1' \rho_0 \operatorname{sen} \alpha_0}{g_0'(1 - \rho_0^2)},$$

tendendo infine assintoticamente a ρ_0.

L'espressione simbolica della (26)

$$\frac{\mathcal{V}_e}{\mathcal{V}} = -\frac{\mathsf{P} g_1' + \mu_0 b_0 g_0' (1 - \mathsf{P}^2) - j \mu_0 g_0 g_0' (1 - \mathsf{P}^2)}{g_1' + g_0' (1 - \mathsf{P}^2)}$$

dà il ritardo di V_e su V:

$$(26') \qquad \widehat{V_e V} = \pi - \operatorname{arc\,tg} \frac{\mu_0 g_0 g_0' (1 - \mathsf{P}^2)}{\mathsf{P} g_1' + \mu_0 b_0 g_0' (1 - \mathsf{P}^2)},$$

il quale parte da $\pi/2 + \operatorname{arc\,tg} b_0/g_0$, come se il T. D. non ci fosse, e col crescere della velocità raggiunge, poi supera, π, con $\mathsf{P} \gtreqless 1$. Se non ci fosse invece il T. S. le due tensioni sarebbero ora costantemente in fase, per la (5′).

L'origine del fenomeno risiede propriamente nel sistema primario: la corrente totale primaria, $\mathcal{I}_p = \mathcal{V} \mathcal{Y}_p$, con le condizioni (25) $g_0' \mathcal{Y}_1' = g_1' \mathcal{Y}_0'$, e (5′) $K \mathcal{Y}' \mathcal{Y}_1' = j\mathsf{P}$, assume difatti la forma:

$$(15)^{**} \qquad \mathcal{I}_p = \mathcal{V} \frac{g_0' \mathcal{Y}_0 (1 - \mathsf{P}^2) + g_1' [\mathcal{Y}_1' + 2 \mathcal{Y}_0' (1 + j \mu_0 \mathcal{Y}_0 \mathsf{P})]}{g_1' + g_0' (1 - \mathsf{P}^2)},$$

onde si può intendere che la ammettenza apparente primaria $\mathcal{Y}_p = g_p + j b_p$ divenga infinita per la velocità corrispondente a

$$\mathsf{P}^2 = 1 + \frac{g_1'}{g_0'}.$$

È la conseguenza diretta delle condizioni (5′) e (25).

Quando *il secondario si chiuda su di un'ammettenza esterna* $\mathcal{Y}_e$, i fenomeni sostanzialmente non cambiano; il massimo teorico di P_V vien ricondotto al finito ed ha luogo ad un'altra velocità, funzione anche di g_e, b_e:

$$(27) \quad \frac{\mathcal{V}_e}{\mathcal{V}} = -\frac{\mathcal{Y}_0'}{g_0'} \frac{\mathsf{P} g_1' + \mu_0 b_0 g_0' (1 - \mathsf{P}^2) - j \mu_0 g_0 g_0' (1 - \mathsf{P}^2)}{[g_1' + (g_0' + g_e)(1 - \mathsf{P}^2)] + j [b_1' + (b_0' + b_e)(1 - \mathsf{P}^2)]}.$$

L'espressione dell'ampiezza V_e ha quindi lo stesso numeratore come nella (26), e il denominatore sotto radice diviene:

$$(28) \quad [g_1' + g_0' (1 - \mathsf{P}^2)(1 + g_e r_0' + b_e \lambda_0')]^2 + [g_0' (1 - \mathsf{P}^2)(b_e r_0' - g_e \lambda_0')]^2.$$

Similmente, la corrente primaria

$$(29) \quad \mathcal{I}_p = \\ = \mathcal{V} \frac{\mathcal{Y}_0'}{g_0'} \frac{g_0'(1-\mathrm{P}^2)(\mathcal{Y}_0 + \mathcal{Y}_c) + g_1'[\mathcal{Y}_1' + \mathcal{Y}_e + 2\mathcal{Y}_0'(1 + j\mu_0\mathcal{Y}_0\mathrm{P})]}{\mathcal{Y}_1' + (\mathcal{Y}_0' + \mathcal{Y}_e)(1-\mathrm{P}^2)},$$

ha un'ampiezza I_p con lo stesso denominatore (28), mentre le componenti del numeratore, $(\Gamma^2 + j\mathrm{B}^2)$, sono:

$$(30) \quad \begin{aligned} \Gamma^2 &= g_0'(g_0 + g_e)(1-\mathrm{P}^2) + g_1'(g_1' + 2g_0' + g_e - 2\mu_0 B_0^2 \mathrm{P}), \\ \mathrm{B}^2 &= g_0'(b_0 + b_e)(1-\mathrm{P}^2) + g_1'(b_1' + 2b_0' + b_e - 2\mu_0 G_0^2 \mathrm{P}). \end{aligned}$$

Il denominatore comune (28) raggiunge un *minimo* per la velocità corrispondente a

$$(31) \quad \mathrm{P}^2 - 1 = \frac{g_1'}{g_0'} \frac{1 + g_e r_0' + b_e \lambda_0'}{(1 + g_e r_0' + b_e \lambda_0')^2 + (b_e r_0' - g_e \lambda_0')^2} = \frac{g_1'}{g_0'} \frac{1+s}{(1+s)^2 + d^2}$$

minimo che è nullo se

$$d = b_e r_0' - g_e \lambda_0' = 0, \qquad \text{ossia se} \qquad \lambda_e / r_c = \lambda_0' / r_0'.$$

Se dunque anche il circuito esterno di carico avesse la stessa costante di tempo come gli avvolgimenti dei due apparecchi in parallelo, si riprodurrebbe il massimo a ∞ della corrente primaria e della tensione secondaria, per la velocità corrispondente a

$$(31^*) \qquad \mathrm{P}^2 - 1 = \frac{g_1'}{g_0' + g_e} = \frac{b_1'}{b_0' + b_e}.$$

Il *rendimento elettrico* (senza riguardo alla spesa di lavoro meccanico nel T. D.)

$$\eta = \frac{V_e^2 (g_1' + g_0 + g_e)}{V I_p \cos \varphi_p},$$

con l'uso delle (27), (29), riceve l'espressione:

$$(32) \quad \eta = \frac{[\mathrm{P}^2 g_1'^2 + \rho_0^2 y_0'^2 (1-\mathrm{P}^2) + 2\rho_0 g_0' g_1' \mathrm{P}(1-\mathrm{P}^2) \operatorname{sen} \alpha_0](g_1' + g_0 + g_e)}{\Gamma^2 [g_1' + g_0'(1-\mathrm{P}^2)(1+s)] - \mathrm{B}^2 g_0'(1-\mathrm{P}^2) d},$$

la quale parte da un valore maggiore di zero, per P crescente da zero, ed aumenta seguendo le vicissitudini inverse del $\cos \varphi_p$ che è al denominatore.

Per $P = 1$, η è già maggiore della unità:

$$\eta_1 = \frac{g_1' + g_0 + g_e}{g_1' + g_e + 2 g_0/(1 + \rho_0^2 + 2 \rho_0 \operatorname{sen} \alpha_0)} .$$

Per il caso particolarissimo $d = 0$, η passa per ∞ con la velocità (31*) poichè il $\cos \varphi_p$ si annulla; poi si inverte, ecc.

In conclusione. Quando il T. D. si trovi nelle condizioni costruttive analizzate al § 1 e al § 4 e compendiate nella (5'), la f. e. m. secondaria è costantemente *in fase* con la tensione applicata primaria (e la corrente secondaria di corto circuito è in fase con la corrente primaria); e la impedenza primaria può raggiungere un *minimo nullo* per una certa velocità ($u^2 = z_1' z_2' / \kappa^2 \mu^2 y'^2$). Allora, nel funzionamento in parallelo con un T. S.: ove il *ritardo globale* di quest'ultimo, (23), sia *complementare* con quello ($\varphi_2 \equiv \alpha_1'$) del T. D., ($12_1$*), il rapporto di trasformazione delle tensioni a vuoto fra la linea secondaria e la primaria, P_V*, ha, in funzione della velocità di rotore, un andamento consimile ad una curva di risonanza (fig. 2); e il caso è analogo a quello ottenibile con un condensatore derivato sul primario. Se, in luogo di soddisfare la (12_1*), i due apparecchi abbiano semplicemente uguali costanti di tempo iniziali, (25), ciò stabilisce fra i due una specie di accordo, per il quale la impedenza primaria complessiva può ancora raggiungere un minimo nullo per una certa velocità (corrispondente a $P^2 = 1 + g_1'/g_0'$ quando per il solo T. D. sarebbe $P^2 = 1$). Questo secondo caso non apparisce però analogo al caso di una risonanza per capacità, poichè entrambe le componenti della corrente primaria si amplificano contemporaneamente alla velocità critica, mentre nel caso precedente l'amplificazione della tensione secondaria è accompagnata dalla graduale scomparsa e inversione della componente reattiva della corrente primaria.

Conducibilità ed assorbimento dei vapori di sodio

Nota di ADOLFO CAMPETTI

Parte I

Generalità e descrizione delle esperienze

1. — La questione della conducibilità spontanea del vapore di sodio e della relazione tra la conducibilità e l'assorbimento si deve ancora considerare, malgrado le numerose esperienze eseguite in proposito con vari metodi, come controversa; tanto è vero che il Kaiser nel suo trattato (1) si esprime, a questo riguardo, testualmente così: " La questione se il vapore di sodio " assorbente sia ionizzato spontaneamente od in conseguenza " dell'assorbimento si deve considerare ancora come aperta. " Esperienze che in principio venivano considerate e citate a " favore della ionizzazione, hanno adesso ricevuto un altro si- " gnificato ".

Ed in realtà, per quanto (per non parlare dei lavori più antichi) negli ultimi anni molte pubblicazioni siano state fatte sopra questo argomento, i risultati sono spesso incerti e contradittori; di guisa che ho ritenuto non inutile di eseguire in proposito nuove esperienze, mediante le quali credo di aver, se non definita la questione, portato tuttavia qualche nuova luce sopra un argomento così discusso.

Le cause delle divergenze tra i risultati delle esperienze precedenti vanno specialmente ricercate in alcune circostanze, venute a poco a poco in chiaro, come risulterà in modo assai evidente da una breve analisi critica.

(1) Kaiser, *Handbuch der Spektroscopie*, 1912, vol. VI, pag. 104.

2. — Tralasciando di parlare dei lavori più antichi, comincerò dal ricordare che in due memorie successive (*Freiwillige Leitfähigkeit des dunklen Natriumdampfes* e *Beziehung zwischen Jonisation der Gase und der Absorption ihres Linienspectrum*) il Füchtbauer (1) osserva che, dopo la scoperta dell'effetto Doppler nei raggi canale, è naturale di pensare che, se non in ogni caso, almeno in un gran numero di casi, i vibratori in un gas, cioè gli oscillatori emittenti lo spettro di linee, siano gli ioni positivi: perciò ioni positivi dovrebbero essere anche i centri assorbenti dello spettro di linee. In conseguenza, raggiunta la temperatura a cui lo spettro di linee viene assorbito, il gas, contenendo ioni positivi, dovrebbe manifestare una conducibilità misurabile.

Ora nel suo primo lavoro il Füchtbauer trova che alla temperatura di 190° si ha già assorbimento della doppia D nel vapore di sodio e però esamina se a questa temperatura il vapore stesso sia fornito di conducibilità apprezzabile.

Le esperienze eseguite in apparecchi di vetro completamente circondati dalla stufa elettrica di riscaldamento, restando così esclusa (a regime stabilito) qualsiasi distillazione da un punto all'altro, gli dettero come risultato che, adoperando l'elettrometro per strumento di misura, già a 200° si osservava una forte conducibilità, crescente colla temperatura: di guisa che il Füchtbauer ritiene che a 380° la conducibilità sarebbe già misurabile galvanometricamente.

Ma queste sue prime esperienze sono poco convincenti ed ancor meno decisive e ciò per molte ragioni; tra cui: 1° Il fatto che il vuoto nel tubo era fatto con una pompa ad olio. 2° Niente di preciso è detto sulla preparazione o purificazione del sodio adoperato. 3° Niente è osservato sulla natura della luce mediante la quale l'assorbimento è stato osservato e perciò è da ritenere che egli adoperasse luce bianca; d'altra parte per la presenza del sodio nel tubo le esperienze si riferiscono a vapore saturo e in queste condizioni, non essendo possibile che in tutti i punti del tubo la temperatura sia rigorosamente

---

(1) Füchtbauer, " Phys. Zeit. „, 1909, vol. VII, pag. 374; 1910, vol. VIII, pag. 531.

uguale, non può essere a meno che in alcune parti del vapore si formino per condensazione delle goccioline di sodio, sulle quali la luce produce effetto fotoelettrico con emissione di elettroni; e del resto, come risulta da esperienze posteriori, ogni superficie di sodio fuso dà origine, anche all'oscuro, ad emissione di elettroni.

Naturalmente queste obiezioni, od almeno alcune di esse, non potevano sfuggire al Füchtbauer, che eseguì qualche tempo dopo e con molte precauzioni nuove esperienze sui vapori di cesio con un apparecchio che può però, com'è naturale, servire anche pei vapori di sodio, usando elettrodi di nichel, servendosi di un galvanometro assai sensibile per la misura della conducibilità e ricorrendo per il vuoto alla pompa di Gaede (1): in queste nuove ricerche non si accenna però ad alcuna nuova determinazione della temperatura a cui nei vapori di sodio comincia l'assorbimento. Per quanto riguarda la conducibilità già si aveva (nei vapori saturi di cesio) una corrente a 100° e a 200° la corrente era notevolmente più intensa.

Però parecchie circostanze osservate (la impossibilità di raggiungere la corrente di saturazione, la dissimmetria nella conducibilità, quando i due elettrodi hanno dimensioni differenti, la produzione di una corrente congiungendo i due elettrodi attraverso al galvanometro, anche senza interporre alcuna forza elettromotrice esterna) fanno credere ad una ionizzazione superficiale, proveniente, secondo ogni probabilità, dalla superficie del metallo alcalino. Dimodochè la questione fondamentale, se cioè, oltre a questa ionizzazione superficiale, vi sia anche una ionizzazione spontanea in volume del vapore di cesio e di sodio rimane ancora completamente insoluta.

3. — La emissione di elettroni negativi dalla superficie del potassio e del sodio fusi, che già era stata osservata dal Richardson nel 1904 (2), fu accuratamente studiata dal Fredenhagen in un interessante lavoro pubblicato nel 1911 (3). Egli nota

---

(1) Füchtbauer, *Ueber Elektrizitätsleitung in gesättigtem Alkalimetall Dampf*, " Phys. Zeit. ", 1911, vol. XII.

(2) W. Richardson, *Phil. Trans. of London*, 1904.

(3) K. Fredenhagen, " Phys. Zeit. ", 1911, vol. XII.

intanto che dalle esperienze del Richardson non risulta in modo sicuro se la conducibilità dei vapori di sodio dipenda solo dagli elettroni negativi emessi dal metallo fuso od anche da una conducibilità spontanea del vapore e pone in rilievo il grande interesse che avrebbe lo stabilire se la conducibilità in volume del vapore di sodio sia in parallelo colla proprietà dei vapori stessi di assorbire le righe D. Il Fredenhagen nota poi come alcuna esperienza decisiva non sia possibile con vapori saturi e perciò in tutte le sue esperienze la parte dell'apparecchio contenente il sodio fuso è mantenuta ad una temperatura inferiore di una trentina di gradi a quella della parte rimanente, ove sono gli elettrodi: del resto egli adopera per produrre il vuoto la pompa Gaede e, per produrre i vapori, sodio e potassio accuratamente depurati. Il suo lavoro però è specialmente rivolto allo studio delle correnti elettroniche dovute agli elettroni emessi dai detti metalli alcalini allo stato di fusione. Tuttavia la sua memoria contiene, relativamente alla questione che qui ci interessa, due osservazioni entrambe assai importanti.

L'una si riferisce all'assorbimento della doppia D nei vapori di sodio ed egli trova a questo proposito che tale assorbimento viene *straordinariamente elevato*, aggiungendo al vapore alcalino un gas come azoto, idrogeno, anidride carbonica, con effetto circa uguale per i tre gas. Se, come è da ritenere, si tratta di gas puri, ciò vorrebbe dire che non è necessaria la presenza dell'ossigeno, affinchè si produca lo spettro di assorbimento del vapore di sodio (come prima aveva ritenuto il Fredenhagen), giacchè altrimenti l'anidride carbonica dovrebbe agire ben diversamente dall'idrogeno e dall'azoto: ciò del resto è in accordo colle esperienze di Gelhoff (1) sui vapori di potassio.

L'altro risultato importante riferito in questo lavoro è che la conducibilità in volume del vapore di sodio e di potassio non saturi è, almeno sino a 350°, al disotto dei limiti dimostrabili galvanometricamente (sensibilità del galvanometro $3{,}7 . 10^{-10}$ Ampère per millimetro della scala). Nelle esperienze che hanno condotto a questo risultato i due elettrodi, di platino,

(1) Gelhoff, “ Annalen der Physik ”, 1909, 30.

erano collocati in un recipiente di vetro collegato mediante un tubo piuttosto lungo ad un altro recipiente di vetro contenente il metallo alcalino: il tutto era riscaldato elettricamente.

Ma conviene subito osservare che anche queste esperienze non permettono di dare una risposta decisiva alla questione della conducibilità spontanea in volume del vapore di sodio; anzitutto il limite superiore di temperatura raggiunto (350°) può non essere sufficientemente elevato: ma, oltre di ciò, per l'emissione di elettroni per parte del metallo alcalino fuso che in quantità maggiore o minore devono pur giungere nel tubo di esperienza (ciò che ho potuto riconoscere nelle mie ricerche, quando non si prendevano precauzioni particolari) il vapore alcalino esaminato dal Fredenhagen deve possedere una conducibilità tutt'altro che trascurabile (esista o no la conducibilità spontanea del vapore).

Tutt'al più dunque le sue esperienze provano soltanto che la conducibilità del vapore di sodio deve essere ricercata con metodo più sensibile del comune galvanometrico.

Di poco posteriori alle esperienze ora esaminate sono quelle del Dunoyer (1) (*Recherches sur la conducibilité de la vapeur de sodium*): il sodio qui adoperato non è stato sottoposto alla distillazione, ma purificato allo stato di fusione (separandolo dal residuo infusibile in una corrente di anidride carbonica); per il vuoto il Dunoyer usava la pompa di Gaede, ma tutte le sue esperienze sono state eseguite con vapori saturi.

Non è possibile riassumere qui tutte le numerose esperienze del Dunoyer che hanno dato risultati di grande complicazione, complicazione dovuta, a parer mio, oltre che all'uso del vapore saturo, al non avere eliminati, nelle ricerche sulla conducibilità del vapore di sodio, gli elettroni provenienti dalla superficie del metallo fuso.

Ricorderò tuttavia che nella prima parte del suo lavoro il Dunoyer giungerebbe alla seguente conclusione e cioè che " al " disopra di 300° si ha tra due elettrodi (di ferro) nel vapore " di sodio una corrente assai intensa dell'ordine di grandezza " (alla saturazione) di 10^{-10} Ampère. Però questa corrente sa- " rebbe dovuta specialmente (sempre secondo il Dunoyer) ad

(1) L. Dunoyer, " Annal. de Chimie et de Physique ", 1912-3, vol. 27.

" un fenomeno di ionizzazione superficiale (verisimilmente alla " superficie del metallo alcalino), che produce ioni negativi più " mobili dei positivi „.

Siccome però il Dunoyer ritiene che una parte almeno della ionizzazione superficiale abbia luogo sopra gli elettrodi, immagina ed eseguisce un'esperienza nella quale gli elettrodi non hanno più alcuna parte e che dovrebbe esser decisiva rispetto all'esistenza della conducibilità in volume del vapore di sodio.

Per questa esperienza egli adopera un apparecchio composto di due recipienti di vetro circa cilindrici, comunicanti tra loro mediante un tubo piuttosto lungo e stretto: in uno dei due recipienti si trova un cilindro di Faraday, aperto verso il tubo di comunicazione; nell'altro recipiente, riscaldato elettricamente, si produce il vapore di sodio. Per l'esperienza si faceva in tutto l'apparecchio il vuoto colla pompa di Gaede, si chiudeva con dispositivo speciale la comunicazione tra i due recipienti e si riscaldava quindi quello contenente il sodio nella stufa elettrica sino a 300° o 400°; allora, aperta la comunicazione, i vapori di sodio vengono proiettati, attraverso il tubo di congiunzione, nel cilindro di Faraday: perciò, dice il Dunoyer, se questi vapori trasportano con sè una carica, essa dovrà essere indicata dall'elettrometro unito al tubo di Faraday. Dal non aver constatato l'arrivo di alcuna carica all'elettrometro il Dunoyer conclude che *la conducibilità in volume del vapore di sodio è dell'ordine di grandezza delle conducibilità gassose ordinarie.*

Veramente il Dunoyer stesso osserva che alla sua esperienza può muoversi l'obiezione seguente: che cioè potrebbe, durante il tragitto, per quanto breve, del vapore di sodio nel tubo di comunicazione, aver luogo una ricombinazione degli ioni. Certamente è difficile prevedere con precisione quello che può avvenire in questo passaggio, tanto più che il vapore scende bruscamente da una temperatura assai elevata alla temperatura ordinaria; ma, a parte tutto questo, vi sono altre obiezioni assai più gravi. In primo luogo, secondo ogni probabilità, il vapore di sodio è qui accompagnato da idrogeno in misura notevole, giacchè, secondo osserva il Wood (1), *è praticamente impossibile*

(1) Wood e Okano, " Phil. Mag. „, 1917-34.

di liberare completamente il sodio dall'idrogeno anche con ripetute distillazioni nel vuoto, poichè il vapore metallico trasporta con sè idrogeno, quando, distillando, si depone sulle pareti fredde: ora nella esperienza sopra descritta non può essere asportato l'idrogeno durante il riscaldamento, perchè, una volta fatto il vuoto iniziale, la comunicazione tra i due recipienti deve essere chiusa. Ma v'ha di più: infatti il gas o vapore potrebbe anche possedere conducibilità elevata, ma se le cariche portate dagli ioni dei due segni (sia pure diversamente mobili) sono equivalenti, l'esperienza col cilindro di Faraday non darà alcuna indicazione della conducibilità, perchè entro al cilindro vengono proiettate quantità di elettricità uguali, ma di segno contrario. Più ancora, poichè dalle esperienze, specie del Fredenhagen, e da quelle pure che andrò tra breve esponendo, risulta in modo indubbio che, quando si riduce in vapore un metallo alcalino, si ha (almeno da una certa temperatura in poi) forte emissione di elettroni negativi dalla superficie metallica, appare estremamente probabile che nella corrente di vapori e gas inviata nell'esperienza del Dunoyer entro al cilindro di Faraday siano presenti elettroni: se perciò la sua esperienza prova qualche cosa, è verisimilmente solo questo che gli ioni positivi presenti nel vapore di sodio tra 300° e 400° portano una carica equivalente a quella degli elettroni ed ioni negativi.

Tralascio di insistere sul fatto che anche in queste esperienze il vapore di sodio è saturo; perciò anche i pochi tentativi sull'effetto della luce sul vapore stesso non possono (a causa dell'effetto fotoelettrico sugli eventuali nuclei di condensazione) portare ad alcuna conclusione sicura.

Riassumendo dunque, l'unico resultato importante e sicuro, relativamente alla conducibilità del vapore di sodio che può ricavarsi da tutti i lavori esaminati, è quello ottenuto dal Fredenhagen, *essere cioè, almeno sin verso i 400°, tale conducibilità al disotto dei limiti dimostrabili galvanometricamente.*

4. — Da tutto ciò che precede deriva chiaramente essere ancora opportune nuove esperienze sopra questo argomento; e tali esperienze formano appunto l'oggetto del presente lavoro. Premetto che le condizioni sperimentali da me realizzate sono lungi dall'essere quali avrei voluto, se i mezzi che in questo

periodo di tempo si hanno a disposizione me lo avessero permesso; ad esempio ho dovuto adoperare un apparato in vetro comune, mentre è noto esistere altre qualità di vetro più resistenti all'azione dei vapori dei metalli alcalini a caldo; tuttavia anche l'apparecchio da me adoperato resisteva abbastanza bene all'azione dei vapori di sodio sino a 400° e solo a temperatura superiore la colorazione bruna caratteristica, tuttavia non molto intensa, appariva con qualche maggior rapidità.

Ho voluto però che nelle mie esperienze fossero soddisfatte le due condizioni fondamentali indispensabili per ottenere resultati attendibili circa la conducibilità e l'assorbimento nei vapori di sodio e cioè:

1° *Operare con vapori non saturi* (condizione a cui finora soddisfano soltanto le esperienze del Fredenhagen).

2° *Impedire che gli elettroni emessi dalla superficie del metallo giungano nello spazio ove si eseguiscono le misure* (condizione che finora non è stata verificata in alcuna delle esperienze prima eseguite sulla conducibilità e l'assorbimento nei vapori dei metalli alcalini).

Oltre a ciò per la misura della conducibilità si lasciò il metodo galvanometrico per l'elettrometrico, per quanto il primo presenti notevoli vantaggi; tuttavia il secondo era qui da preferire, perchè permette di riconoscere conducibilità di ordine di grandezza assai inferiore a quelle che possono essere osservate coll'uso del galvanometro.

5. — L'apparecchio adoperato consisteva essenzialmente di un tubo cilindrico di vetro A, del diametro di circa cinque centimetri e lungo dodici centimetri, colle basi pressochè piane e disposto orizzontalmente; agli estremi di questo tubo erano saldati due tubi pure orizzontali, quindi cogli assi paralleli a quelli del tubo A, e l'uno sul prolungamento dell'altro, però un poco spostati verso il basso: di questi due tubi, del diametro interno di circa 2 centimetri, l'uno b era chiuso all'estremo, l'altro a era munito del maschio di un grosso giunto a smeriglio. Oltre a questi, normalmente al tubo A, era saldato, nella sua metà, un altro tubo c lungo una ventina di centimetri, disposto verticalmente; da esso tubo si diramava orizzontalmente un tubo munito di robinetto a perfetta tenuta

e di giunti a smeriglio per la comunicazione, sia colla pompa Gaede, sia (mediante il movimento di altri due robinetti) con un serbatoio di azoto conservato sopra anidride fosforica. Attraverso al tubo verticale c passava il filo di platino che poneva in comunicazione coll'esterno un elettrodo rettangolare E di platino (di 3 centimetri quadrati), situato nel tubo principale A parallelamente al suo asse, ma un po' al disopra di esso: il filo era protetto da un tubetto di vetro e questo circondato da un tubo di rete metallica (di nichel) comunicante coll'esterno; un cilindretto d'ambra, fissato con mastice all'estremità superiore del tubo c, serviva da isolante per l'elettrodo E e per il suo sostegno.

Nella femmina del giunto unito al tubo orizzontale a erano fissati, attraverso ad un tappo isolante, tenuto a posto con mastice a perfetta tenuta, tre fili di nichel racchiusi entro tubetti di vetro e disposti nello stesso piano verticale. Di questi fili il superiore terminava con un grosso filo di platino ed un elettrodo piano di platino E', identico in forma e grandezza ad E, il secondo con un disco di nichel munito di forellini e normale al filo, l'ultimo con un piccolo cucchiaio, pure di nichel. Quando il giunto era in sito, l'elettrodo E' veniva a disporsi parallelamente e di fronte ad E nel tubo A; mentre il sistema del disco e del cucchiaio veniva a trovarsi entro al tubo b. Il tubo A ed una parte del tubo a unito ad esso e conducente al giunto erano circondati da un grosso tubo di rame e questo poteva essere riscaldato mediante una stufa elettrica tubulare a resistenza; alla sua volta il tubo b, contenente il sistema del disco e del cucchiaio, si trovava internamente ad un altro tubo di rame saldato al primo e pure riscaldato elettricamente con stufa separata. Il tubo di rame, oltre proteggere, quando posto a terra, l'interno dell'apparecchio dalle azioni elettrostatiche esterne, serviva a meglio assicurare la uniformità di temperatura lungo ciascuno dei tubi; la temperatura, tanto del largo tubo A contenente i due elettrodi E e E', quanto del tubo b (contenente il sistema del disco e del cucchiaio), era indicata da due distinte coppie termoelettriche, di cui una saldatura, isolata entro un tubetto di vetro a pareti sottili, era collocata tra il tubo di rame della stufa ed il tubo di vetro.

Il sodio usato per le esperienze era purificato colla mas-

sima cura, essendo la purezza del metallo condizione essenziale per avere risultati non incerti; siccome il sodio viene ordinariamente conservato sotto olio di nafta, è molto difficile liberarlo completamente da traccie di idrocarburi; per giungere ad un buon risultato si tagliava la parte interna di un cilindro di sodio in piccoli pezzi che si ponevano in tubi di vetro con benzolo puro (prima distillato sul sodio): questi tubi venivano poi chiusi alla fiamma, quindi riscaldati sino a fusione completa del sodio: si otteneva in questo modo un cilindretto di sodio, già pressochè libero da residui di nafta: questo cilindretto si fondeva poi nuovamente entro un tubo di vetro (leggermente inclinato e affilato ad un estremo) in una corrente di anidride carbonica secca; il sodio raccolto per sgocciolamento in una capsuletta veniva ancora distillato nel vuoto della Gaede, quindi conservato in anidride carbonica in presenza di anidride fosforica e pezzi di sodio.

Per quanto, usando tutte queste precauzioni, il sodio sia secondo ogni probabilità completamente scevro di idrocarburi, tuttavia riscaldato nel vuoto svolge dapprima ancora idrogeno (conforme alle osservazioni di Wood e Okano già citate), come risulta dalla diminuzione di vuoto e dal presentarsi dello spettro dell'idrogeno in un tubetto di scarica collegato all'apparecchio: tuttavia, dopo aver portato a temperatura elevata e fatto nuovamente il vuoto, lo sviluppo di idrogeno è minimo. Ciò malgrado, è certo tuttavia che le esperienze, anche eseguite in vapori di sodio con vuoto da azoto, sono in realtà in una miscela di azoto e idrogeno a bassa pressione.

Per eseguire un'esperienza si faceva il vuoto nell'apparecchio riscaldando a temperatura di almeno 200°: poi si faceva rientrare l'aria, si toglieva il giunto a smeriglio portante il cucchiaio e si poneva in questo un pezzetto di sodio a superficie tagliata di fresco; si poneva rapidamente il giunto a posto e immediatamente dopo si faceva il vuoto: questa serie di operazioni non durava più di un minuto, di modo che il sodio non restava notevolmente ossidato.

Il sistema del cucchiaio portante il sodio e del disco traforato aveva per ufficio di arrestare gli elettroni provenienti dalla superficie del sodio fuso: a tale scopo, essendo il disco in comunicazione col suolo, il cucchiaio era collegato ad uno dei

poli di una batteria di piccoli accumulatori, di cui l'altro polo era pure in comunicazione col suolo.

Le esperienze eseguite e descritte in appresso hanno dimostrato che praticamente era sufficiente di stabilire tra il disco ed il cucchiaio una differenza di potenziale di 100-120 Volt (essendo il cucchiaio in comunicazione col polo positivo della batteria) per arrestare completamente gli elettroni emessi dalla superficie del sodio fuso.

Si sarebbe potuto tuttavia temere che un'emissione di elettroni avesse luogo per parte del sodio eventualmente condensato nelle parti fredde dell'apparecchio, emissione che avrebbe falsato ogni resultato delle esperienze. (D'altra parte, volendo usare il metodo elettrometrico, ed essendo quindi necessario un isolamento elevatissimo, era impossibile riscaldare tutto l'apparecchio). Per evitare questo inconveniente, nel tubo orizzontale in cui passano i tubetti portanti il sistema del disco e del cucchiaio si disponeva un tappo di fibre d'amianto che, mettendo a posto il giunto, veniva compresso tra i tubetti stessi e la parete interna del tubo e perciò da questa parte il vapore di sodio restava confinato nella parte calda dell'apparecchio; per quanto poi riguarda il tubo nel quale passa il sostegno dell'elettrodo E, essendo esso collegato lateralmente alla diramazione che portava alla Gaede e quindi in comunicazione permanente o ad intervalli colla pompa stessa, non si aveva su di esso visibile deposito di sodio: ad ogni modo la rete posta in questo tubo e carica positivamente di fronte alla parete interna del tubo leggermente conduttore nella parte calda e posto a terra produceva un campo capace di trattenere i pochi elettroni che qui si potessero formare.

Che colle disposizioni adottate fosse soddisfatta una delle condizioni essenziali dell'esperienza, l'assenza cioè nel tubo contenente gli elettrodi E ed E' di elettroni emessi dalla superficie del sodio, risulta dal fatto che alla temperatura di circa 300° e nelle condizioni precedentemente descritte e col sodio sul cucchiaio non si aveva dispersione maggiore che nell'aria o nell'azoto rarefatti; ma, se si invertiva il campo tra il disco ed il cucchiaio (rendendo cioè questo negativo e quello positivo), già alla temperatura di 170° la dispersione era così forte che l'elettroscopio (se caricato positivamente a 280 Volt) si scaricava completamente in pochissimi secondi.

6. — In tutte le esperienze eseguite per la misura della conducibilità del vapore l'elettrodo E era collegato ad un elettroscopio a foglia di alluminio con lettura a scala riflessa e microscopio: esso era graduato e tarato sino a 290 Volt, corrispondendo una divisione (della quale si poteva valutare il decimo) in media a 15 Volt. La capacità del sistema elettroscopio — filo di comunicazione — elettrodo E (misurata per confronto con un condensatore campione ad aria) risultò di 0,0000352 microfarad: perciò se ΔV indica la caduta di potenziale in Volt del sistema disperdente durante un secondo, la intensità totale I di corrente sarà:

$$I = 0{,}0000352 . 10^{-6} . \Delta V = 3{,}52 . 10^{-11} . \Delta V \text{ Ampère}$$

e quindi per unità di area dell'elettrodo, cioè per cm²:

$$i = \frac{I}{\,} = \frac{3{,}52 . 10^{-11}}{3} \Delta V = 1{,}17 . 10^{-11} . \Delta V \text{ Ampère.}$$

7. — Le esperienze di conducibilità eseguite colla disposizione indicata contemporaneamente a quelle sull'assorbimento per parte dei vapori di sodio della doppia D hanno mostrato uno stretto legame tra i due fenomeni, rivelando pure alcune particolarità interessanti che risulteranno da una descrizione delle singole esperienze che verrà esposta in una prossima nota.

Torino, Istituto Fisico della R. Università, marzo 1918.

L'Accademico Segretario
CARLO FABRIZIO PARONA

CLASSI UNITE

Adunanza del 7 Aprile 1918

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. COMM. ANDREA NACCARI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti, della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, i Soci D'Ovidio, Direttore della Classe, Peano, Jadanza, Guareschi, Guidi, Parona, Mattirolo, Grassi, Somigliana, Fusari, Panetti, e il Socio nazionale non residente Volterra; della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche, i Soci S. E. Boselli, Direttore della Classe, Pizzi, De Sanctis, Brondi, Einaudi, Baudi di Vesme, Schiaparelli, Patetta, Prato, Cian, Valmaggi, e Stampini, Segretario della Classe che funge da Segretario delle Classi unite.

È scusata l'assenza del Socio Sforza.

È letto e approvato l'atto verbale dell'adunanza delle Classi unite del 17 marzo u. s.

Il Presidente Andrea Naccari, trovandosi per la prima volta a presiedere l'Accademia in adunanza di Classi unite, ringrazia i Soci per l'onore che gli vollero tributare con unanime voto chiamandolo all'alto ufficio, sebbene avesse pregato che su altri cadesse la scelta loro. Dichiara che farà tutto il possibile per corrispondere alla fiducia de' Colleghi, sull'esempio de' suoi predecessori D'Ovidio, Boselli e Camerano, del quale rimpiange l'immatura morte. E poichè i Colleghi han voluto, nell'eleggerlo a loro Presidente, tener conto del fatto che egli appartiene alle terre Venete invase dal nemico, accoglie il loro fervido augurio che cessi presto il martirio di quelle popolazioni.

Il Socio S. E. Boselli è certo di interpretare l'animo di tutti i Colleghi, affermando che l'Accademia ha scelto a suo Presidente Andrea Naccari, perchè uomo la cui eminente attività scientifica da lunghi anni onora l'Università torinese e la nostra Accademia. Anche senza lo speciale sentimento, che nelle circostanze attuali desta ne' cuori italiani il Veneto invaso e oppresso dalla barbarie nemica, la nomina del Presidente sarebbe pur sempre stata quella che fu, in omaggio al valore scientifico del Socio Naccari rifulgente altresì nelle sue numerose relazioni sui Premi che l'Accademia conferisce. S. E. Boselli termina ripetendo l'augurio che le terre del Veneto, per il valore dell'esercito e per la costanza del Paese, tornino quanto prima all'amplesso della Patria. L'Accademia applaude.

Il Presidente, dopo aver rivolto un saluto al Socio nazionale non residente Senatore Volterra, dà facoltà di parlare al Socio Tesoriere Einaudi, che legge ed illustra il Bilancio consuntivo dell'anno 1917, il quale, messo in votazione, è approvato all'unanimità. Poscia il Socio Tesoriere dà lettura del Bilancio preventivo per l'anno corrente 1918, che è del pari approvato all'unanimità; ed il Presidente rivolge parole di vivo encomio al magistrale lavoro del Tesoriere, sulla proposta del quale, già suffragata dall'approvazione del Consiglio d'amministrazione, l'Accademia approva che, durante l'esercizio corrente, le *Note* dei Soci nazionali, da pubblicarsi negli *Atti*, possano avere, ciascuna, l'estensione di 24 pagine di stampa, anzichè di 16, fermo restando che nessun Socio nazionale potrà nell'anno pubblicare negli *Atti* più di quattro sue *Note*.

Si procede alla votazione per il conferimento del XX Premio Bressa relativo al quadriennio 1913-1916, secondo le norme contenute nell'art. 7 del Regolamento interno pel conferimento del detto Premio. E questo risulta conferito al Prof. Comm. Paolo Orsi, Direttore del Museo Archeologico di Siracusa, per i profondi e larghi studi archeologici da lui pubblicati negli anni 1913-1916.

Relazione sulle opere presentate o proposte per il XX premio Bressa.

La Commissione del XX premio Bressa deve, secondo il Regolamento, rendervi conto dei suoi giudizi intorno alle opere presentate dagli autori e proposte da soci.

Furono presentate dagli autori le opere seguenti:

1° Morandi Dott. Luigi, *Fièvre aphteuse*. Diversi foglietti sciolti.

2° Pisani Dott. Michele, *Cura del tracoma e della cheratite vasculosa superficiale con l'autosieroterapia*. Opuscolo. Cosenza, 1914. — *La Cataforesi nella terapia delle lesioni sifilitiche dell'occhio*. Opuscolo. Cosenza, 1915.

3° Gorini Prof. Costantino, *Studi di batteriologia agraria*. 26 opuscoli.

4° Anastasia Dott. Giuseppe Emilio, *Araldica Nicotianae*. 2 volumi. Scafati, 1914.

5° Rossi Prof. Andrea Giulio, *Un trasformatore dinamico per correnti alternate*. Due Note.

Riferiamo i giudizi cortesemente forniti alla Commissione dai soci, che per la loro speciale competenza furono pregati di esaminare le singole opere:

1° Gli scritti del Dott. Morandi sulla febbre aftosa hanno più il carattere di annunci di giornali che quello di lavori scientifici. Alcuni di quei foglietti portano la firma del Dott. Morandi, altri hanno firme diverse, come Baccelli, Tittoni, Scotton, ecc., o hanno un'indicazione anonima come un agricoltore, un bresciano, un infelice, ecc. Tutti questi scritti hanno il fine di decantare un rimedio contro l'afta epizootica e contro il colera dei polli. Il rimedio, che fu certamente proposto già prima del 1899, consiste per l'afta in una lavatura della piaga con

acqua pura susseguita da una spugnatura d'infuso di timo serpillo.

Contro il colera dei polli si suggerisce la somministrazione di quattro cucchiaiate dello stesso infuso per ciascun pollo.

Per più ragioni evidenti tali scritti non possono nemmeno essere discussi per il premio.

2° Il Dott. Michele Pisani ha presentato due scritti di oculistica. Il primo è una brevissima Nota, in cui l'autore parla di sei casi di tracoma con cheratite vasculosa guariti con l'autosieroterapia. L'A. fonda il suo metodo sulla ipotesi molto discutibile che l'organismo del tracomatoso, reagendo come reagisce in alcune infezioni generali, produca antitossine speciali. Suppone pure che queste antitossine possano raccogliersi nel siero delle flittene prodotte da un vescicante applicato alla regione temporale del paziente. Egli estrae il siero da quelle vescicole e lo inietta con una siringa di Pravatz nel sacco congiuntivale o nella congiuntiva bulbare. Dalla descrizione soverchiamente succinta dei casi è difficile trarre un giudizio.

Il secondo lavoro è un'altra breve Nota, in cui l'A. parla di tre casi di malattie sifilitiche del bulbo oculare curate con la cataforesi e con tale sussidio terapeutico portate a guarigione o migliorate. La cataforesi consiste nel far pervenire del mercurio alla parte ammalata mediante la corrente elettrica. Le osservazioni, oltre ad essere molto scarse, sono anche troppo compendiosamente descritte e non possono convincere della bontà del metodo proposto. In conclusione nè l'uno, nè l'altro dei lavori presentati dal Dott. Pisani è tale da poter essere proposto per il premio.

3° Il Prof. Costantino Gorini della R. Scuola superiore di Agricoltura di Milano presentò 26 Note, che possono esser divise in tre gruppi. Undici di queste vennero pubblicate nel quadriennio 1913-16. Il primo gruppo riguarda i batterii del latte, il secondo l'applicazione degli studi batteriologici alla fabbricazione dei formaggi e il terzo l'applicazione degli studi stessi alla conservazione dei fieni.

È opportuno premettere che il Gorini iniziò i suoi lavori batteriologici fino dal 1894 e che l'opera sua fu feconda di buoni risultati, specialmente nel campo pratico, come fu rico-

nosciuto dall'Accademia dei Lincei, che gli assegnò il premio Santoro.

Quattro delle Note pubblicate nell'ultimo quadriennio appartengono al primo dei tre gruppi. Nel 1915 l'A. osservò che le basse temperature favoriscono l'attività proteolitica dei fermenti lattici, e che anche il substrato, in cui i batterii si sviluppano, ha influenza sull'attività stessa. In un'altra Nota dello stesso anno l'A. esaminò la resistenza dei batterii non sporigeni alle alte temperature. A spiegare la sopravvivenza di quei batterii l'A. rigetta l'ipotesi dell'esistenza di specie microbiche dotate di particolare resistenza al calore, e invece ammette un'influenza protettrice d'inviluppi caseinici formatisi intorno ai germi.

Questi scritti e anche un altro del 1916 su argomento affine, se possono avere qualche interesse per la pratica, hanno poca importanza scientifica, perchè le osservazioni e le esperienze vi sono fuggevolmente accennate e vi si dà troppo campo ad ipotesi.

Il secondo gruppo contiene dodici Note sul metodo razionale di fabbricazione dei formaggi. La batteriologia casearia ha dimostrato l'esistenza di fermenti utili e di dannosi. La buona riuscita della fabbricazione dipende dalla prevalenza dei primi sui secondi. Specialmente per merito del Gorini si riuscì a scegliere i fermenti più vantaggiosi; ma convien notare che delle dodici Note che trattano dell'argomento, tre sole vennero pubblicate nel quadriennio 1913-16.

Il terzo gruppo comprende nove Note che trattano di studi batteriologici sui fieni conservati nei silò. L'A. osservò come nei foraggi male conservati, accanto ad una microflora utile, ne esista una dannosa, la quale passa nel latte e nei prodotti che se ne ottengono. L'A. studiò poi il modo di eliminare dai silò i fermenti dannosi e di farvi sviluppare i benefici. La temperatura ha in ciò molta influenza: a 60° gradi si sviluppa di preferenza la flora dannosa, mentre al di sotto di 50° si mantiene rigogliosa la flora utile.

Dall'esame delle Note presentate dal Prof. Gorini risulta che quelle di esse le quali cadono nel quadriennio 1913-16 non sono che complementi di lavori precedenti. Nessuna di esse

tratta argomenti nuovi. Per ciò l'opera del Prof. Gorini nel detto quadriennio non può essere presa in considerazione per il premio.

4° L'opera in due volumi col titolo *Araldica Nicotianae* presentata dal Dott. Anastasia contiene gli studi fatti dall'A. intorno alla filogenesi delle varietà di *Nicotiana Tabacum* Linn. Il lavoro condotto con molta diligenza e con dovizia di osservazioni sopra numerosissime razze di Nicoziana, illustrato da circa 200 tavole e figure disegnate dal vero dall'A., costituisce un importante contributo allo studio d'una fra le più intricate questioni di filogenia. Con un esame prolungato per sette anni di moltissime razze di Nicoziana negli stabilimenti governativi dei tabacchi, l'A. s'è persuaso che nelle particolarità morfologiche degli stami e degli stimmi sieno da ricercarsi, come egli dice, le stimmate dell'ibridismo fra le razze differenti. Il nome dato al libro deriva appunto dal concetto che lo stimma sia l'organo, che raccoglie i segni specifici e si possa ritenere come lo stemma famigliare.

Il libro del Dott. Anastasia è frutto di lungo e accurato lavoro, ma non ha tale importanza da poter essere considerato come meritevole del premio Bressa.

5° Il Dott. A. G. Rossi presentò due Note intitolate: *Un trasformatore dinamico per correnti alternate.* L'A. espone la teoria di una macchina composta essenzialmente di un disco di rame, che gira in mezzo a due parti fisse o statori, portanti avvolgimenti multipolari identici, ma spostati di un semipasso magnetico, in modo da non esercitare induzione direttamente fra loro. Alimentando uno degli statori con corrente alternata, nell'altro statore non si ha corrente indotta finchè il disco di rame sta fermo; invece, se questo gira, le correnti in esso indotte dànno origine ad altre correnti indotte nel secondo statore.

Con una minuta discussione teorica l'A. cerca di porre in chiaro il modo di variare delle correnti, delle forze elettromotrici, delle loro fasi, dell'energia disponibile nel circuito secondario in relazione con quella spesa nel primario, delle resistenze, delle reattanze, ecc.

Benchè l'A. abbia dichiarato nella prima Nota che lo strumento da lui imaginato aveva uno scopo speciale e benchè nelle

figure abbia dato ad esso il nome di *relais* telefonico, manca nelle due Note ogni accenno all'importanza che la macchina può avere nelle applicazioni. Il lavoro del Rossi è certamente interessante in quanto esamina con diligenza le proprietà di un apparecchio, che potrà forse avere qualche utile applicazione, ma non vi si trovano dei risultati teorici e pratici di tale importanza da renderlo meritevole di essere preso in considerazione per il premio.

Veduto così come nessuna delle opere presentate dagli Autori sia stata giudicata degna d'essere proposta per il premio, passiamo alle opere proposte da Soci.

. . . . (1)

Fu infine proposto da Soci come meritevole del premio il prof. Paolo Orsi per gli scavi e le scoperte da lui fatte nella Sicilia e nella Magna Grecia e per le pubblicazioni, nelle quali ne ha dato ampia illustrazione. Paolo Orsi da Rovereto serve da lunghi anni con zelo indefesso la patria italiana e si è acquistato somme benemerenze verso la scienza con i suoi studi sulle antichità preistoriche della Sicilia orientale e sulla topografia di Siracusa e di molte altre città greche ed indigene di Sicilia. Egli ha reso il Museo nazionale di Siracusa, per l'importanza dei materiali raccolti e per la sapienza dell'ordinamento, uno dei principalissimi d'Italia, anzi, in genere, del mondo civile. Nell'ultimo quadriennio poi, oltre ai moltissimi scavi di minor conto, egli ha condotto larghe esplorazioni accanto al tempio di Athena Ortygia in Siracusa, feconde di risultati importantissimi per la topografia siracusana e la storia dell'arte antica. Inoltre ha esplorato sistematicamente parecchi centri archeologici della Magna Grecia, tra i quali Caulonia.

---

(1) A norma dell'art. 5 del *Regolamento interno pel conferimento dei Premi Bressa*, è qui ommessa la parte della *Relazione* stampata, distribuita ai soli Soci nazionali residenti e non residenti, che riguarda un altro candidato proposto da Soci e giudicato meritevole del premio insieme con Paolo Orsi dalla Commissione che deferì la scelta tra i due all'Accademia. Si pubblica invece la parte concernente l'Orsi, perchè ad esso fu aggiudicato il premio.

Gli Accademici Segretari
CARLO FABRIZIO PARONA
ETTORE STAMPINI

Caulonia, antica e importante colonia crotoniate, che combattè sul principio del IV secolo contro Dionisio il Vecchio e che nel III secolo si alleò con Roma per poi venire durante la seconda guerra punica in mano di Annibale, decadde dopo quella guerra a tal segno, che a poco a poco si dimenticò fin la sua ubicazione. Gli eruditi la collocarono in generale presso Castel Vetere, sulla sinistra dell'Allaro o anche nel sito dell'attuale Squillace o dell' attuale Stilo. L' Orsi per primo propose l'ipotesi che sorgesse a capo Stilo: ipotesi che ora hanno reso certezza le tre campagne di scavo, di cui l' Orsi stesso rende conto nel monumentale lavoro su Caulonia (Roma, 1916; estr. dai " Mon. Ant. dei Lincei „, vol. XXIII). L'Orsi ha rivolto anzi tutto la sua attenzione alle mura di Caulonia, di cui ha potuto seguire quasi intero il percorso e riconoscere gli ampliamenti, ed è riuscito a dare così, compiuta nel tutto insieme e nei particolari, la imagine di una piccola fortezza del secolo VI-V a. C. Ciò è tanto più importante in quanto lo studio dell'architettura militare nel territorio della Grecia e delle sue colonie è stato fin qui assai trascurato; e, come è noto, manca ancora uno studio veramente soddisfacente sulle fortificazioni di Siracusa. Quelle di Caulonia, oltre all'interesse militare, sono anche notevolissime dal lato costruttivo e costituiscono, come dice l'Orsi, una rivelazione ed un fatto nuovo nella tecnica muraria. Infatti, mentre nell'Asia Minore e nella Grecia, secondo asserisce uno dei migliori conoscitori dell'architettura greca, il Dörpfeld, non si conosce ancora verun edificio preromano, le cui mura sieno fabbricate con calce, non è dubbio che a Caulonia, in mura anteriori alla decadenza della città, cioè anteriori a Dionisio il Vecchio, troviamo la calce impiegata assai sovente per collegare i grossi ciottoli, di cui sono costituiti i paramenti delle mura, e ciò perchè i Cauloniesi, non potendo procurarsi se non con grave difficoltà e spesa la pietra da taglio, usando il materiale che il paese forniva, dovettero sviluppare originalmente la tecnica muraria adatta a quel materiale.

Oltre le mura l' Orsi ha studiato in Caulonia i resti delle abitazioni, il tempio, la necropoli.

Importante dal lato architettonico è il tempio greco entro le mura della città, rimasto fino ad ora affatto ignoto, di cui

l'Orsi ha scoperto lo stilobate, imponente rettangolo di m. 41,20 per 18,20, e illustrato accuratamente gli altri resti, concludendo che si tratta d'un tempio dorico perittero esastilo, della prima metà del V secolo a. C., con coronamento fittile di carattere ionizzante.

Con la consueta felicità d'intuizione ha saputo poi l'Orsi porre la mano anche sulla necropoli di Caulonia, sfuggita sin qui sia alla curiosità degli archeologi, sia all'avidità degli scavatori abusivi; ed ha scavato oltre cento sepolcri, in massima parte peraltro assai poveri, che si distribuiscono cronologicamente fra il VI e il IV secolo a. C., ove è degna di nota la prevalenza assoluta del rito dell'inumazione e la mancanza pel V secolo di vasi d'importazione attica.

Un'altra città, la cui ubicazione, grazie alle ricerche dell'Orsi, può dirsi ormai assodata, è Medma. Questa antica colonia locrese, ricordata già da Ecateo, veniva collocata generalmente a Nicotera presso il golfo di Gioia, e solo pochi eruditi aveano accennato all'ipotesi che dovesse essere più a sud sulla sinistra del fiume Mésima, ov'è la moderna Rosarno. Quivi l'Orsi, in due brevi ma fortunatissime campagne di scavo, rinvenne la grande favissa d'un tempio, che senza dubbio doveva essere principalissimo fra quelli di Medma, probabilmente il tempio della divinità maggiore dei Locri Epizefirii, Persefone. La favissa fornì centinaia e centinaia di oggetti fittili e metallici che sono già stati in parte illustrati dall'Orsi nelle *Notizie degli scavi.* Dell'importanza di questo materiale e dell'interesse che ne ha l'illustrazione, può dare un'idea il fatto che si tratta di una serie di terrecotte, le quali si dispongono cronologicamente dal principio del VI alla metà del V secolo a. C. e in cui si rispecchia tutta l'evoluzione della plastica dalle produzioni infantili dell'arte arcaica fino all'età dei precursori di Fidia. Vi sono in particolare, oltre a varie centinaia di teste fittili, alcune di singolare bellezza, che costituiscono un complesso di opere d'arte vasto ed omogeneo, quale forse non ha riscontro in tutto il mondo greco: importantissime non meno per la storia dell'arte che per quella del costume, permettendo esse di studiare i minimi particolari dell'acconciatura e dell'adornamento femminile circa il 500 a. C. Tutto questo materiale l'Orsi non

si è limitato a scoprirlo e a darne una parziale e provvisoria pubblicazione, ma ha cercato di utilizzarlo acutamente per la storia dell'arte antica, mostrando come si fondessero in Medma una corrente peloponnesiaca ed una ionica con una attica che nel V secolo s'impose alle precedenti, e cercando di delineare l'opera di Pitagora di Reggio nel fondere questi indirizzi e nell'utilizzarli originalmente per le sue creazioni.

Questi cenni, che potrebbero facilmente essere ampliati, bastano a mostrare l'importanza degli scavi e delle scoperte dell'Orsi, le sue doti felici di ricercatore e quelle non meno singolari d'intelligente ed erudito illustratore dei monumenti da lui rinvenuti.

. . . .

La Commissione

GIAMPIETRO CHIRONI, *Vicepresidente dell'Accademia, Presidente*
ENRICO D'OVIDIO
ANDREA NACCARI, *Relatore*
CARLO FABRIZIO PARONA
GUIDO GRASSI
CARLO SOMIGLIANA
GAETANO DE SANCTIS, *Segretario della Commissione*
FRANCESCO RUFFINI
ETTORE STAMPINI
ERNESTO SCHIAPARELLI
FEDERICO PATETTA

Gli Accademici Segretari
CARLO FABRIZIO PARONA
ETTORE STAMPINI

Fig. 1

m. l.

l.

n. c

ep.

m. pr.

Fig. 4ª

Fig. 4ᵇ

Fig. 3

Fig. 2

m. pr.

c. g. v.

Fig. 6

ep.

m. l.

Fig. 7

Fig. 5ª

Fig. 5ᵇ

Fig. 8

Fig. 9

C. dis.

Lit. Salussolia, Torino

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona. Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di C. Frati, A. Baudi di Vesme e C. Cipolla.

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in-f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di C. Cipolla, G. De Sanctis e P. Fedele.

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in-4°, di 70 pagg. e 96 tav.

SOMMARIO

Classi Unite.

Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza del 17 Marzo 1918 . *Pag.* 277

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza del 24 Marzo 1918 . *Pag.* 279

CHIANTORE (Giuseppina). — Sulla struttura della tasca faringea di " Helobdella stagnalis „ L. (con 1 tavola) . . . . . „ 281

ROSSI (A. G.). — Un trasformatore dinamico per correnti alternate „ 287

CAMPETTI (Adolfo). — Conducibilità ed assorbimento dei vapori di sodio (parte I) . . . . „ 297

Classi Unite.

Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza del 7 Aprile 1918 . *Pag.* 309

RELAZIONE sulle opere presentate o proposte per il XX premio Bressa „ 311

Tip. Vincenzo Bona - Torino

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. LIII. DISP. **11ª**, **1917-1918**.

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 8.
1918

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 14 Aprile 1918

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. COMM. ANDREA NACCARI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci D'Ovidio, Direttore della Classe, Foà, Guareschi, Guidi, Mattirolo, Grassi, Somigliana, Panetti e Parona Segretario.

Si legge e si approva l'atto verbale della precedente adunanza.

Il Segretario comunica che i Soci corrispondenti ultimamente nominati signori A. Angeli, F. O. Bower, G. Chiarugi, H. De Vries, A. Piutti hanno inviato lettere di ringraziamento. E dà lettura della lettera colla quale il Presidente della Federazione " Pro Montibus „ ringrazia per il voto di plauso e di augurio alla iniziativa per l'istituzione del Parco Nazionale nell'Appennino Centrale.

Il Socio Guareschi fa omaggio della sua Memoria *Di alcuni errori sulla localizzazione dei composti chimici nei semi di frumento e di riso e sul cosidetto aleurone.* Il Socio Guidi offre la Nota (II e III) *Sulle dighe a volta*, ed un'altra sua pubblicazione *Sulla sicurezza delle dighe di sbarramento.* Ed il Socio Mattirolo il suo studio su *I bulbi del " Muscari comosum „ Mill. (Cipollaccio col fiocco) proposti come alimento anche alle popolazioni*

dell'Italia Settentrionale. I tre colleghi dànno notizia di questi loro lavori ed il Presidente li ringrazia del dono e delle interessanti comunicazioni.

Il Segretario presenta otto pubblicazioni, citate nell'elenco dei doni, inviate dal Socio corrispondente De Toni; offre in omaggio il cenno necrologico del compianto Presidente Camerano, da lui scritto per la " Rivista del Club Alpino „, ed avverte che la Sede Centrale del Club ha cortesemente mandato parecchie copie, che sono a disposizione dei presenti.

Il Presidente ricorda che resta a provvedere per la commemorazione accademica del Camerano; e, poichè è informato dal Segretario che il Socio corrispondente D. Rosa assumerebbe l'impegno di prepararla, si dice lieto di proporre alla Classe che l'incarico sia affidato al Prof. Rosa, indicatissimo per la sua grande competenza e per i rapporti di amicizia che lo univano all'illustre defunto. La Classe approva unanime.

Sono accolte per la pubblicazione negli *Atti* le seguenti Note:

del Socio Guareschi, *Gli anelli vortici di Tait e il solfo colloidale. Con esperienze di lezione;*

dell'Ing. Filippo Burzio, *Sopra alcune formole del Mayevski relative al 2° problema balistico fondamentale*, presentata dal Socio Panetti;

del Prof. A. Campetti, *Conducibilità ed assorbimento dei vapori di sodio.* Parte II, *Resultati delle esperienze*, presentata dal Socio Naccari;

del Socio C. Somigliana, *Sulle onde di Rayleigh.*

LETTURE

Gli anelli-vortici di Tait e il solfo colloidale. Con esperienze di lezione

Comunicazione del Socio nazionale residente I. GUARESCHI

È noto che W. Thomson e Tait da lungo tempo dimostrarono la formazione dei così detti anelli a *tourbillons* o anelli *tournants* o meglio *anelli-vortici* e che ora si chiamano anche anelli di Tait o di Thomson.

Sir W. Thomson (lord Kelvin) ammise, modificando il vecchio concetto di Descartes, che la materia fosse in realtà costituita da particelle vorticose o *tournantes* di qualche cosa che riempie lo spazio, cioè di un fluido diffuso dappertutto e che ha movimento vorticoso o *tourbillonnant*. Le proprietà di questo movimento degli anelli-vortici furono studiate specialmente da Helmholtz e da Tait.

Il Tait [1] otteneva degli anelli bianchi che si muovevano nell'aria con moto vorticoso, facendo, da una cassetta piena d'aria e di vapori di cloruri di ammonio, uscire violentemente questo miscuglio da un foro circolare praticato in una parete della cassetta rettangolare e col pugno dando un colpo secco sulla parete opposta formata da un tessuto elastico. Questi anelli sono analoghi a quelli che si formano coll'idrogeno fosforato quando una bolla di questo gas (impuro di idrogeno fosforato liquido) uscendo dall'apertura di un tubo che sta sotto l'acqua, viene in contatto dell'aria.

---

[1] P. G. Tait, *Conférences sur quelques-uns des progrès récents de la physique*, 1886.

Anche durante gli esercizii di tiro delle artiglierie colla vecchia polvere pirica si notavano spesso dei grandi anelli che salivano a molti metri di altezza nell'aria senza rompersi.

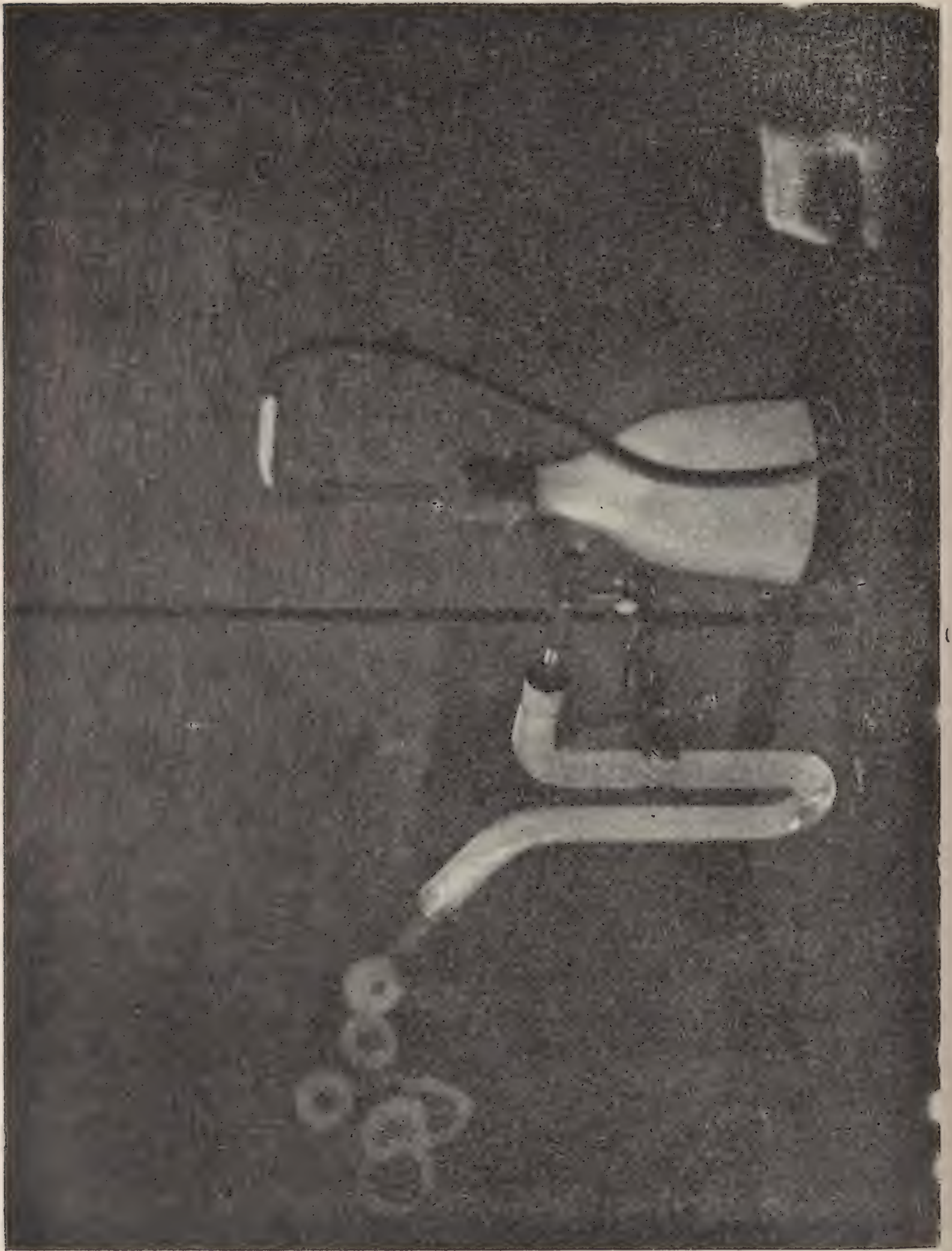



Fig. A.

Durante le mie lunghe ricerche sull'assorbimento dei gas detti asfissianti, ed intorno ai quali debbo ancora pubblicare

una ultima parte, terminata già da tempo, ho osservato vari fatti che mi sembrano non privi di interesse e che si connettono con i sovraccennati anelli-vortici.

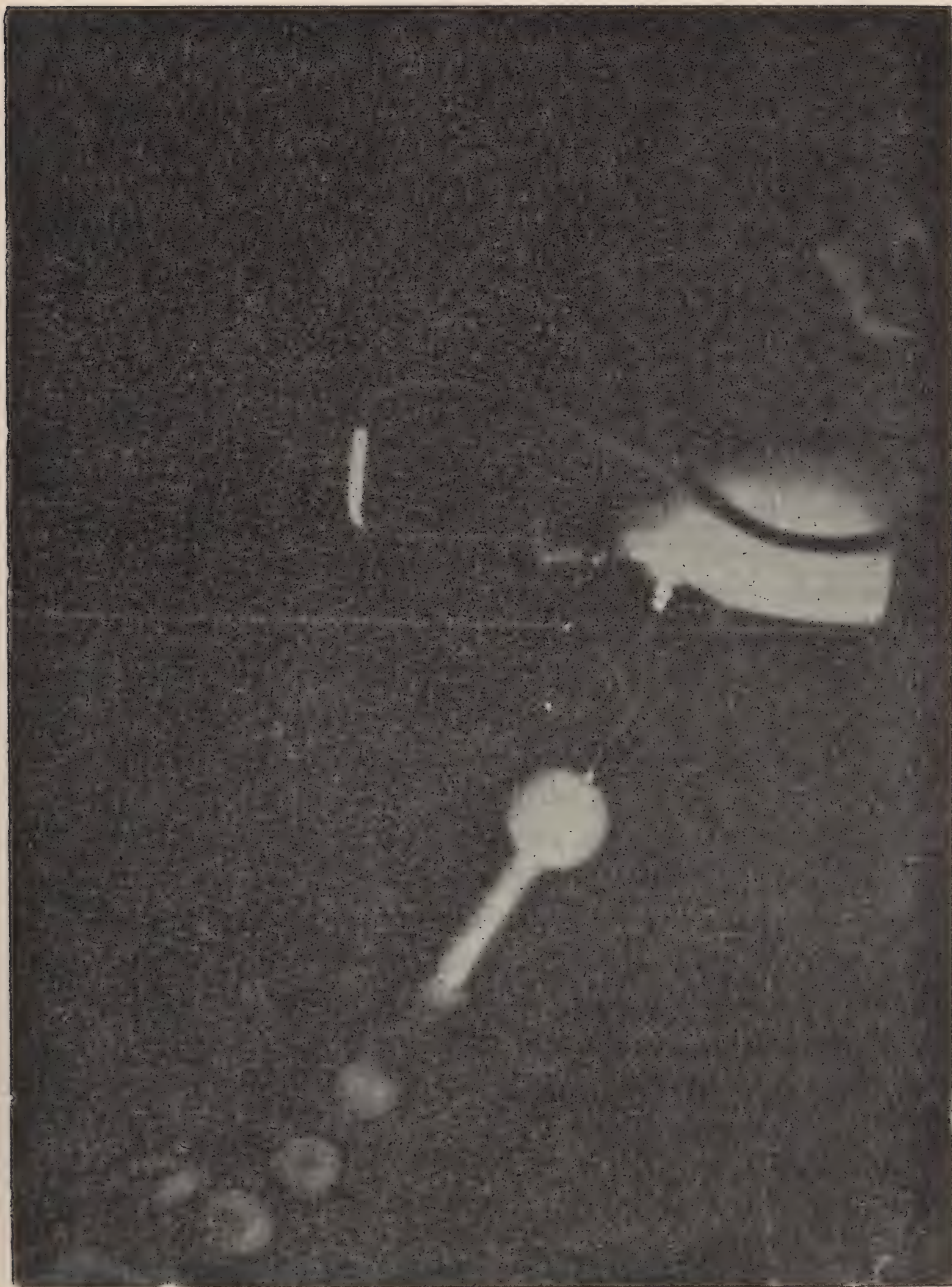



Fig. B.

Ogni anello di Tait è formato da una massa d'aria in movimento progressivo mescolata con fina polvere o nebbia di

cloruro di ammonio; è insomma una porzione definita di aria ripiena o meglio involta o involucrata di fumo del cloruro di ammonio contenuto nell'interno della cassettina. L'aria così inviluppata o involucrata dal cloruro di ammonio sarebbe quasi, come scrive il Tait, una sostanza differente dall'aria ordinaria ambiente, che si sposta rapidamente attraverso a questa proprio come un corpo solido, un corpo rigido.

Io credo che in queste condizioni il cloruro di ammonio sia allo stato colloidale. Ho osservato che questo miscuglio di aria e di cloruro di ammonio sotto forma di anello è tanto stabile che può attraversare uno e successivamente anche più strati di acqua, e di altri liquidi.

E, cosa secondo me assai curiosa, non solamente si ottengono degli anelli giranti per l'aria con il cloruro di ammonio, ma ben anco con sostanze che sono avidissime d'acqua, quali sono l'*anidride solforica* e l'*anidride fosforica*. Ho già fatto cenno di alcuni di questi fatti nella mia Nota: *Delle singolari proprietà della calce sodata*, Comunicazione II (1).

Quando dentro una boccia tubulata contenente dell'acido solforico fumante, o acido di Nordhausen, con 25-30 $^0/_0$ di anidride, si fa entrare a scatti mediante una pera o palla di gomma elastica, dell'aria, escono dalla parte opposta dei fumi bianchi di anidride solforica; e se, come indica la figura A, questi fumi entrano in tubo ad U contenente tant'acqua da fare lieve chiusura nella curvatura, allora dalla parte opposta escono gli anelli costituiti da aria involucrata da anidride solforica, la quale benchè avidissima di acqua, come è notissimo, in queste condizioni passa attraverso all'acqua stessa dando degli anelli bellissimi e più o meno grossi secondo il diametro del tubo. Si producono anelli pure assai belli se invece di attraversare l'acqua l'anidride solforica e l'aria attraversano altri liquidi, quali l'alcool metilico o l'alcool amilico; meno bene coll'alcool etilico. Bene si hanno se l'anidride solforica o il cloruro di ammonio attraversano la α*bromonaftalina*. Si hanno pure attraverso il mercurio.

---

(1) “ Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino „, 1915, t. 51, p. 64.

Molto belli si producono se l'aria-carica di S^2O^6 (1) attraversa l'acido solforico fumante contenuto nel tubo ad U. Coll'alcool metilico si hanno benissimo, sembrano più leggeri ed il movimento di rotazione si scorge benissimo.

Invece del tubo semplice ricurvo contenente i liquidi si possono avere gli anelli facendo passare S^2O^6 oppure NH^4Cl entro un tubo con grosso rigonfiamento a sfera (fig. B) entro al quale si accumula la nebbia che poi esce dalla parte opposta. Insomma si può variare l'apparecchietto come si vuole e ottenere bene gli anelli. L'apertura dalla quale escono gli anelli può essere anche quadrata anzichè circolare.

Si possono ottenere benissimo degli anelli di aria e cloruro di ammonio ponendo dentro la boccia, invece dell'acido solforico fumante, due cassaline in una delle quali si mette dell'acido cloridrico fumante e nell'altra dell'ammoniaca concentrata. Oppure si può sospendere dentro la boccia un'asta di ferro terminata da un cucchiaino pure di metallo, ove si pone un pezzetto di *fosforo* che si accende rapidamente con un filo di ferro caldo e poi si fa entrare l'aria a scatti. L'*anidride fosforica* P^2O^5, che è la sostanza più straordinariamente avida di acqua, in queste condizioni attraversa l'acqua, o altro liquido, e fornisce degli anelli bellissimi.

Le due figure precedenti possono dare una idea del nuovo apparecchietto per ottenere gli anelli di Tait, facendo passare i gas o i vapori attraverso l'acqua od altro liquido, oppure unicamente attraverso un tubo lungo con un grosso rigonfiamento a sfera.

Avevo ideato un apparecchio pure in vetro che avrebbe forse funzionato meglio, ma non ho potuto farlo costruire.

Si noterà che gli anelli si formano benissimo anche quando la nube bianca di anidride solforica o fosforica o di cloruro di ammonio ha attraversato due o tre tubi ad U congiunti insieme

(1) L'anidride solforica che produce la nebbia, e quindi gli anelli, probabilmente è l'anidride solida S^2O^6, o anidride disolforica, la quale a freddo reagisce più lentamente. La grandezza molecolare dell'anidride disolforica fu stabilita dal prof. Oddo mediante l'abbassamento del punto di solidificazione delle soluzioni nell'ossicloruro di fosforo.

e contenenti dell'acqua o dell'acido solforico fumante od altro liquido nelle curvature.

Si formano pure anelli molto belli facendo passare l'anidride solforica attraverso al bicloromonobromometano $CHCl^2Br$; il quale è un liquido incoloro bollente a 91°-92° e peso spec. = 1.9254. Gli anelli sono pesanti e tendono a cadere in basso sempre allargandosi in direzione orizzontale.

Col *bromoformio* $CHBr^3$, liquido bollente a 151° e del peso specifico 2.9041, si hanno pure anelli molto belli, ma che non presentano nulla di speciale.

Col *tetraclorometano* CCl^4, che bolle a 76°-77° ed ha il peso specifico di 1.599, si hanno pure anelli di anidride solforica o col cloruro di ammonio.

Gli anelli si formano molto bene anche facendo passare la nube bianca di cloruro di ammonio attraverso all'acido solforico fumante. In questo caso esce una miscela di cloruro di ammonio e di anidride S^2O^6 e forse anche di $SO^2\langle{}^{OH}_{NH^2}$, e gli anelli sono spesso visibilmente trasparenti nella metà superiore e più densi e bianco-opachi nella metà inferiore.

Noi vediamo dunque il caso singolare di sostanze quali NH^4Cl e $H^2S^2O^7$ le quali in circostanze ordinarie reagirebbero vivamente l'una sull'altra trovarsi invece allo stato di nubecola in contatto, e NH^4Cl passare oltre insieme a S^2O^6.

Si formano pure degli anelli grossi, densi, pesanti quando si fa passare la nebbia di anidride solforica attraverso l'*ammoniaca concentrata* al 20 %. Allora l'anello non sarà costituito solamente di aria involucrata di anidride, ma probabilmente anche dal composto $SO^2\langle{}^{OH}_{NH^2}$ od anche $SO^2\langle{}^{NH^2}_{NH^2}$. L'ammoniaca concentrata e l'anidride solforica sono due sostanze che nelle condizioni ordinarie reagirebbero colla massima violenza.

La nubecola o fumo di anidride solforica passa anche attraverso l'*idrato sodico* al 30 %, dando anelli che non hanno nulla di speciale. Così pure anche i fumi bianchi di *anidride fosforica* passano attraverso l'idrato sodico al 30 %. Densa nebbia e grossi anelli si ottengono anche facendo passare il gas acido cloridrico oppure il gas ammonico attraverso l'acido solforico fumante.

Ad ogni modo si possono variare le esperienze all'infinito adoperando liquidi e nebbie diverse e tubi di diametro diverso.

Non ho, sino ad ora, trovato nessuna relazione tra la facilità a fornire gli anelli ed il peso specifico dei liquidi attraversati dall'anidride solforica o dal cloruro di ammonio.

Si ottengono pure gli anelli collo stesso apparecchio o gli stessi apparecchi impiegando invece dell'aria un altro gas; coll'*anidride carbonica* CO^2 passante attraverso l'acido solforico fumante si hanno degli anelli molto pesanti (gas anidride carbonica con involucro di anidride solforica) che si muovono nell'aria, ma cadono verso terra e si rompono facilmente.

Così pure adoperando il gas *idrogeno* gli anelli si formano, ma meno bene, sono leggeri, vanno in alto e si rompono facilmente. Ciò si capisce facilmente, perchè CO^2 e H^2, dai quali sono costituiti gli anelli, tendono ad espandersi nell'aria.

Anche coi *vapori di bromo* si hanno gli anelli, ma sono molto pesanti e cadono facilmente verso terra. Anche il vapore di bromo attraversa bene l'acqua.

Se si fa passare l'aria con anidride solforica attraverso al bromo liquido, si hanno degli anelli rossi, pesanti, i quali però si rompono facilmente.

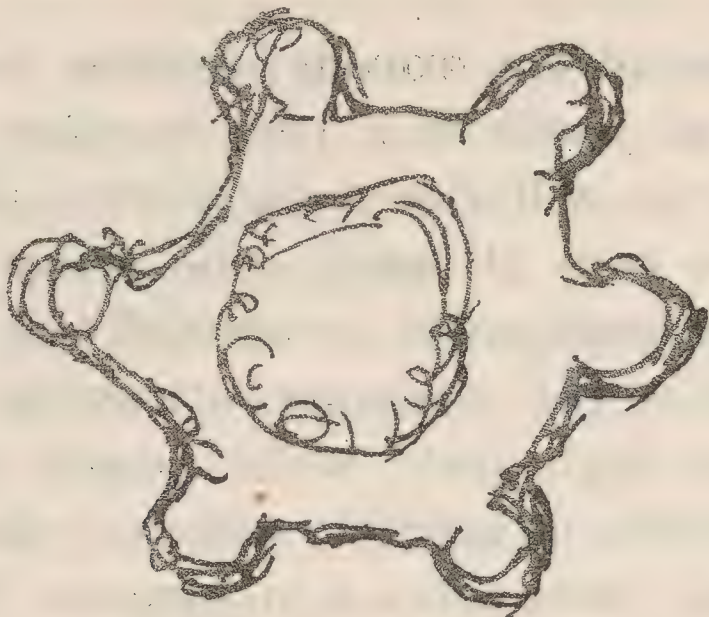
Affinchè le esperienze riescano bene fa d'uopo che siano eseguite in ambiente ove l'aria sia in quiete e non vi siano forti correnti.

Anche le nubecole degli anelli rotti cadono dall'aria a forma di fungo rovesciato, continuando a muoversi come negli anelli; analogamente a quanto accade per il solfo colloidale nelle esperienze che esporrò più avanti.

Vi deve essere una analogia fra lo stato colloidale dei solidi e questo stato speciale dell'aria o altro gas, involucrata da un sottile strato di materia solida o liquida.

Si potrà usufruire di queste osservazioni, variando anche la forma degli apparecchi in modi diversi, e trarne delle conclusioni, forse non prive di interesse, riguardo al movimento molecolare e atomico e la costituzione della materia.

Non è forse privo di importanza che io faccia notare come gli anelli quando cominciano a guastarsi od a rompersi assumono per un momento la forma esagonale, come quella di una

ruota a sei denti arrotondati, quale ad esempio nello schizzo seguente:

Fumo o nebbia prodotta insieme all'incandescenza dall'acido solfidrico attraverso la calce sodata. — Attraverso un tubo ad U del diametro di poco più di 1.5 cm. contenente 40 gr. di calce sodata di recente preparata, feci rapidamente passare un litro di gas acido solfidrico insieme a corrente d'aria. Il gas solfidrico fu rapidissimamente assorbito e la carta ad acetato di piombo posta verso la parte opposta del tubo non dava segno di acido solfidrico. La calce sodata si colora subito in bruno-scuro e rosso, e in alcuni punti in ranciato; si sviluppa molto calore, al punto che non si può toccare il tubo, e dopo pochi momenti, nel punto ove corrisponde il sesto o l'ottavo centimetro della calce sodata, questa diventa *incandescente*, manda viva luce e nel tempo stesso nella boccia di Habermann, che segue al tubo ad U, di aspirazione, si notano abbondanti fumi o nebbia bianca, intensa, che va sino entro la pompa ad acqua. L'incandescenza si propaga per cinque o sei centimetri, poi cessa, e nella parte ove si è avuta l'incandescenza tutta la massa diventa bianca; l'aria ha ossidato i solfuri. Cessata la viva reazione, feci assorbire allo stesso modo un secondo litro di gas acido solfidrico e l'incandescenza della calce sodata ebbe luogo verso la curva del tubo e si propagò per 5-6 cm. ancora, con formazione di densa nebbia bianca; nulla di acido solfidrico passò. La velocità del passaggio dell'acido solfidrico e dell'aria era pressochè quella della inspirazione.

Dunque operando in tal modo si ha la nebbia bianca che passa attraverso anche a molta acqua; ma non si ha solfo col-

loidale. Non ho più studiata la natura di questa nebbia; però la sua formazione mi fece pensare agli anelli di Tait e cercai di ottenerli in vari modi, modificando l'apparecchio e le sostanze producenti la nebbia e gli anelli. Tanto più che per spiegare la formazione della nebbia precedente feci passare l'anidride solforica S^2O^6 attraverso all'acqua e vidi che questo composto si prestava benissimo a fornire i detti anelli.

Dalla esperienza precedente dell'incandescenza prodotta coll'acido solfidrico a mezzo della calce sodata, fui condotto alle esperienze che ho esposto più sopra.

Solfo colloidale dall'acido solfidrico con miscela di ossido di mercurio e calce viva oppure con acido solfidrico e gas solforoso. — È noto da lungo tempo (Fr. Selmi e Sobrero) che per l'azione dell'acido solforoso sull'acido solfidrico si produce del solfo in particelle minutissime, che ha proprietà colloidali.

Io l'ottenuto nel modo seguente producendo l'*incandescenza* per l'azione dell'acido solfidrico su una miscela di calce viva ed *ossido mercurico giallo.*

Gr. 10 di calce viva bianca, comune, molto buona e conservata in vasi chiusi alla lampada, mescolati con gr. 6 di *ossido mercurico giallo* (che da lunghissimo tempo era stato preparato in questo laboratorio), furono trattati con 1 litro di gas H^2S e corrente d'aria. La massa annerisce; una parte del solfidrico passa subito oltre nella boccia di Habermann e nel boccione che serve da aspiratore. Si produce molto calore e poco dopo si manifesta una *vivissima incandescenza* [1] con produzione di molto gas solforoso. La temperatura è tale che il vetro del tubo ad U si rammollisce. L'acqua della boccia di Habermann diventa lattiginosa per solfo colloidale che si forma tra H^2S e SO^2 e il solfo pure colloidale si deposita entro il boccione, producendo un curioso fenomeno di precipitazione di solfo minutissimo

---

[1] Si noterà che HgO è fra gli ossidi che sviluppano più calore per l'azione dell'acido solfidrico: circa 45.300 cal. secondo Thomsen (" J. pr. Chem. ", 1879 (2), t. 19, p. 17) e 48.700 secondo Berthelot (" C. R. ", 1874, t. 78, p. 1176).

in forma di arborescenza che cade dalla superficie dell'acqua e va al fondo in spirali, ognuna delle quali è terminata da un anello, che sembra un anello di Tait: al centro del vaso, o per meglio dire al centro della superficie dell'acqua, non si deposita solfo, se tutto rimane in quiete. La vista della caduta di questo solfo colloidale lattiginoso a guisa di grappoli o di stalattiti è bellissima. Nel tubo ad U si trova del mercurio ridotto a specchio metallico e del solfuro di mercurio.

La fig. (C), benchè non ben riuscita, causa il lento e continuo movimento del solfo che cade dall'alto, può dare un'idea dell'interessante fenomeno.

I fumi bianchi che si formano dunque nell'interno dell'apparecchio sono costituiti in questo caso da minute particelle di solfo colloidale, provenienti dalla reazione fra l'acido solfidrico ed il gas solforoso che si produce durante l'incandescenza e che non può venire assorbito dalla calce o dalla barite (perchè l'incandescenza avviene anche colla barite e l'ossido mercurico); invece i fumi o nebbia che si osservano colla calce sodata e l'acido solfidrico sono di natura affatto diversa; questa nebbia non contiene solfo, perchè tanto l'acido solfidrico quanto l'acido solforoso prodotto durante l'incandescenza, vengono assorbiti dalla calce sodata, che si distingue dai miscugli appunto pel suo straordinario potere assorbente; ed invero l'acqua della boccia Habermann, come quella dell'aspiratore, col riposo ridiventa limpidissima.

Visto questo fenomeno curioso, ho voluto provare a far agire i due gas: solfidrico e solforoso, in modo che lo solfo formatosi cadesse lentamente dall'alto dell'acqua.

Mediante un aspiratore a caduta d'acqua, in forma di grossa boccia con tubolatura al fondo, ho fatto passare una corrente dei due gas H^2S e SO^2 contenuti in due boccie diverse, una di circa 1 litro di H^2S e l'altra di $^1/_2$ litro di SO^2. Quando i due gas entrano nel boccione reagiscono appena in contatto dell'acqua, la quale devesi fare scolare con getto moderato dalla tubulatura in basso, munita di un tubo di vetro e pinza. Così si produce del solfo colloidale di un bel colore *azzurro celeste*, quasi si direbbe fluorescente, a forma di glomeruli terminati ad anello come quelli di Tait. Se l'acqua del boccione non è perfettamente tranquilla ed ha, ad esempio, un lieve movimento

rotatorio o giratorio da sinistra a destra, allora il solfo si precipita lentamente quasi come in sottili fili di cotone azzurro-

Fig. C.

gnolo. In un modo o nell'altro il fenomeno è molto bello e può costituire una elegante e persuasiva esperienza di lezione sul

solfo colloidale e sul modo di separarsi quando l'acqua è in leggero movimento dall'alto al basso, o rotatorio.

Questo ed altri fenomeni analoghi, come quelli degli anelli, dovrebbero essere cinematografati.

Bisognerebbe esperimentare anche con liquidi diversi dall'acqua, per vedere quale influenza vi sarebbe sul modo di caduta del solfo. In questo senso non ho fatto delle esperienze.

La teoria di Lord Kelvin e di Helmholtz degli atomi-vortici non tiene in conto le cariche elettriche degli atomi e non soddisfa più in tutto alle moderne conoscenze. Però, osserva Tunzelmann, la teoria più generale degli elettroni non esclude quella degli atomi-vortici (1).

I fenomeni di rapida rotazione degli anelli-vortici che ho descritti più sopra insieme a quelli del solfo colloidale in movimento che si possono effettuare con composti chimici diversi, e probabilmente con elementi allo stato colloidale, quale è il solfo, dovrebbero essere studiati dai fisici. Bisognerebbe anche esperimentare con elementi e composti chimici allo stato di finissima nebbia o fumo od anche in polvere colloidale, ma di valenza e costituzione diverse; quale, a cagion d'esempio, una serie di sali ammoniacali e di amine organiche e di altri composti organici.

Meglio poi se si potesse sperimentare in larghi ambienti diversi dall'aria; in camere chiuse ove fossero dei gas diversi dall'aria e farvi penetrare gli anelli. Io non ho a mia disposizione i mezzi per fare queste esperienze, che però credo non sarebbero prive d'importanza.

Come pure sarebbe da esperimentare in ambienti in cui l'aria o altro gas potesse essere rarefatto a diversi gradi. E così mettersi in condizione di produrre i vari anelli in ambienti diversi dall'atmosfera. Tanto più perchè noi esperimentando solamente nell'atmosfera terrestre non possiamo con sicurezza trarre

---

(1) G. W. De Tunzelmann, *La teoria elettrica ed il Problema dell'Universo considerato dal punto di vista fisico*. Trad. ital., 1914, pp. 65-66.

Si vegga anche il capitolo IX, *La nuova teoria della materia e le sue basi sperimentali* in *Nuova Enciclopedia di Chimica*, vol. I.

delle conclusioni che valgano per tutto l'Universo, per tutta la Natura.

Noi sappiamo che la composizione chimica dell'atmosfera terrestre (che è un nulla relativamente all'Universo!) varia molto coll'altezza, e secondo Wegener [1] l'atmosfera nostra a diverse altezze avrebbe la composizione chimica seguente in 100 volumi:

	al livello del mare	a 80 chilom. Pressione 0,0193	a 100-120 chilom. Pressione 0,0106-0,0090
Geocoronium	0,00058	19	29
Idrogeno	0,0033	55	67
Elio	0,0005	4	4
Azoto	78,1	21	1
Ossigeno	20,9	1	—
Argon	0,937	—	—

E a 500 chilometri e pressione 0,00162 mm. si avrebbero solamente:

Geocoronium 93
Idrogeno . . . . 7.

Secondo Jean Becquerel la nostra atmosfera a 100 chilom. deve contenere essenzialmente dell'idrogeno e in 100 volumi:

Idrogeno 99,44
Elio 0,46
Azoto 0,10
Altri gas . . . . 0,00.

Dunque a me pare che le esperienze degli Autori da me citati, e quelle da me ideate ed eseguite, sempre operando nell'aria atmosferica, non possano forse servire a generalizzazioni

---

[1] A. Wegener, *Die Erforschung der obersten Atmosphärenschichten* in "Phys. Zeits.", 1911, XII; "Rev. Scient.", 1° febbraio 1911, p. 595; "Zeits. f. anorg. Chem.", 1912, t. 75, p. 107; e I. Guareschi, *La vita dell'idrogeno nell'armonia della Natura.* Conferenza tenuta il 20 marzo 1914.

sulla costituzione della materia, per quanto siano interessanti sotto vari riguardi.

Ad ogni modo è un campo sperimentale da non essere trascurato, usando mezzi e materiale adeguati. Nè va trascurato di esaminare quale possa essere l'influenza elettrica o magnetica sulla formazione, sul movimento e sulla stabilità degli anelli [1].

Torino, R. Università, Laboratorio di Chimica farmaceutica e tossicologica. Marzo 1918.

---

[1] Ho tralasciato la bibliografia dei lavori sugli anelli di Tait, perchè tutti i fisici che se ne sono occupati sino ad ora esperimentarono solamente col cloruro di ammonio.

Sopra alcune formole del Mayevski relative al 2° problema balistico fondamentale.

Nota dell'Ing. FILIPPO BURZIO.

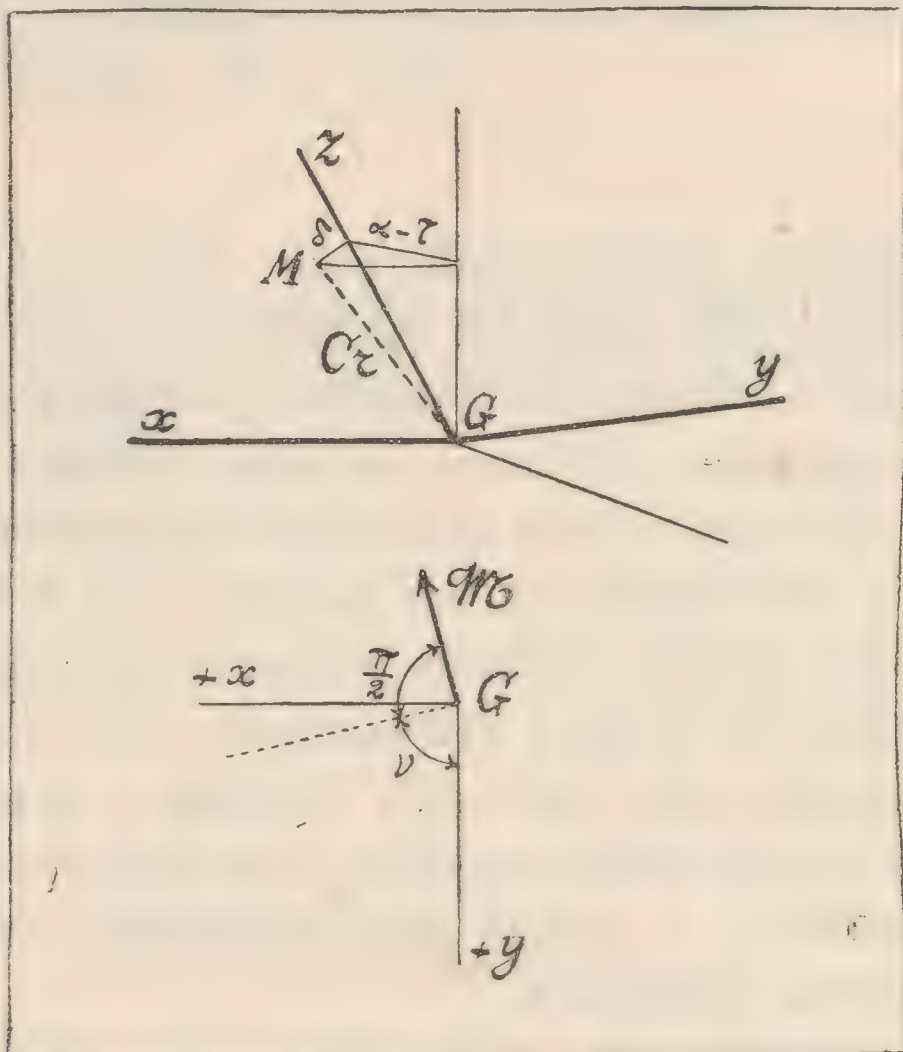
Il 2° Problema fondamentale della Balistica esterna, cioè la determinazione del moto del proietto relativo al suo baricentro, presenta analogia col cosidetto problema della trottola studiato da Lagrange e Poisson, se alla verticale passante per il punto fisso di quest'ultima si faccia corrispondere la tangente alla traiettoria del baricentro del proietto. Le differenze consistono in ciò, che quella verticale è una retta fissa, mentre la tangente modifica la propria orientazione nello spazio, e che la coppia acceleratrice nel caso della trottola è dovuta alla gravità, la quale è, agli effetti specifici, una forza costante, mentre nel caso del proietto è dovuta alla resistenza dell'aria, che è variabile in modo complesso.

Il metodo seguìto da taluni Autori per poter applicare al problema balistico la soluzione dell'altro consiste nel supporre la tangente immobile e la coppia costante: ipotesi che non è giustificata nemmeno entro limiti di larga approssimazione.

Quando, pertanto, nello studio della questione, s'intenda seguire tale indirizzo, della riduzione al moto della trottola, e, cioè, del riferimento alla tangente, un metodo rigoroso è il seguente.

Teniamo conto del fatto che la tangente è dotata di un moto di abbassamento nel piano di tiro (la cui velocità angolare, $-\frac{d\tau}{dt}$, se τ è l'inclinazione della tangente sull'orizzonte, è data dal Problema balistico principale) riferendo il proietto a un triedro trirettangolo $Gxyz$, mobile nel corpo e nello spazio, in cui l'asse x sia perpendicolare al piano di tiro, che sarà quindi il piano yz, e l'asse z coincida con la parallela alla tangente condotta per il baricentro G. Questo triedro è dotato di

un moto di rotazione conosciuto, che si effettua attorno all'asse x, ed ha per velocità angolare $-\frac{d\tau}{dt}$.

Se indichiamo rispettivamente con PQR, $\sigma_x \sigma_y \sigma_z$, $S_x S_y S_z$ le componenti, sugli assi xyz, della velocità angolare del triedro $Gxyz$, del momento della quantità di moto del proietto, del momento $\mathfrak{M}$ della coppia perturbatrice dovuta alla resistenza dell'aria, le equazioni del moto, ottenute applicando il Principio del momento della quantità di moto, sono le seguenti (¹):

$$(1) \qquad \begin{cases} \frac{d\sigma_x}{dt} + Q\sigma_z - R\sigma_y = S_x \\ \frac{d\sigma_y}{dt} + R\sigma_x - P\sigma_z = S_y \\ \frac{d\sigma_z}{dt} + P\sigma_y - Q\sigma_x = S_z \end{cases}$$

Siano B, C rispettivamente il momento d'inerzia equatoriale ed assiale del proietto, pqr le componenti della velocità

(¹) V. Appell, *Traité de Mécanique Rationnelle*, vol. II.

angolare del proietto sui 3 assi $\xi \eta \zeta$ principali centrali d'inerzia, di cui ζ coincida con l'asse di figura GA: il momento GM della quantità di moto vale

$$GM = \sqrt{B^2 (p^2 + q^2) + C^2 r^2}.$$

Facciamo l'ipotesi semplificativa fondamentale del 2° Problema, che, cioè, GM e GA coincidano, giustificata dalla considerazione che, per la rapidissima rotazione del proietto attorno all'asse di figura, questo, e gli assi di rotazione istantanea e del momento della quantità di moto, devono essere assai vicini: essa porta di conseguenza:

$$GM = Cr.$$

Abbiamo allora, per le quantità che figurano nelle equazioni (1), indicando con δ l'angolo dell'asse di figura con la tangente, e con ν l'angolo del piano di tiro col piano individuato dalla tangente e dall'asse di figura del proietto, piano che contiene la coppia perturbatrice, e che perciò è detto *piano di resistenza*:

$$\begin{cases} P = -\dfrac{d\tau}{dt} \\ Q = R = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_x = Cr \operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} \nu \\ \sigma_y = Cr \operatorname{sen} \delta \cos \nu \\ \sigma_z = Cr \cos \delta \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_x = \mathfrak{M} \cos \nu \\ S_y = -\mathfrak{M} \operatorname{sen} \nu \\ S_z = 0 \end{cases}$$

Le equazioni (1) diventano:

$$\begin{cases} Cr \dfrac{d(\operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} \nu)}{dt} = \mathfrak{M} \cos \nu \\ Cr \dfrac{d(\operatorname{sen} \delta \cos \nu)}{dt} + \dfrac{d\tau}{dt} Cr \cos \delta = -\mathfrak{M} \operatorname{sen} \nu \\ -Cr \operatorname{sen} \delta \dfrac{d\delta}{dt} - \dfrac{d\tau}{dt} Cr \operatorname{sen} \delta \cos \nu = 0 \end{cases}$$

Dalla 3ª equazione abbiamo subito:

$$\frac{d\delta}{dt} = -\frac{d\tau}{dt}\cos\nu.$$

Dalle 2 prime equazioni, moltiplicando la prima per $\cos\nu$, la 2ª per $\operatorname{sen}\nu$, e sottraendo m. a m.:

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{\mathfrak{M}}{Cr\operatorname{sen}\delta} + \frac{d\tau}{dt}\frac{\operatorname{sen}\nu}{\tan\delta}.$$

Ricorrendo alla 3ª:

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{\mathfrak{M}}{Cr\operatorname{sen}\delta} - \frac{\tan\nu}{\tan\delta}\frac{d\delta}{dt}.$$

Risulta il sistema delle 2 equazioni differenziali negli angoli δ e ν che individuano la posizione del proietto rispetto alla tangente:

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\delta}{dt} &= -\frac{d\tau}{dt}\cos\nu \\ \frac{d\nu}{dt} &= \frac{\mathfrak{M}}{Cr\operatorname{sen}\delta} - \frac{\tan\nu}{\tan\delta}\frac{d\delta}{dt}. \end{aligned} \right.$$

Le $\frac{d\nu}{dt}$, $\frac{d\delta}{dt}$ sono chiamate rispettivamente, per analogia con le locuzioni astronomiche: velocità angolari di *precessione* e di *nutazione* del proietto.

***

Si sono dedotte così, con metodo rigoroso e particolarmente semplice, due formole fondamentali per il moto dei proietti relativo al baricentro, già date dal gener. MAYEVSKI (1), il quale le dimostra però in modo affatto diverso, e utilizzando espressioni cui era pervenuto risolvendo dapprima il problema nell'ipotesi della tangente fissa, il che rende meno persuasivo il procedimento. Ciò spiega forse perchè esse non siano citate in

(1) N. MAYEVSKI, *Traité de Balistique extérieure*, pag. 172.

Opere posteriori, le quali tornano a dare, come espressione della velocità angolare di precessione del proietto, le formole della trottola, rispetto a cui, come si disse, queste rappresentano un progresso.

La dimostrazione sopra indicata adotta invece la sola ipotesi semplificativa, e molto approssimata, della coincidenza dell'asse di figura col momento della quantità di moto, e conferisce quindi, sotto questo riguardo, alle formole del Mayevski lo stesso grado di esattezza della teoria del De Sparre [1], di cui quell'ipotesi è il fondamento: con la differenza, a favore della prima, che il de Sparre considera poi il moto sferico di un punto come un moto piano, il che è ammissibile solo pei piccoli valori dell'angolo δ; mentre la nostra dimostrazione non ricorre ad altre approssimazioni.

Le formole del Mayevski appaiono quindi le più approssimate che si abbiano attualmente nella soluzione del 2° Problema balistico: *anzi la prima, relativa alla velocità di nutazione* $\frac{d\delta}{dt}$, *può astrarre anche dall'ipotesi della coincidenza degli assi di figura e del momento della quantità di moto.*

La loro integrazione è, però, ardua, e i metodi approssimati indicati dal M. assai laboriosi. Esse hanno invece applicazioni indirette, e servono anche per dimostrare importanti proprietà del moto dei proietti, alcune delle quali sono diverse, od opposte, a quelle comunemente enunciate sulla base dell'analogia col problema della trottola.

Ad esempio:

I. **Teorema del massimo scostamento.** *Il massimo scostamento* δ *dell'asse di figura dalla tangente si ha quando il piano di resistenza è normale al piano di tiro.*

II. *La velocità di precessione non è indipendente dalla nutazione.*

III. *La velocità di nutazione non è grande, anzi è sempre minore della velocità di abbassamento della tangente.*

Torino, 9 aprile 1918.

---

[1] Cfr. Charbonnier, *Balistique extérieure rationnelle*, vol. II, pag. 310 e seg.

Conducibilità ed assorbimento dei vapori di sodio

Nota di ADOLFO CAMPETTI

Parte II.

Resultati delle esperienze

1. — In una nota precedente è stato descritto il dispositivo sperimentale per la misura della conducibilità del vapore di sodio, collegando uno degli elettrodi E ad un elettroscopio a foglia di alluminio (con lettura a scala riflessa e microscopio) e ponendo l'altro elettrodo affacciato E' in comunicazione col suolo, ed è stato stabilito che, tenuto conto della capacità del sistema, la intensità di corrente per unità di area è data da:

$$i = 1{,}17 . 10^{-11} \Delta V \text{ Ampère}$$

se ΔV rappresenta la caduta di potenziale in Volt dell'elettrodo E durante un secondo.

Contemporaneamente alla determinazione della conducibilità del vapore se ne determinò pure l'assorbimento per la doppia D, cercando sopratutto di stabilire con sicurezza la temperatura a cui, a seconda delle circostanze, tale assorbimento si inizia. A tale scopo si usò come sorgente luminosa o la porzione gialla dello spettro di una lampada ad arco da 15 Ampère, ovvero la luce dell'arco stesso filtrata attraverso ad una soluzione satura di bicromato potassico (spessore 15 centimetri), che, sotto tale spessore, lascia passare soltanto una zona dal rosso all'inizio del verde dello spettro, o infine in qualche caso la luce bianca dell'arco senz'altro.

Il fascio luminoso era in ogni caso reso parallelo mediante un sistema di lenti in modo da attraversare il tubo longitudi-

nalmente tra i due elettrodi E ed E', penetrando ed uscendo dalla stufa mediante due aperture affacciate praticate nei tappi di amianto di chiusura delle stufe stesse, aperture munite poi di lastrina di vetro; il fascio emergente era inviato od eventualmente concentrato mediante una lente cilindrica sopra la fenditura di uno spettroscopio Krüss (con prisma di Rutherford) alquanto difettoso come costruzione meccanica, ma assai luminoso e adatto quindi per esame di spettri di assorbimento.

In tutte le esperienze, affine di essere sicuri di operare con vapore non saturo, si manteneva una differenza di temperatura di una trentina di gradi tra il tubo contenente il sodio e il tubo più largo contenente gli elettrodi; perciò nelle tabelle è indicata soltanto la temperatura del tubo contenente gli elettrodi.

2. — Anzitutto si eseguirono esperienze preliminari per esaminare la dispersione a bassa temperatura ed a temperatura elevata nel vuoto dato dalla Gaede, senza sodio: naturalmente qui la dispersione dipende in grande misura dal maggiore o minore isolamento dell'elettrodo E mediante il cilindretto di ambra e perciò non può essere del tutto identica in tutte le esperienze: tuttavia si constatò che nell'aria o nell'azoto rarefatti non si ha ionizzazione sensibile sino a 470° (temperatura massima raggiunta in queste esperienze); infatti per una differenza di potenziale di 280 Volt tra i due elettrodi la intensità i di corrente era, tanto alla temperatura ordinaria quanto a 470°, intorno a $0{,}04 \,.\, 10^{-11}$ Ampère, senza alcun carattere di conducibilità unipolare.

3. — Diamo ora qui i resultati solo di alcune delle esperienze relative alla conducibilità ed all'assorbimento a varie temperature: tralascio le esperienze in cui l'assorbimento si esaminava colla luce gialla dello spettro dell'arco, perchè meno sicure, data la poca intensità della luce che giungeva sulla fenditura dello spettroscopio: perciò qui ci si riferisce sempre per l'assorbimento alla luce dell'arco filtrata attraverso la soluzione di bicromato.

Nelle tabelle che seguono, V indica il potenziale medio dell'elettrodo E in comunicazione coll'elettroscopio, θ la temperatura nel tubo contenente gli elettrodi, i la intensità media di

corrente e precisamente con i_0 si indica la intensità quando il vapore di sodio è all'oscuro, con i_l la intensità quando è attraversato dalla luce: il segno + o — si riferisce al segno della carica dell'elettrodo *E*. Le intensità sono espresse in Ampère $\times 10^{-11}$.

θ	*V*	i_0 +	i_l +	i_0 —	i_l —	*Osservazioni*
20°	279	0,015	0,015	0,014	0,015	—
406°	279	0,051	0,080	0,035	0,060	—
460°	279	0,78	0,85	0,60	0,65	assorbimento nettissimo
405°	—	—	—	—	—	assorbimento netto
307°,7	—	—	—	—	—	ancora traccie di assorb.
300°	—	—	—	—	—	cessa l'assorbimento

Da questa prima esperienza appare intanto che la conducibilità del vapore di sodio, anche all'oscurità, cresce rapidamente al disopra di 400° e che soltanto assai al disopra di 400° si inizia l'assorbimento della doppia *D*. È però opportuno riferire per disteso i resultati di una seconda esperienza nella quale le determinazioni si succedono ad intervalli di temperatura più ristretti.

θ	*V*	i_0 +	i_l +	i_0 —	i_l —	*Osservazioni*
20°	279	0,016	0,017	0,018	0,018	—
300°,5	"	0,015	0,016	0,015	0,018	—
369°	"	0,018	0,018	0,020	0,021	nessun assorbimento
415°	"	0,050	0,062	0,060	0,063	" "
451°,5	"	0,70	0,71	0,68	0,70	assorbimento nettissimo
461°,5	"	0,91	0,94	0,85	0,90	" "
335°	"	—	—	—	—	assorbimento debole
305°	"	—	—	—	—	nessun assorbimento

Da queste esperienze, che sono state eseguite facendo il vuoto colla Gaede sino alla temperatura di circa 300° e poi chiudendo la comunicazione, si possono trarre parecchie conseguenze. In primo luogo l'effetto fotoelettrico appare con questa luce filtrata nullo o minimo: la conducibilità, che fino a 400° si mantiene dell'ordine di grandezza di quella di un gas ordinario, cresce assai rapidamente al disopra di 400° senza notevole carattere unipolare: l'assorbimento per le D comincia soltanto ad una temperatura compresa tra 415° e 450°; però, una volta iniziato, si mantiene, per temperature discendenti, sino verso i 300°. Ulteriori esperienze, qui non riferite per disteso, hanno permesso di fissare con maggior precisione a circa 430° la temperatura a cui si inizia l'assorbimento e a circa 310° quella a cui sparisce a temperatura discendente.

Potrebbe nascere il dubbio che la persistenza dell'assorbimento sino a circa 310° a temperatura decrescente dipenda da ciò, che, in tali condizioni, la densità del vapore sia, per ogni temperatura, superiore alla densità corrispondente durante l'aumento di temperatura: insomma si potrebbe dubitare che, quando aumenta la temperatura, l'assorbimento tardi a manifestarsi, soltanto perchè non si è ancora vaporizzatata una quantità sufficiente di sodio; ma, a parte la considerazione che la lentezza di riscaldamento e la lunga permanenza dell'apparecchio alla temperatura a cui si esperimenta permettono al vapore di raggiungere in ogni caso la densità di equilibrio, l'obiezione è completamente distrutta dalle esperienze eseguite tenendo l'apparecchio in comunicazione permanente colla pompa Gaede in azione; anche in queste condizioni infatti l'assorbimento comincia a manifestarsi verso i 430° e sparisce intorno a 310°.

Anche nelle esperienze eseguite senza alcuna differenza di potenziale tra E ed E', che erano invece entrambi in comunicazione col suolo, i resultati relativi all'assorbimento furono del tutto identici ai precedenti. Questo era in realtà da attendere; poichè, avendo impedito agli elettroni emessi dalla superficie del metallo fuso di giungere nel tubo attraversato dal fascio luminoso, una ionizzazione per urto per fatto di questi elettroni (quando esiste il campo), e quindi una dipendenza dell'assorbimento dall'esistenza del campo non era da aspettare.

4. — Di fronte ai resultati precedenti circa la temperatura di assorbimento, era naturale intanto di farsi questa domanda, cioè come mai l'assorbimento delle D nei vapori di sodio sia stato osservato di frequente a temperature assai inferiori, tanto è vero che il Füchtbauer (*l. c.*) asserisce di aver potuto constatare l'assorbimento già a 190°. Escludo intanto che nelle mie esperienze io abbia avuto ritardo nell'osservare l'assorbimento per avere adottato un dispositivo di troppo scarsa sensibilità: e lo escludo sia per la bontà della parte ottica dell'apparecchio, sia anche perchè il fascio luminoso attraversava uno spessore di vapore di ben dodici centimetri.

Ma a quella domanda si può rispondere osservando che in generale nelle esperienze precedenti e in particolare in quelle del Füchtbauer si lavorava con vapore saturo ed oltre a questo: 1° non è certo che il sodio fosse in stato di grande purezza e le esperienze già citate del Fredenhagen hanno mostrato che piccole quantità di gas estranei mescolati al vapore di sodio aumentano enormemente l'assorbimento; tale effetto potrebbe perciò essere prodotto pure da residui vaporizzati dell'olio di nafta, dal quale il sodio adoperato non fosse stato depurato completamente; 2° gli elettroni provenienti dalla superficie del metallo sono presenti nello spazio attraversato dal fascio luminoso; 3° le esperienze di assorbimento furono, a quanto pare, eseguite con luce bianca.

5. — Era perciò opportuno di esaminare intanto se, operando in luce bianca, si avessero, sia riguardo alla conducibilità del vapore, sia relativamente alla temperatura di primo assorbimento, resultati differenti da quelli precedentemente riferiti.

Una prima esperienza dette i resultati registrati nella tabella che qui segue, nella quale θ, V i_0, i_l hanno lo stesso significato che nelle tabelle precedenti, mentre i_b+ e i_b- rappresentano (sempre in Ampère $\times 10^{-11}$) le intensità di corrente ottenute con luce bianca (a seconda del segno della carica dell'elettrodo E).

θ	V	$i_0 +$	$i_l +$	$i_0 -$	$i_l -$	$i_b +$	$i_b -$	*Osservazioni*
20°	279	0,017	0,016	0,017	—	—	—	—
254°,9	"	0,017	0,027	0,035	0,037	—	—	—
326°,3	"	0,016	0,030	0,032	0,037	0,19	0,11	nessun assorbimento
405°,7	"	0,050	0,080	0,035	0,070	1,50	0,80	assorb. netto in luce bianca, osservabile poi anche colla luce filtrata

Non essendo però in questa esperienza abbastanza bene definita la temperatura a cui si inizia l'assorbimento, ripeto la determinazione, operando ad intervalli di temperatura più piccoli.

θ	V	$i_0 +$	$i_0 -$	$i_b +$	$i_b -$	*Osservazioni*
20°	279	0,015	0,014	0,016	0,015	—
286°	"	0,019	0,016	0,019	0,016	—
310°	"	0,031	0,016	0,17	0,017	—
345°	"	0,042	0,020	0,50	0,027	nessun assorbimento
370°	"	0,050	0,030	0,70	0,040	" "
406°	"	0,060	0,040	1,60	0,80	assorbimento netto, che permane anche osservando con luce filtrata

Queste esperienze mostrano che, operando con luce bianca, si manifesta l'assorbimento a temperatura inferiore, cioè verso i 400°: sempre però l'assorbimento è accompagnato da notevole conducibilità del vapore, che si presenta però in questo caso con carattere manifesto di dissimmetria, cioè assai più elevata per la elettricità positiva che per la negativa; questa dissimmetria trova la sua naturale spiegazione ammettendo un'*azione fotoelettrica della luce sugli atomi di sodio*, con emissione quindi di elettroni negativi.

Riguardo all'assorbimento osservato in queste esperienze, si presenta facilmente questa obiezione, che cioè l'assorbimento si osservi a temperatura più bassa in luce bianca, solo perchè sono così migliori le condizioni di osservazione allo spettroscopio: ma quest'obiezione perde ogni valore per questo fatto costantemente osservato, che cioè, *una volta manifestatosi* (e si potrebbe dire provocato) *l'assorbimento in luce bianca, questo si riconosce evidentissimo alla stessa temperatura anche interponendo il filtro di soluzione di bicromato.*

È anche notevole che per abbassamento di temperatura l'assorbimento cessa di essere visibile, anche in luce bianca a 310°, come in luce filtrata.

6. — Esaminato, nel paragrafo precedente, quale differenza si ha nei risultati delle esperienze di assorbimento e di conducibilità, quando l'assorbimento si esamini in luce bianca anzichè in luce filtrata, conviene ora tener conto dell'altra circostanza, che cioè in tutte le esperienze precedenti era mantenuta tra il cucchiaio contenente il sodio e il disco una differenza di potenziale, come si disse, di circa 120 Volt, capace di arrestare gli elettroni emessi dalla superficie del sodio fuso. Che cosa accadrà invece se questo campo si sopprime?

In queste condizioni parecchie esperienze del tutto concordanti provarono che l'assorbimento cominciava a manifestarsi nettamente già verso i 340°, sparendo poi per raffreddamento a circa 310°: contemporaneamente si ebbero a queste temperature conducibilità assai elevate con carattere di dissimmetria assai notevole: ad esempio operando all'oscuro in luce bianca si ottenne in una determinazione:

θ	V	$i_0 +$	$i_b +$	$i_0 -$	$i_b -$
345°	279	0,73	5,8	0,6	2,3

Se invece poi di collocare il sodio nel cucchiaio apposito, tenendolo quindi ad una temperatura inferiore di una trentina di gradi a quella che si ha nel tubo contenente gli elettrodi e

attraversato dal fascio luminoso, lo si pone direttamente nel tubo contenente gli elettrodi, in modo cioè da avere il vapore saturo, già a 280° si osservava facilmente l'assorbimento accompagnato da conducibilità notevole. Inoltre, per raffreddamento, poteva ancora osservarsi l'assorbimento a 260°; risultato questo in sufficiente accordo colle più recenti determinazioni del Dunoyer (1), il quale, con uno spessore di vapore di trenta centimetri, ha potuto cominciare ad osservare le righe *D* per assorbimento a 246°.

Queste ultime esperienze hanno per sè poca importanza ed era inutile l'insistervi, perchè non permettevano di giungere ad alcuna utile conclusione positiva; esse sono però interessanti, perchè ci spiegano come altri osservatori, ed ultimo tra questi il Füchtbauer, abbiano potuto osservare l'assorbimento e la conducibilità, a seconda delle condizioni sperimentali, anche a temperature enormemente inferiori a quelle in cui l'assorbimento e la conducibilità si presentano, quando si operi con vapori non saturi e nelle condizioni opportune indicate nelle mie precedenti esperienze.

7. — Le esperienze sopra riferite mostrano dunque che, quando per la misura della conducibilità si scelga il metodo elettrometrico, capace di svelare correnti debolissime, la conducibilità del vapore di sodio non saturo, ottenuto da metallo puro, è (anche eliminando gli elettroni emessi dalla superficie del metallo fuso) all'oscuro e al disopra di 400° gradi notevolmente superiore a quella di un gas rarefatto alla stessa temperatura: di più, nelle condizioni sopradette, l'assorbimento delle *D* è legato strettamente con la conducibilità del vapore e si presenta soltanto quindi al disopra di 400°.

Questo, si intende, quando per esaminare l'assorbimento si adoperi la luce gialla dello spettro continua dell'arco oppure la luce dell'arco filtrata attraverso un forte spessore di soluzione satura di bicromato potassico, nel qual caso non si opera veramente con luce gialla, ma con una regione limitata dello spettro del rosso all'inizio del giallo verde, restando però completamente estinta la parte più rifrangibile.

---

(1) Dunoyer, " Journal de Physique „, 1914.

Se invece si opera in luce bianca, la temperatura a cui si inizia l'assorbimento si abbassa e si eleva la conducibilità con prevalenza di ioni negativi, il che sta a indicare che l'effetto fotoelettrico (nullo sulle pareti od elettrodi colpiti solo da luce diffusa, come lo provano le esperienze senza vapore di sodio) si manifesta anche sugli atomi di sodio allo stato di vapore.

Le presenti esperienze presentano pure qualche relazione con quelle recentissime di Wood e Okano (1) (*Sul potenziale di ionizzazione del vapore di sodio*) e più ancora con quelle di Tate e Doote (2) (*Risonanza e potenziale di ionizzazione del vapore di sodio*): i primi trovano che quando i vapori di sodio sono bombardati da elettroni emessi da un catodo incandescente, viene emessa la doppia D per una velocità degli elettroni corrispondente a 0,5 Volt. Questo risultato, in disaccordo colla teoria dei quanti, viene contradetto da Tate e Doote, i quali asseriscono che invece elettroni aventi una velocità corrispondente a 2,12 Volt collidono, senza ionizzazione, cogli atomi del vapore di sodio e l'energia perduta dall'elettrone collidente è probabilmente irradiata come luce di lunghezza d'onda corrispondente alla riga D, mentre quando gli elettroni hanno una velocità corrispondente a 5,13 Volt il vapore di sodio rimane ionizzato con emissione anche della serie subordinata.

Non è qui il caso di discutere per quale differenza nelle condizioni sperimentali possano essere stati ottenuti risultati così discordanti: certamente, poichè nelle mie esperienze al disopra di 400° la conducibilità del vapore di sodio all'oscuro appare poco differente per le cariche dei due segni e sono esclusi, pel dispositivo adottato, gli elettroni provenienti dalla superficie del sodio fuso, bisogna ammettere che al disopra di questa temperatura abbia luogo una ionizzazione spontanea del vapore, con emissione di elettroni negativi, che potranno verisimilmente unirsi in parte ad atomi neutri formando atomioni negativi, rimanendo poi degli atomioni positivi per quegli atomi che hanno perduto un elettrone.

Se poi il primo assorbimento e quindi la prima emissione

---

(1) Wood e Okano, " Philosophical Magaz. ", vol. 34, settembre 1917.
(2) Tate e Doote, " Washington Acad. Sc. J. ", ottobre 1917.

della riga *D* sia dovuto alla collisione degli elettroni cogli atomi di vapore di sodio, o se invece, conforme alle idee di Stark e Wien, funzionino direttamente da vibratori gli atomioni positivi contenuti nel vapore, le mie esperienze non sono in grado di decidere: sembra però verisimile che i vibratori debbano essere ad ogni modo gli atomioni positivi, giacchè, anche dal punto di vista di Tate e Doote, le collisioni debbono essere più frequenti, per causa del segno opposto delle cariche, e anche più energiche tra gli elettroni e gli atomioni positivi che non tra gli elettroni e gli atomi neutri.

8. — Riassumendo i resultati ottenuti in queste ricerche, posso concludere:

1° Nel vapore di sodio non saturo, tenuto all'oscurità e liberato dagli elettroni emessi dalla superficie del metallo fuso, ha luogo a temperatura elevata una ionizzazione spontanea in volume, ionizzazione che si rende assai ben manifesta al disopra di 400° senza notevole dissimmetria per quanto riguarda il segno della carica dispersa.

2° Questa conducibilità in volume è legata strettamente all'iniziarsi dell'assorbimento della riga *D*, che nelle condizioni sopra dette si manifesta solo verso i 430°, permanendo però, sino a temperatura notevolmente inferiore, a temperatura discendente. La ragione del presentarsi, nelle condizioni comuni di osservazione, l'assorbimento a temperatura assai più bassa, viene chiaramente indicata nella presenza degli elettroni provenienti dalla superficie del metallo fuso o emessi per effetto fotoelettrico sugli atomi del metallo allo stato di vapore.

3° Rimane tuttora molto verisimile che i vibratori emittenti od assorbenti nel vapore di sodio siano per la riga *D* gli atomioni positivi.

Torino, Istituto Fisico della R. Università.
Marzo 1918.

Sulle onde di Rayleigh

Nota del Socio nazionale residente C. SOMIGLIANA

In alcune Note pubblicate recentemente nei Rendiconti della R. Accademia dei Lincei ho dimostrato che le onde di Rayleigh, dette anche onde superficiali, le quali hanno assunto una particolare importanza nella teoria dei fenomeni sismici, si presentano naturalmente nello studio del problema generale della propagazione delle onde piane in un suolo piano. Mi propongo in questa Nota di studiare l'origine di queste onde direttamente sulle equazioni generali del moto, senza tener conto cioè di alcuna condizione superficiale; il che equivale allo studio della loro propagazione in un mezzo in ogni senso illimitato. Si può così pervenire ad una definizione di queste onde più generale di quella originaria, dovuta al loro scopritore, e se ne possono mettere in luce caratteri notevoli ed interessanti sia dal punto di vista cinematico che dinamico.

Conviene richiamare anzitutto le relazioni fondamentali relative alla propagazione delle onde piane.

Siano

$$s = Lx + My + Nz = \text{cost.}$$

le equazioni dei piani d'onda, dove L, M, N sono costanti date qualunque. Siano u, v, w le componenti di un vettore vibrante di direzione fissa nello spazio; perchè la vibrazione sia per onde piane, dovremo avere

$$(1) \qquad u = A\varphi(s, t) \qquad v = B\varphi(s, t) \qquad w = C\varphi(s, t)$$

ove A, B, C sono costanti, φ una funzione da determinarsi. La sostituzione di queste espressioni nelle ordinarie equazioni del moto

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial\theta}{\partial(x, y, z)} + \mu\Delta_2(u, v, w) = \rho\frac{\partial^2(u, v, w)}{\partial t^2}$$

(λ, μ le costanti di Lamè, θ la dilatazione cubica, ρ la densità) porta subito alla seguente condizione

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} : \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} = p^2 \tag{2}$$

ove p è una costante; e inoltre alle equazioni

$$\begin{aligned}(\lambda+\mu)(AL+BM+CN)\,L + \mu(L^2+M^2+N^2)\,A &= A\rho p^2\\ (\lambda+\mu)(AL+BM+CN)\,M + \mu(L^2+M^2+N^2)\,B &= B\rho p^2\\ (\lambda+\mu)(AL+BM+CN)\,N + \mu(L^2+M^2+N^2)\,C &= C\rho p^2.\end{aligned} \tag{3}$$

Da queste equazioni devono risultare i valori di A, B, C, p mentre la (2) dà

$$\varphi = \varphi(s \pm pt).$$

Le equazioni (3) sono lineari ed omogenee in A, B, C; per essere soddisfatte da valori non tutti nulli, dovrà essere nullo il determinante del sistema, il che porta ad un'equazione che determina p. Ponendo

$$L^2 + M^2 + N^2 = \Delta \qquad \frac{\mu\Delta - \rho p^2}{\lambda+\mu} = h$$

e chiamando $D(p)$ il determinante si ha

$$\frac{1}{(\lambda+\mu)^3} D(p) = \begin{vmatrix} L^2+h & LM & LN \\ LM & M^2+h & MN \\ LN & MN & N^2+h \end{vmatrix} = 0,$$

ossia sviluppando

$$h^2(h+\Delta) = 0$$

da cui risulta per determinare p

$$D(p) = (\mu\Delta - \rho p^2)^2\,((\lambda+2\mu)\,\Delta - \rho p^2) = 0.$$

I valori della velocità di propagazione p sono quindi:

$$p_1 = \sqrt{\frac{\mu\Delta}{\rho}} \qquad p_2 = \sqrt{\frac{(\lambda+2\mu)\,\Delta}{\rho}}$$

i quali, quando sia $\Delta = 1$, come è ordinariamente lecito di supporre, dànno i ben noti valori delle velocità di propagazione delle onde trasversali e longitudinali in un mezzo isotropo. Ma per le applicazioni che abbiamo di mira conviene supporre Δ diverso dall'unità.

Ai valori precedenti di p corrispondono per A, B, C valori che sono proporzionali ai minori di 2° ordine del determinante (4). Si trova così

$$\frac{A}{h + M^2 + N^2} = \frac{B}{-LM} = \frac{C}{-LN}$$

e si ha quindi, per $h = 0$, $p = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}\,\Delta}$, ed all'infuori di un fattore costante,

$$A = M^2 + N^2 \qquad B = -LM \qquad C = -LN, \tag{4}$$

ed è perciò soddisfatta la condizione di trasversalità

$$AL + BM + CN = 0.$$

Invece per $h = -\Delta$, $p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}\,\Delta}$ si ha

$$\frac{A}{L} = \frac{B}{M} = \frac{C}{N} \tag{5}$$

e la corrispondente onda è longitudinale [1].

---

[1] A queste formole si può arrivare anche ponendo

$$u, v, w = \operatorname{grad} \Phi(s, t).$$

Si ha allora

$$(L^2 + M^2 + N^2)\,\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}\,\frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$$

e quindi

$$\Phi(s, t) = \Phi\left(s - t\sqrt{\frac{(\lambda + 2\mu)\,\Delta}{\rho}}\right).$$

E analogamente ponendo

$$u, v, w = \operatorname{rot}(\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)$$

Ora l'analisi precedente sussiste sempre qualunque siano i valori L, M, N, purchè non tutti nulli, e continua quindi a sussistere anche se noi supponiamo che siano L, M, N rappresentati da numeri complessi.

Possiamo perciò porre

$$L = l + i\alpha \qquad M = m + i\beta \qquad N = n + i\gamma$$

ove l, m, n, α, β, γ sono nuove quantità arbitrarie, soggette alla sola condizione di non essere tutte simultaneamente nulle. Gli integrali (1) delle equazioni del moto assumono allora forma complessa; ma poichè tali equazioni sono a coefficienti reali, sia la loro parte che la immaginaria forniranno separatamente dei nuovi integrali del movimento. I piani d'onda scompaiono, o almeno vengono sostituiti dalle rette intersezioni dei piani

$$lx + my + nz = \text{cost.} \qquad \alpha x + \beta y + \gamma z = \text{cost.}$$

cioè dalle parallele alla normale comune alle due direzioni (l, m, n) (α, β, γ). Gli elementi che conservano inalterata la loro rigidità durante il moto non sono più piani paralleli, ma rette parallele. Queste onde si potrebbero perciò chiamare *onde rettilinee*. Il procedimento indicato conduce in tal modo alle espressioni complete di infinite nuove forme inattese di movimenti vibratori. Le onde di Rayleigh ne sono un caso particolare.

Per studiare questi nuovi tipi d'integrali del moto, possiamo, senza perdere in generalità, supporre che la direzione (l, m, n) coincida coll'asse delle z. Avremo allora

$$L = i\alpha \qquad M = i\beta \qquad N = n + i\gamma$$

---

le Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 devono soddisfare all'equazione

$$(L^2 + M^2 + N^3)\,\frac{\mu}{\rho}\,\frac{\partial^2\Psi}{\partial s^2} = \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}$$

e quindi si ha

$$\Psi_i = \Psi_i\left(s - t\sqrt{\frac{\mu\Delta}{\rho}}\right) \qquad i = 1, 2, 3.$$

È facile dedurre da queste espressioni le formole trovate.

e per considerare tutti i casi possibili dovremo tener conto delle (4) ed anche delle altre analoghe determinazioni che se ne deducono per simmetria.

Troviamo così le tre seguenti determinazioni pei coefficienti A, B, C nel caso della trasversalità

$$\begin{array}{lll} A=n^2-\beta^2-\gamma^2+2in\gamma & A=\alpha\beta & A=-(n+i\gamma)i\alpha \\ B=\alpha\beta & B=n^2-\alpha^2-\gamma^2+2in\gamma & B=-(n+i\gamma)i\beta \\ C=-i\alpha(n+i\gamma) & C=-i\beta(n+i\gamma) & C=-(\alpha^3+\beta^2) \end{array}$$

$$s=nz+i(\alpha x+\beta y+\gamma z).$$

Se poi supponiamo che il piano zx sia orientato in modo da contenere la direzione (α, β, γ) avremo $\beta=0$; ed i valori precedenti pei coefficienti A, B, C divengono, sopprimendo i fattori comuni ad una stessa terna,

$$\begin{array}{lll} A=n+i\gamma & A=0 & A=n+i\gamma \\ B=0 & B=n^2-\alpha^2-\gamma^2+2in\gamma & B=0 \\ C=-i\alpha & C=0 & C=-i\alpha \end{array}$$

$$s=nz+i(\alpha x+\gamma z)$$

dando luogo così a due soli casi distinti, nei quali il vettore vibrante giace nel piano zx, oppure è parallelo all'asse delle y. Nel primo caso abbiamo per le componenti di questo vettore

$$\begin{aligned} u &= (n+i\gamma)\,\varphi\,(nz+i(\alpha x+\gamma z)-p_1 t) \\ v &= 0 \\ w &= -i\alpha\varphi\,(nz+i(\alpha x+\gamma z)-p_1 t) \end{aligned} \tag{5}$$

e nel secondo

$$\begin{aligned} u &= 0 \\ v &= \varphi\,(nz+i(\alpha x+\gamma z)-p_1 t) \\ w &= 0 \end{aligned}$$

mentre in entrambi

$$p_1=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}(n^2-\alpha^2-\gamma^2+2in\gamma)}$$

e la velocità di propagazione assume così forma complessa. Noi porremo $p_1 = p + iq$.

Per avere un'idea più precisa delle vibrazioni che sono rappresentate dalle formole precedenti conviene prendere per φ un'espressione esponenziale

$$\varphi(\xi) = e^{\xi}.$$

Avremo allora dalle (5)

$$\begin{aligned} u &= (n + i\gamma)\, e^{(nz - pt) + i(\alpha x + \gamma z - qt)} \\ w &= -\, i\alpha e^{(nz - pt) + i(\alpha x + \gamma z - qt)} \end{aligned}$$

e quindi, separando la parte reale,

$$\begin{aligned} u &= e^{(nz - pt)} \{ n \cos(\alpha x + \gamma z - qt) - \gamma \operatorname{sen}(\alpha x + \gamma z - qt) \} \\ w &= e^{(nz - pt)}\, \alpha \operatorname{sen}(\alpha x + \gamma z - qt). \end{aligned}$$

La parte immaginaria dà luogo ad una vibrazione che non differisce da questa che per un cambiamento di fase.

Sono queste vibrazioni assai notevoli in quanto possono essere considerate come onde piane propagantisi nella direzione della normale al piano

$$\alpha x + \gamma z = \text{cost.}$$

ma che nello stesso subiscono uno *smorzamento* nel tempo, e un *assorbimento* nella direzione z, mentre la velocità q di propagazione dipende dalla direzione della propagazione.

Se supponiamo $\gamma = 0$, possiamo porre

$$(6) \qquad \begin{aligned} u &= n e^{nz} \cos(\alpha x - qt) \\ w &= \alpha e^{nz} \operatorname{sen}(\alpha x - qt) \qquad q = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}(\alpha^2 - n^2)} \end{aligned}$$

supponendo $\alpha^2 - n^2 > 0$. Sono queste le vibrazioni trasversali di Rayleigh; e noi possiamo mettere meglio in evidenza la dipendenza fra la velocità di propagazione ed il coefficiente di assorbimento e la frequenza ponendo

$$\alpha = \frac{2\pi}{\Lambda} \qquad q = \frac{2\pi}{T}.$$

Sarà così Λ la lunghezza d'onda, T il periodo; ed avremo, indicando con V la velocità di propagazione dell'onda, che avviene in questo caso nella direzione dell'asse x,

$$V = \frac{q}{\alpha} = b\sqrt{1 - \frac{\Lambda^2 n^2}{4\pi^2}}$$

ove b rappresenta la ordinaria velocità di propagazione delle onde trasversali. Quando sia nullo il coefficiente di assorbimento n, la velocità V diviene uguale a b, ed indipendente dalla lunghezza d'onda Λ.

La formola precedente concorda colle formole a cui porta la teoria ordinaria dell'assorbimento (1), ma vi è nel caso nostro una differenza sostanziale nelle condizioni del fenomeno. Difatti nella ordinaria teoria l'assorbimento è essenzialmente connesso con una dispersione d'energia, che nell'ipotesi elettro-magnetica dipende da una parziale conducibilità del mezzo dielettrico, e che viene compensata da una produzione di calore per effetto Joule. Nel caso nostro invece le equazioni fondamentali del moto ammettono senza restrizione il principio della conservazione dell'energia, e tuttavia nelle vibrazioni si ha assorbimento e dispersione, nel senso ottico, cioè dipendenza della velocità di propagazione dalla lunghezza d'onda. Ed è questa la caratteristica più notevole dal punto di vista dinamico delle onde che abbiamo studiato. La possibilità di un tal fatto si spiega osservando che in questo caso assorbimento e dispersione vengono a compensarsi energeticamente fra loro, così che l'un fenomeno si presenta come il compenso energetico esatto dell'altro, nè vi è necessità di ricorrere ad una produzione di calore per rispettare il principio della conservazione dell'energia.

Si può anche pensare che in ogni caso questo principio di compensazione energetica possa dare, almeno in parte, una spiegazione delle relazioni che effettivamente esistono fra i due fenomeni dell'assorbimento e della dispersione. Ma le vibrazioni in discorso hanno caratteri troppo speciali, perchè possano pre-

---

(1) Drude, *Lehrbuch der Optik*, Absch. II, Kap. IV, o anche Drude-Boll, *Précis d'Optique*, T. II, Troisième Partie, Chap. VI.

starsi come fondamento di una tale spiegazione da un punto di vista generale.

Notevole è anche il fatto che per queste onde non possiamo più considerare i raggi corrispondenti come determinati dalle normali ai piani d'onda, $x = \text{cost.}$, nelle equazioni (6). Se infatti ricorriamo, per determinare il raggio, corrispondente alla vibrazione, al concetto dinamico di linea di propagazione dell'energia, come ha indicato recentemente il prof. Maggi [1], con un felice ravvicinamento delle idee di Kirchhoff e Poynting, troviamo linee ben diverse dalle normali, e che non sono nemmeno rette.

Secondo la ricordata definizione il flusso unitario d'energia attraverso un elemento superficiale ds di normale n, risulta uguale all'espressione

$$-\left(X_n \frac{\partial u}{\partial t} + Y_n \frac{\partial v}{\partial t} + Z_n \frac{\partial w}{\partial t}\right) ds$$

ove X_n, Y_n, Z_n, sono le componenti della tensione corrispondente a quell'elemento. Perciò gli elementi superficiali attraverso ai quali il flusso è nullo sono definiti dall'equazione

$$P \frac{\partial x}{\partial n} + Q \frac{\partial y}{\partial n} + R \frac{\partial z}{\partial n} = 0 \tag{7}$$

ove

$$P = X_x \frac{\partial u}{\partial t} + X_y \frac{\partial v}{\partial t} + X_z \frac{\partial w}{\partial t}$$

$$Q = Y_x \frac{\partial u}{\partial t} + Y_y \frac{\partial v}{\partial t} + Y_z \frac{\partial w}{\partial t}$$

$$R = Z_x \frac{\partial u}{\partial t} + Z_y \frac{\partial v}{\partial t} + Z_z \frac{\partial w}{\partial t} .$$

La relazione (7) non definisce un elemento superficiale unico, ma un fascio di elementi, il cui asse è da considerarsi come la direzione del raggio nel punto che si considera, in quanto è l'unica secondo cui possa avvenire un flusso d'energia. Le equazioni differenziali del raggio sono perciò

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} .$$

---

[1] Maggi G. A., *Sulla definizione del raggio luminoso nell'ottica fisica*, " Nuovo Cimento ", vol. VII, 1914.

Nel caso della vibrazione rappresentata dalla (6), ponendo per brevità

$$h = e^{nz} \operatorname{sen}(\alpha x - qt) \qquad k = e^{nz} \cos(\alpha x - qt)$$

si trova

$$X_x = -2\mu n\alpha h \qquad Z_z = 2\mu\alpha n h \qquad X_z = \mu(\alpha^2 + n^2) k$$

mentre le rimanenti componenti di tensione sono nulle; inoltre

$$\frac{\partial u}{\partial t} = nqh \qquad \frac{\partial w}{\partial t} = -\alpha q k .$$

Perciò

$$P = -\mu\alpha q \{ 2n^2h^2 + (\alpha^2 + n^2) k^2 \}$$
$$Q = 0$$
$$R = -\mu n q (\alpha^2 - n^2) hk .$$

I raggi sono quindi linee giacenti nei piani zx, definite dalla equazione

$$\frac{dz}{dx} = \frac{n}{\alpha} \frac{(\alpha^2 - n^2) hk}{2n^2h^2 + (\alpha^2 + n^2) k^2} . \tag{8}$$

Se poniamo

$$\frac{h}{k} = \operatorname{tang}(\alpha x - qt) = \xi \qquad \frac{n}{\alpha} = \omega$$

l'equazione precedente diviene

$$\frac{\alpha}{\omega} \frac{dz}{d\xi} = \frac{(1 - \omega^2)\xi}{(2\omega^2\xi^2 + \omega^2 + 1)(\xi^2 + 1)}$$

ed è facilmente integrabile. Si trova

$$Ce^{\frac{2n}{\omega^2}z} = \frac{\xi^2 + 1}{2\omega^2\xi^2 + \omega^2 + 1}$$

ove C è una costante arbitraria. I raggi hanno quindi per equazione

$$Ce^{-\frac{2\alpha^2}{n}z} = 2n^2 - (\alpha^2 - n^2)\cos^2(\alpha x - qt) .$$

Il caso longitudinale può essere trattato in modo analogo. Orientando l'asse delle z secondo il vettore (l, m, n) possiamo porre

$$A = i\alpha \qquad B = i\beta \qquad C = n + i\gamma$$

e prendendo anche in questo caso $\varphi(\xi) = e^{\xi}$, si hanno per le componenti del vettore vibrante le espressioni

$$\begin{aligned} u &= i\alpha e^{nz - pt + i(\alpha x + \beta y + \gamma z)} \\ v &= i\beta e^{nz - pt + i(\alpha x + \beta y + \gamma z)} \\ w &= (n + i\gamma)\, e^{nz - pt + i(\alpha x + \beta y + \gamma z)} \end{aligned}$$

colla condizione

$$p^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}(n^2 - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 + 2in\gamma).$$

Si possono avere da queste formole, come caso speciale, delle vibrazioni longitudinali analoghe alle (6), facendo $\beta = 0$ $\gamma = 0$.

Si trova così, colla solita separazione delle parti reali dalle immaginarie,

$$(6') \qquad \begin{aligned} u &= \alpha e^{nz} \cos(\alpha x - qt) \\ v &= n e^{nz} \operatorname{sen}(\alpha x - qt) \end{aligned} \qquad q = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}\,(\alpha^2 - n^2),$$

oppure vibrazioni che differiscono da queste per un cambiamento di fase.

L'equazione differenziale dei raggi corrispondenti è

$$\frac{\alpha}{n}\frac{dz}{dx} = \frac{(\lambda + 2\mu)(\alpha^2 - n^2)hk}{(\lambda n^2 - (\lambda + 2\mu)\alpha^2)h^2 - 2\mu n^2 k^2}$$

ove h, k hanno lo stesso significato stabilito nel caso trasversale. Questa equazione è della stessa forma della precedente (8) ed ammette perciò un integrale analogo a quello trovato.

Riassumendo possiamo dire che le onde studiate sono caratterizzate dalle due direzioni (l, m, n) e (α, β, γ), le quali possono essere comunque inclinate fra loro. La prima è in certo modo una direzione di assorbimento, la seconda di propagazione.

Noi abbiamo considerato particolarmente il caso in cui queste due direzioni sono ortogonali fra loro. È questo il caso delle onde di Rayleigh. L'altro caso, che potrebbe sembrare più interessante dal punto di vista fisico, in cui le due direzioni coincidono, non porta ad alcun risultato notevole.

Come è noto, le onde di Rayleigh sono state assunte dai sismologi per rappresentare quelle onde sismiche che sembrano, per quanto risulta dalle osservazioni, propagarsi con velocità costante lungo la superficie terrestre e che sono dette *onde lunghe*. Il carattere di un rapido smorzamento al di sotto della superficie del suolo è appunto il criterio che ha guidato lord Rayleigh alla loro scoperta, ed è noto che diverse verifiche numeriche hanno confermato questi concetti teorici.

Dal punto di vista fisico sarebbe interessante di trovare un procedimento sperimentale atto a riprodurre queste onde ed a porci quindi in grado di verificarne le singolari proprietà.

L'Accademico Segretario
CARLO FABRIZIO PARONA

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona. Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di **C. Frati, A. Baudi di Vesme** e **C. Cipolla.**

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in-f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di **C. Cipolla, G. De Sanctis** e **P. Fedele.**

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in-4°, di 70 pagg. e 96 tav.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza del 14 Aprile 1918 . *Pag.* 319

Guareschi (Icilio). — Gli anelli-vortici di Tait e il solfo colloidale. Con esperienze di lezione . . . . „ 321

Burzio (Filippo). — Sopra alcune formole del Mayevski relative al 2° problema balistico fondamentale . . . . . . „ 335

Campetti (Adolfo). — Conducibilità ed assorbimento dei vapori di sodio (parte II) . . . . „ 340

Somigliana (C.). — Sulle onde di Rayleigh . . . . . „ 350

Tip. Vincenzo Bona – Torino

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. LIII. Disp. **12ª**, **1917-1918**.

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 3.
1918

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 28 Aprile 1918.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. COMM. ANDREA NACCARI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci D'Ovidio, Direttore della Classe, Segre, Peano, Jadanza, Guareschi, Guidi, Mattirolo, Grassi, Somigliana, Panetti, Ponzio, Sacco, Majorana e Parona Segretario.

Si legge e si approva l'atto verbale della precedente adunanza.

Il Presidente si dice lieto di vedere presenti i nuovi Soci nazionali residenti Professori Ponzio, Sacco, Majorana, dà loro il benevenuto nella sicura fiducia ch'essi coopereranno all'attività scientifica e al prestigio dell'Accademia. — Annuncia la morte del Prof. Paolo Pizzetti, esprime il cordoglio per la perdita dell'ottimo nostro Socio corrispondente, che era decoro della scienza e degli studi, e invita il Socio Jadanza a leggere il necrologio del compianto collega. L'elogio, accolto con vivi segni di approvazione, sarà pubblicato negli *Atti*.

Il Segretario legge la nobilissima lettera colla quale Paolo Orsi ringrazia del premio " Bressa „ conferitogli dall'Accademia, e le lettere del nuovo Socio corrispondente V. Reina e dei Soci nazionali residenti Ponzio e Sacco, ultimamente eletti, che ringraziano la Classe della loro nomina.

Sono accolte per la pubblicazione negli *Atti* le seguenti Note:

del Socio JADANZA: *Determinazione geodetica del Castello di Trana e del campanile del Comune*;

del Socio PEANO: *Interpolazione nelle tavole numeriche*;

del Prof. Matteo BOTTASSO: *Generalizzazione della trasformazione di Combescure per le curve*, presentata dal Socio PEANO;

del Dott. Giovanni ISSOGLIO: *La composizione chimica del riso naturale e del riso brillato italiano*, presentata dal Socio GUARESCHI;

del Socio corr. Salvatore PINCHERLE: *Sulle catene di radicali quadratici*, presentata dal Socio Segretario.

LETTURE

CENNI NECROLOGICI
SU
PAOLO PIZZETTI

del Socio NICODEMO JADANZA

Alle ore $0^h 15^m$ del giorno 14 corrente cessava di vivere in Pisa, a soli 57 anni, il nostro Socio corrispondente Paolo Pizzetti, professore ordinario di Geodesia teoretica in quella R. Università.

La perdita di Paolo Pizzetti è stata appresa con rammarico da tutti i cultori della Geodesia e Scienze affini in Italia. Essi riconoscevano in Lui un merito incontestato, essenzialmente per l'acume con cui ha trattato moltissimi argomenti inerenti a dette Scienze, giungendo a risultati nuovi ed importanti.

Nato a Parma il 24 luglio 1860, ottenne il Diploma di Ingegnere civile nella Scuola degl'Ingegneri di Roma a soli 20 anni nel 1880. Da questa epoca rimase nella Scuola stessa quale assistente del prof. Pucci fino al 1886. Avendo vinto in quell'anno il concorso relativo, passò come professore straordinario alla Cattedra di Geodesia nella R. Università di Genova, dove divenne Ordinario il 1° giugno 1890. Nel 1900 fu trasferito alla stessa Cattedra nella R. Università di Pisa, dove ottenne, nell'anno successivo, anche l'incarico della Meccanica superiore. In quei due insegnamenti egli portò il massimo zelo, grande chiarezza ed efficacia e notevoli perfezionamenti.

L'attività scientifica del prof. Pizzetti si è manifestata con numerosi lavori i quali si possono raggruppare in tre categorie:

a) sui minimi quadrati;

b) sulla Geodesia;

c) sulla Meccanica superiore.

Nel 1886 pubblicò il primo suo libro: *La determinazione degli azimut*, diretto ad estendere e semplicizzare ad uso della

Geodesia pratica quei metodi astronomici che convengono al caso di determinazioni di precisione, per modo da renderne possibile l'applicazione anche al topografo, il quale d'ordinario dispone di poco tempo e di mezzi limitati d'osservazione.

Nel 1892 negli *Atti* della R. Università di Genova pubblicò un interessante volume: *Fondamenti matematici per la critica dei risultati sperimentali* e nel 1906 nella *Enciclopedia delle Scienze matematiche* pubblicò un lungo articolo nel quale presentò un quadro scientifico, storico e bibliografico dei progressi della Geodesia.

Nel 1905 pubblicò il *Trattato di Geodesia teoretica*, che contiene la materia che era solito esporre nelle sue lezioni all'Università. In esso è tenuto conto dei progressi e dei nuovi risultati delle odierne ricerche geodetiche, facendo moderato uso delle *coordinate curvilinee*, le quali, sebbene forniscano soluzioni più generali di molti problemi geodetici, pure sono considerate come appartenenti alle *matematiche superiori* e quindi non adatte alla maggioranza di quelli che studiano la Geodesia, che sono gli allievi ingegneri.

L'attività del prof. Pizzetti in Meccanica superiore fu forse più spiccata.

In un bel lavoro, che nomino per primo, perchè tratta un argomento che non si riannoda con gli altri, Egli si occupò del moto *omografico* nel problema degli n corpi, e riuscì a dimostrare che nel caso in cui gli n punti non si muovono nello stesso piano, *l'unico modo di spostamento omografico è quello omotetico avente come centro di omotetia il baricentro del sistema.* Ne trasse la conseguenza che nel caso di quattro corpi la configurazione del tetraedro regolare, studiata pochi anni prima dal Lehmann, era l'*unica possibile.*

Le ricerche più importanti del prof. Pizzetti in Meccanica superiore vertono sulla teoria della figura dei pianeti e del potenziale Newtoniano. In un suo breve lavoro egli cominciò a correggere una dimostrazione data dal Laplace e priva di rigore per mancanza di convergenza nelle serie. In questa ricerca infatti il Laplace aveva considerato il potenziale come somma di due serie di funzioni sferiche, procedenti la prima secondo le potenze positive e l'altra secondo le potenze negative del raggio vettore. Ma, poichè in generale le due serie non con-

vergono simultaneamente, il risultato a cui il Laplace era giunto, non poteva ritenersi come rigoroso. Il Pizzetti modificò la dimostrazione di Laplace e potè quindi mostrare che il teorema era valido, benchè il calcolo fosse imperfetto.

Continuando le stesse ricerche e partendo dal teorema di Stokes sulle figure di equilibrio, che si può a buon diritto riguardare come il fondamento della teoria meccanica della forma dei pianeti, il Pizzetti pervenne ad assegnare l'espressione del potenziale di un pianeta nel caso in cui la superficie esterna sia un ellissoide rotondo; e, l'anno seguente, estese il risultato all'ellissoide a tre assi. Queste formole hanno importanza grandissima in Meccanica Celeste, perchè ci dànno una espressione rigorosamente esatta della funzione perturbatrice dovuta allo schiacciamento polare e alla non omogeneità della costituzione interna dei pianeti.

L'Armellini, che ebbe per il prof. Pizzetti affetto e venerazione grandissima, prese queste formole come punto di partenza nei suoi studi sulle perturbazioni del V° satellite di Giove, e nella introduzione della sua memoria mostrò la grande superiorità della teoria del Pizzetti sopra le vecchie teorie analoghe di Laplace e di Clairaut.

Una nuova e geniale ricerca del Pizzetti riguarda lo studio della distribuzione delle masse nell'interno dei pianeti, conoscendone il potenziale all'esterno. Egli cominciò a dimostrare che se la funzione potenziale *esterna* è simmetrica intorno ad un asse, anche la distribuzione delle masse nell'*interno* del pianeta dev'essere simmetrica intorno allo stesso asse. Estendendo poi le sue ricerche, dimostrò che conoscendo il potenziale *esterno* di un pianeta noi siamo in grado di determinare: la sua massa totale; il suo centro di massa; la direzione degli assi centrali d'inerzia; la differenza tra i momenti centrali d'inerzia. La importanza di questa teoria per lo studio della costituzione interna dei pianeti non ha bisogno di essere posta in luce.

Tutte queste ricerche furono poi riunite e fuse insieme con le teorie di Clairaut, di Laplace, di Stokes, di Radau nel volume *Principii della Teoria Meccanica della figura dei pianeti* pubblicato nel 1913, nel quale il prof. Pizzetti espone il vasto argomento con grande rigore e con chiarezza impareggiabile.

Un'ultima nota riguarda il problema dei due corpi di masse

variabili. Tale problema, già studiato dal prof. Armellini, che ne aveva messo in luce l'importanza negli studi riguardanti l'origine dei sistemi planetari e dei sistemi stellari e aveva trovato le leggi del moto e determinato la natura della traiettoria, fu ripreso dal Pizzetti, il quale, *limitandosi al caso delle masse crescenti,* dimostrò un bel teorema che collega *il raggio vettore nel moto perturbato con quello nel moto non perturbato.*

Così si chiuse la carriera scientifica di Paolo Pizzetti, che ha lasciato una traccia luminosa nella scienza ed una larga eredità di affetti in quanti lo conobbero.

Torino, 28 aprile 1918.

Pubblicazioni del Prof. PAOLO PIZZETTI

Memorie.

1) *Sulla Compensazione delle Osservazioni secondo il metodo dei minimi quadrati,* 1887 (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. III).
2) *Contribuzione allo studio geometrico della superficie terrestre,* 1887 (nel Giornale della Società di letture e conversazioni scientifiche in Genova).
3) *Gli azimut reciproci di un arco di geodetica,* 1888 (Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XXIII).
4) *Note relative all'uso della così detta formula esponenziale nella statistica matematica,* 1891 (Ateneo Ligure).
5) *Nota relativa alla statistica matematica* (Atti della Società Ligustica di Scienze naturali).
6) *Sur le calcul du Résultat d'un système d'observations directes,* 1887 (Mémoires de la Société royale des sciences de Liège, 2e série, t. XV).
7) *Sopra il calcolo dell'errore medio di un sistema di osservazioni,* 1889 (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. V).
8) *Sulla traiettoria dei raggi luminosi,* 1890 (Ateneo Ligure, fascicoli IV e V).
9) *Sur le calcul des triangles géodésiques,* 1891 (Memorias de la Sociedad Alzade de Mexico, tomo IV).

10) *Sviluppo in serie relativo alle geodetiche dell'ellissoide di rotazione schiacciato*, 1895 (Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XXX).

11) *Osservazioni intorno alla Nota del prof.* NOBILE: *Abbreviazione del calcolo di una linea geodetica*, 1896 (Rendiconti della R. Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli).

12) *Sulla correzione da fare alle latitudini osservate per tener conto dell'altezza dei punti di stazione sul livello del mare*, 1899 (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, tomo XIV).

13) *Influsso della Geodesia sul progredire delle Scienze fisiche e matematiche in generale*, 1901 (Discorso per la inaugurazione degli Studi nella Università di Pisa, addì 3 novembre 1901).

14) *Di alcuni casi di semplificazione nella compensazione delle reti geodetiche*, 1901 (Rivista di topografia e catasto, vol. XVI).

15) *Relazioni fra i momenti d'inerzia di un corpo*, 1905 (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XIV).

16) *Paragone fra due triangoli geodetici a lati uguali*, 1907 (Ibidem, vol. XVI).

17) *Le misurazioni fisiche e la teoria degli errori di osservazione*, 1907 (Rivista di Scienze, vol. II, n. III).

18) *Corollarî del teorema relativo al paragone fra due triangoli geodetici di eguali lati*, 1907 (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XVI).

19) *Confronto fra gli angoli di due triangoli geodetici di eguali lati*, 1907 (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, tomo XXIII).

20) *Sul significato geometrico del secondo parametro differenziale di una funzione sopra una superficie qualunque*, 1909 (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XVIII).

21) *Sopra un punto della teoria di* LAPLACE *relativa alla figura di equilibrio di una massa fluida rotante*, 1896 (Ibidem, vol. V).

22) *Notizie riassuntive intorno ai Rendiconti della XIV Conferenza dell'Associazione Geodetica Internazionale*, 1905 (Rivista di topografia e catasto, vol. XVII).

23) *Commemorazione di* ROBERTO DAUBLEBSKY VON STERNECK, 1911 (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XX).

24) *Sopra un procedimento di* HELMERT *in un particolare caso di applicazione del metodo dei minimi quadrati*, 1911 (Ibidem, volume XX).

25) *Intorno ad un preteso errore di Galileo*, 1908 (Rivista di Astronomia e scienze affini).

26) *Cenni sull'opera scientifica di* ROBERTO DAUBLEBSKY VON STERNECK, 1911 (Ibidem, anno V).

27) *Corpi equivalenti rispetto alla attrazione Newtoniana esterna,* 1909 (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XVIII).

28) *Tabelle grafiche per la risoluzione approssimata di una equazione di* GAUSS *che s'incontra nel calcolo delle orbite*, 1910, Pisa, Tipografia succ. fratelli Nistri.

29) *Sul moto di rotazione della terra* (a proposito di una recente comunicazione del prof. CERULLI), 1917 (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XXVI).

30) *Della probabilità nelle prove ripetute*, 1914 (Ibidem, vol. XXIII).

31) *Commemorazione di* GIORGIO HOWARD DARWIN, 1913 (Ibidem, volume XXII).

32) *Rilevamento ottico del Campanile di Pisa* (Commissione tecnica per lo studio delle condizioni presenti del Campanile di Pisa), 1912 (Annali della Società degli Ingegneri e degli Architetti italiani, n. 19, 1° ottobre 1912).

33) *Sur la théorie des observations arrondies* (Abdruck aus den Astr. Nachr., Bd. 124).

34) *Geometria delle superficie e geometria della sfera*, 1917 (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XXVI).

35) *Sulla media dei valori che una funzione dei punti dello spazio assume alla superficie di una sfera* (R. Acc. Lincei, 21 febbr. 1909).

36) *Nuova dimostrazione di taluni teoremi relativi alle funzioni sferiche contenuti in una Nota del prof. Paci* (Rendiconti del Circolo di Palermo, 1898).

Libri.

Ing. PAOLO PIZZETTI, *La determinazione degli azimut.* Metodi per l'orientamento cogli strumenti geodetici e topografici, 1886 (Torino Ermanno Loescher).

ID., *Trattato di geodesia teoretica*, con 71 figure intercalate nel testo, 1905 (Bologna, Ditta Nicola Zanichelli).

ID., Professore ordinario della R. Università di Pisa, *Principii della teoria meccanica della figura dei Pianeti*, 1913 (Pisa, Enrico Spoerri libraio-editore).

Determinazione Geodetica del Castello di Trana e del Campanile del Comune

Nota del Socio naz. res. NICODEMO JADANZA

1. — Il *Castello di Trana* (oggi monumento nazionale), o, meglio, la *torre del Castello*, che sola rimane tra i ruderi di esso, non potè essere determinata geodeticamente dall'Istituto Geografico Militare, quando furono fatti i lavori geodetici nella *Valle del Sangone*, per la sua ubicazione, la quale non permette la sua visibilità da punti geodetici sufficienti a fissarne la posizione.

Si è dovuto fare quindi una triangolazione apposita consistente in un quadrilatero convenientemente scelto P, C, S, T (vedi fig. 2ª), dai vertici del quale è stata possibile la determinazione per doppia intersezione non solo della torre del Castello ma anche del *Campanile del Comune di Trana* e della torretta della *Casa Nouvelle* che si trova alla destra di chi percorre la strada nazionale prima di arrivare al Santuario (Madonna della Stella).

Dei quattro vertici del quadrilatero P, C, S, T, il primo P è un paracarro di forma cilindrica che trovasi alla prima svolta della strada rotabile *Trana-Reano* e propriamente il *quarto* dei tanti paracarri cilindrici che si trovano ivi cominciando dal più orientale; il secondo C è un picchetto posto su di un'altura a Sud della fermata *Cave* del Tramvai; il terzo S è il punto geodetico *Campanile del Santuario di Trana* ed il quarto T è un palo telegrafico che si trova alle falde del monte *Moncuni* verso Nord.

Il punto P venne collegato coi punti geodetici *M. Pietraborga*, *Belvedere*, *Colombè*, *Santuario di Trana* [1] col metodo

[1] Cfr. *Determinazione geodetica di alcuni punti nella Valle del Sangone.* Memoria di Nicodemo Jadanza (" Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino ", vol. LXIII, 1912).

di Snellius. Da tale collegamento fu dedotta la lunghezza del lato P S che servì per il calcolo del quadrilatero e quindi dei punti Torre del Castello-Campanile del Comune-Casa Nouvelle.

Le osservazioni *azimutali e zenitali* nei vertici P, S, C, T furono fatte nei giorni 20 e 21 settembre 1917 dal Prof. Cesare Aimonetti con un teodolite a microscopi con vite micrometrica, avente l'approssimazione di 10″, della Casa Simms di Londra, di proprietà del Gabinetto di Geodesia della R. Università di Torino. Ringrazio l'egregio Professore della valida e sapiente collaborazione.

Ecco qui le medie delle osservazioni azimutali eseguite dall'Aimonetti.

Stazione a Paracarro (P) (in centro)

Pietraborga (asse della Croce) . . .	00° 00′ 00″.00
Belvedere (asse del campanile) . . .	48 03 23 .56
Colombè (asse del campanile) . . .	66 37 25 .50
Santuario (asse del campanile). . .	90 03 14 .50
Cave (picchetto)	1 59 48 .31
Castello (spigolo Est della torre) . .	27 17 04 .92
Campanile del Comune (asse) . . .	42 12 52 .83
Casa Nouvelle (asse della torre) . .	77 02 40 .08
Palo telegrafico	115 37 02 .81

Stazione a Cave (C) (in centro)

Castello (spigolo Est della torre) . .	00° 00′ 00″.00
Campanile del Comune (asse) . . .	23 31 32 .50
Santuario (asse del campanile). . .	39 39 53 .58
Casa Nouvelle (asse della torre) . .	45 10 00 .08
Palo telegrafico	57 55 39 .00
Paracarro	76 08 11 .75

Stazione a Santuario (S) (fuori centro)

Palo telegrafico	00° 00′ 00″.00
Paracarro	28 02 15 .42
Cave	83 38 14 .25
Centro trigonometrico	222 34 00 .00
	$r = 2^{m}.013$

Stazione a Palo telegrafico (T) (fuori centro)

Paracarro	00° 00′ 00″.00
Cave	48 25 07 .75
Castello (spigolo Est della torre) . .	68 44 25 .83
Campanile del Comune (asse) . . .	76 06 57 .42
Casa Nouvelle	90 05 43 .66
Santuario (asse del campanile). . .	127 08 27 .66
Centro trigonometrico	279 35 00 .00
	$r = 1^m.943$

2. — Il punto P, come è stato detto, fu determinato col metodo di Snellius dirigendo le visuali ai 4 punti geodetici Pietraborga, Colombè, Belvedere e Santuario di Trana i cui elementi si trovano nella già citata nostra memoria e che qui riportiamo (fig. 1).

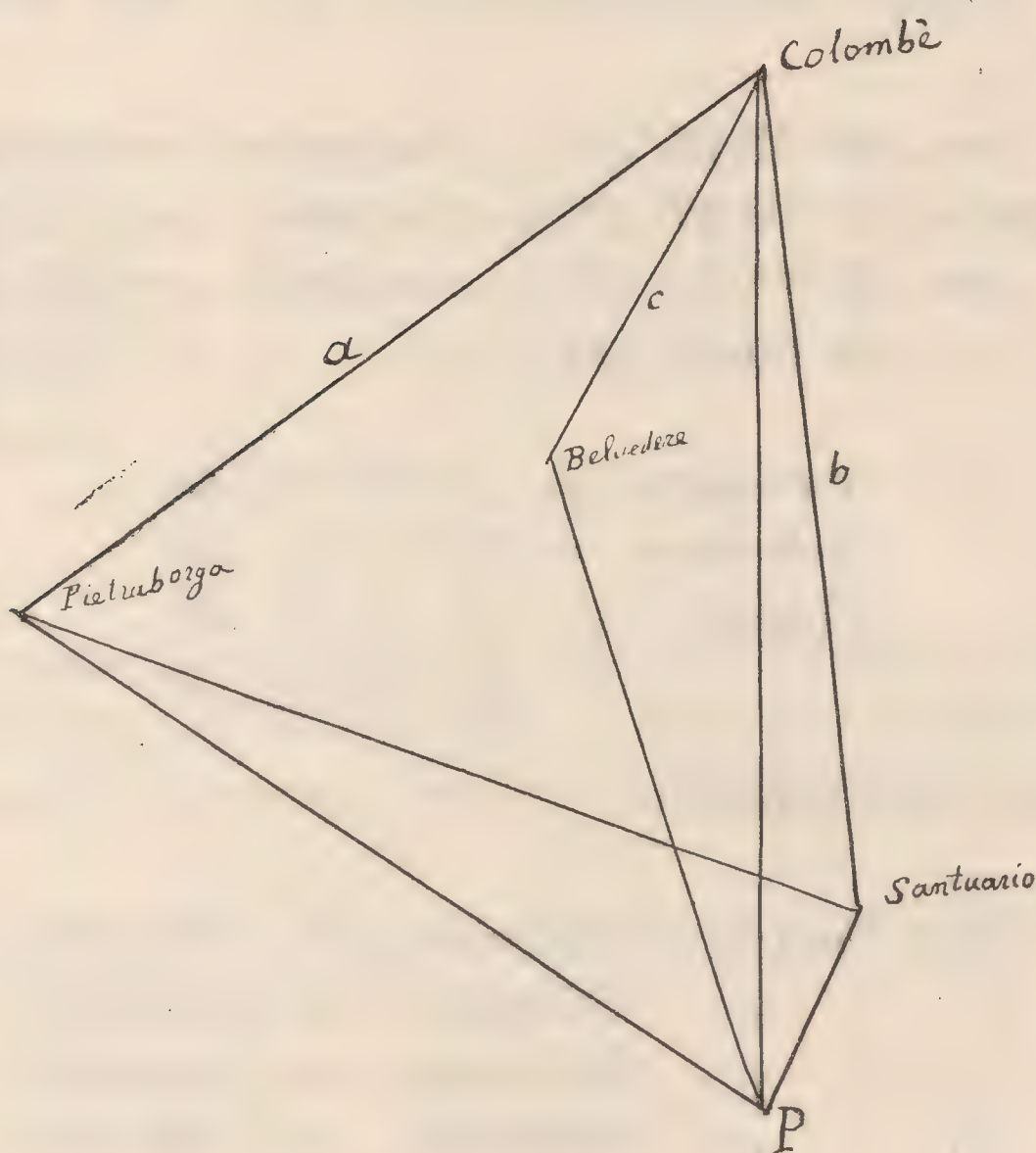



Fig. 1.

log. $a = 3.4362040$ log. $b = 3.3513170$ log. $c = 3.0679141$

B = Pietraborga-Colombè-Santuario = 51° 47′ 56″.44

B_1 = Belvedere-Colombè-Santuario = 35 21 37 .12

Angoli misurati in P:

$$\begin{aligned}\alpha &= \text{Pietraborga-P-Colombè} = 66^\circ\,37'\,25''.50\\ \beta &= \text{Colombè-P-Santuario} = 23\;\;25\;\;49\;.00\\ \gamma &= \text{Belvedere-P-Colombè} = 18\;\;34\;\;01\;.94\end{aligned}$$

Mediante un calcolo provvisorio ed una compensazione col metodo dei minimi quadrati si sono avuti per α, β, γ *corretti* i valori seguenti:

$$\begin{aligned}\alpha &= 66^\circ\,37'\,30''.59\\ \beta &= 23\;\;25\;\;47''.55\\ \gamma &= 18\;\;33\;\;55\;.50\end{aligned}$$

ed i valori degli angoli dei triangoli *Paracarro-Pietraborga-Colombè; Paracarro-Colombè-Santuario; Paracarro-Belvedere-Colombè* che servono alla determinazione di P sono risultati i seguenti:

Paracarro	= 66° 37′ 30″.59
Pietraborga	= 67 12 47 .18
Colombè	= 46 09 42 .23
	180 00 00 .00

Paracarro	= 23° 25′ 47″.55
Colombè	= 5 37 14 .21
Santuario	= 150 56 58 .24
	180 00 00 .00

Paracarro	= 18° 33′ 55″.50
Belvedere	= 131 41 41 .59
Colombè	= 29 44 22 .91
	180 00 00 .00

da cui sono stati dedotti:

log. Paracarro-Pietraborga = 3.3315094
" " -Colombè = 3.4381030
" " -Belvedere = 3.2604931
" " -Santuario = 2.7428061

Distanza Paracarro-Pietraborga = 2145.40
" " -Colombè = 2742.22
" " -Belvedere = 1821.77
" " -Santuario = 553.10

Quest'ultima distanza è stata adoperata per il calcolo del quadrilatero P, C, S, T e quindi per il calcolo dei punti Castello; Campanile del Comune; Casa Nouvelle (fig. 2).

3. — Un calcolo provvisorio è stato fatto per avere valori provvisorii dei lati che dovevano servire per la riduzione al centro trigonometrico delle due stazioni *fuori centro Palo telegrafico* e *Santuario* e quindi i tre triangoli C, S, P; T, P, C; T, C, S dalle osservazioni risultano come è indicato qui appresso:

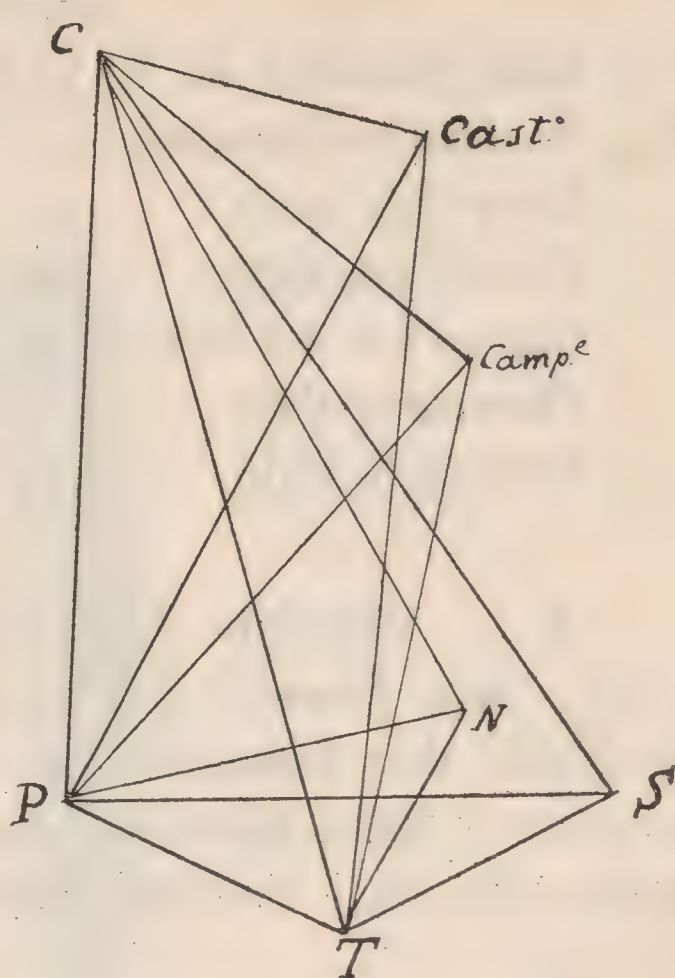



Fig. 2.

C = 36° 28′ 18″.17	T = 48° 10′ 06″.97	T = 78° 27′ 24″.72
S = 55 27 57 .42	P = 113 37 14 .50	C = 18 15 40 .42
P = 88 03 26 .19	C = 18 12 37 .75	S = 83 17 35 .65
179 59 41 .78	179 59 59 .22	180 00 40 .79
errore di chiusura:		
ε = — 18″.22	ε = — 0″.78	ε = + 40″.79

Per rendere geometrica la rete si è fatta la compensazione del quadrilatero col metodo delle *osservazioni condizionate*. I suddetti triangoli compensati sono risultati come qui appresso:

C = 36° 28′ 25″.59	T = 48° 09′ 47″.26	T = 78° 27′ 12″.64
S = 55 28 05 .83	P = 113 37 14 .45	C = 18 15 27 .30
P = 88 03 28 .58	C = 18 12 58 .29	S = 83 17 20 .06
180 00 00 .00	180 00 00 .00	180 00 00 .00

Il calcolo di essi ha dato il risultato seguente:

log. base (dedotta al N. 2) =			
log. Santuario-Paracarro	= 2.7428061	Distanza S-P	= 553^{m}.10
„ Cave-Santuario	= 2.9684378	„ C-S	= 929 .90
„ Cave-Paracarro	= 2.8845157	„ C-P	= 766 .52
„ Cave-Palo del telegr.	= 2.9743310	„ C-T	= 942 .61
„ Paracarro-Palo	= 2.5073258	„ P-T	= 321 .61
„ Santuario-Palo	= 2.4732628	„ S-T	= 297 .35

4. — Ciascuno dei punti *Castello* (torre), *Campanile del Comune*, *Casa Nouvelle* è stato determinato per doppia intersezione mediante due triangoli. La differenza tra i logaritmi del lato comune è stata distrutta con una compensazione empirica. Si sono ottenuti i risultati seguenti:

Castello (Spigolo Est della torre) (fig. 3).

I due triangoli mediante i quali è stato determinato sono:

Castello	23° 12′ 12″.41	Castello	78° 34′ 31″.64
Palo del telegr.	68 27 49 .70	Paracarro	25 17 16 .61
Paracarro	88 19 57 .89	Cave	76 08 11 .75
	180 00 00 .00		180 00 00 .00

Per differenza Δ tra i logaritmi del lato comune si è ottenuto $\Delta = -345$ (unità della 7ª decimale). I due triangoli *compensati empiricamente* sono risultati:

Castello	23° 12′ 12″.41	Castello	78° 34′ 31″.64
Palo del telegr.	68 27 23 .90	Paracarro	25 16 50 .81
Paracarro	88 20 23 .69	Cave	76 08 37 .55
	180 00 00 .00		180 00 00 .00

Essi sono stati ottenuti dai precedenti *aumentando* uno e *diminuendo* l'altro degli angoli adiacenti alla base di 25″.8 ottenuti dalla equazione

$$x = -\frac{\Delta}{d\beta + d\gamma}$$

dove $d\beta$ e $d\gamma$ sono le differenze tavolari per $1''$ degli angoli opposti al lato comune nei due triangoli.

Fig. 3.

Il calcolo dei due triangoli compensati dà:

log. Castello-P	= 2.8803813		Distanza Castello-P	= 759^{m}.24
„ „ -C	= 2.5237228		„ „ -C	= 333 .98
„ „ -T	= 2.9116504		„ „ -T	= 815 .93

Campanile del Comune (asse) (fig. 4).

I due triangoli mediante i quali è stato determinato sono:

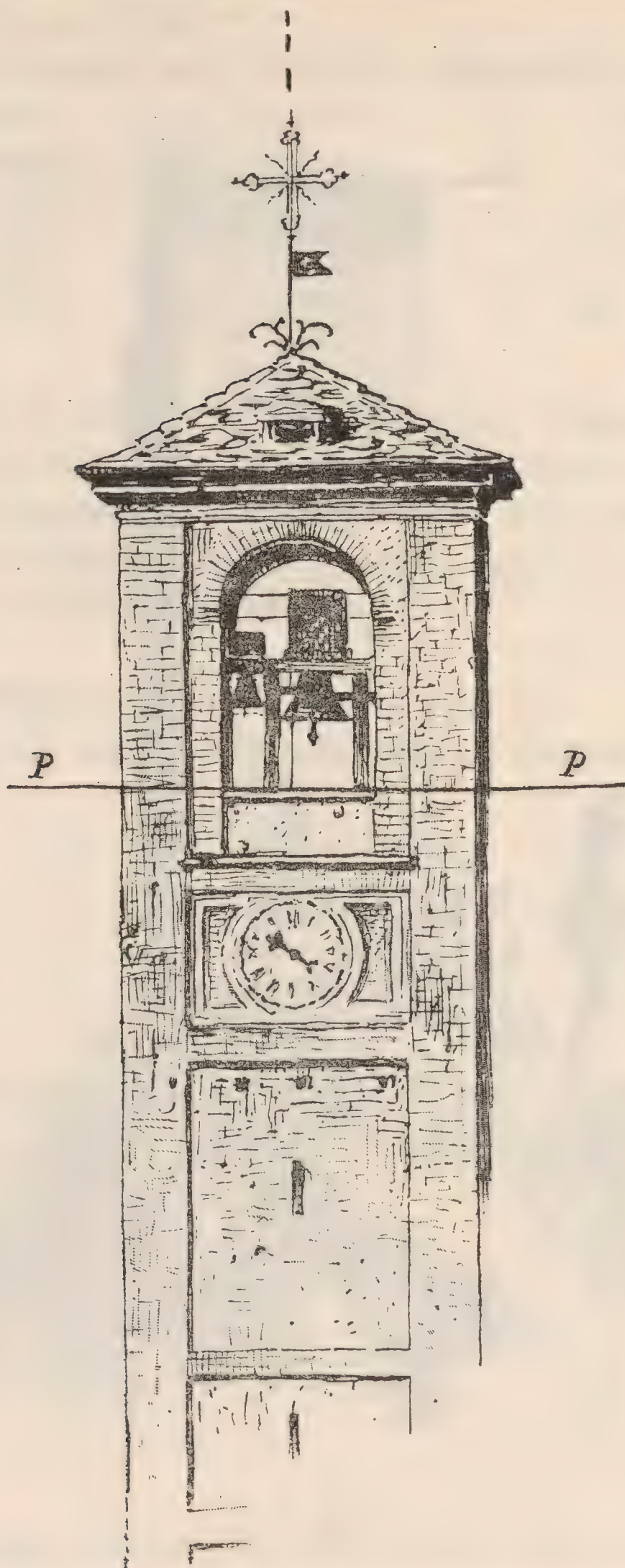



Fig. 4.

Campanile	30° 45′ 14″.06	Campanile	117° 55′ 10″.46
Palo	75 50 35 .94	Palo	27 40 48 .04
Paracarro	73 24 10 .00	Cave	34 24 01 .50
	180 00 00 .00		180 00 00 .00

Per Δ è stato ottenuto il valore $\Delta = +239$ e $d\alpha = +6.3$ $d\gamma = +30.7$ e quindi

$$x = -\frac{239}{37} = -6''.5.$$

I triangoli compensati sono:

Campanile	30° 45′ 14″.06	Campanile	117° 55′ 10″.46
Palo	75 50 42 .44	Palo	27 40 41 .54
Paracarro	73 24 03 .50	Cave	34 24 08 .00
	180 00 00 .00		180 00 00 .00

Il calcolo di questi due triangoli compensati ha dato:

log. Campanile-Palo	= 2.7801200	Dist. Camp.-P	= 602ᵐ.73
„ „ -Paracarro	= 2.7852158	„ „ -P	= 609 .84
„ „ -Cave	= 2.6950631	„ „ -C	= 495 .52

Casa Nouvelle (asse della torre) (fig. 5).

I due triangoli che hanno servito alla sua determinazione sono i seguenti:

Nouvelle	51° 36′ 21″.21	Nouvelle	73° 58′ 56″.56
Palo	89 49 16 .06	Paracarro	75 02 51 .77
Paracarro	38 34 22 .73	Cave	30 58 11 .67
	180 00 00 .00		180 00 00 .00

$$\Delta = -298; \quad d\alpha = 0 \quad d\gamma = +35 \quad x = \frac{298}{35} = 8''.51$$

ed i triangoli compensati sono:

Nouvelle	51° 36′ 21″.21	Nouvelle	73° 58′ 56″.56
Palo	89 49 24 .57	Paracarro	75 03 00 .28
Paracarro	38 34 14 .22	Cave	30 58 03 .16
	180 00 00 .00		180 00 00 .00

dai quali si ottiene:

log.	Casa	Nouvelle-Palo		= 2.4079659
"	"	"	-Paracarro	= 2.6131420
"	"	"	-Cave	= 2.8867578

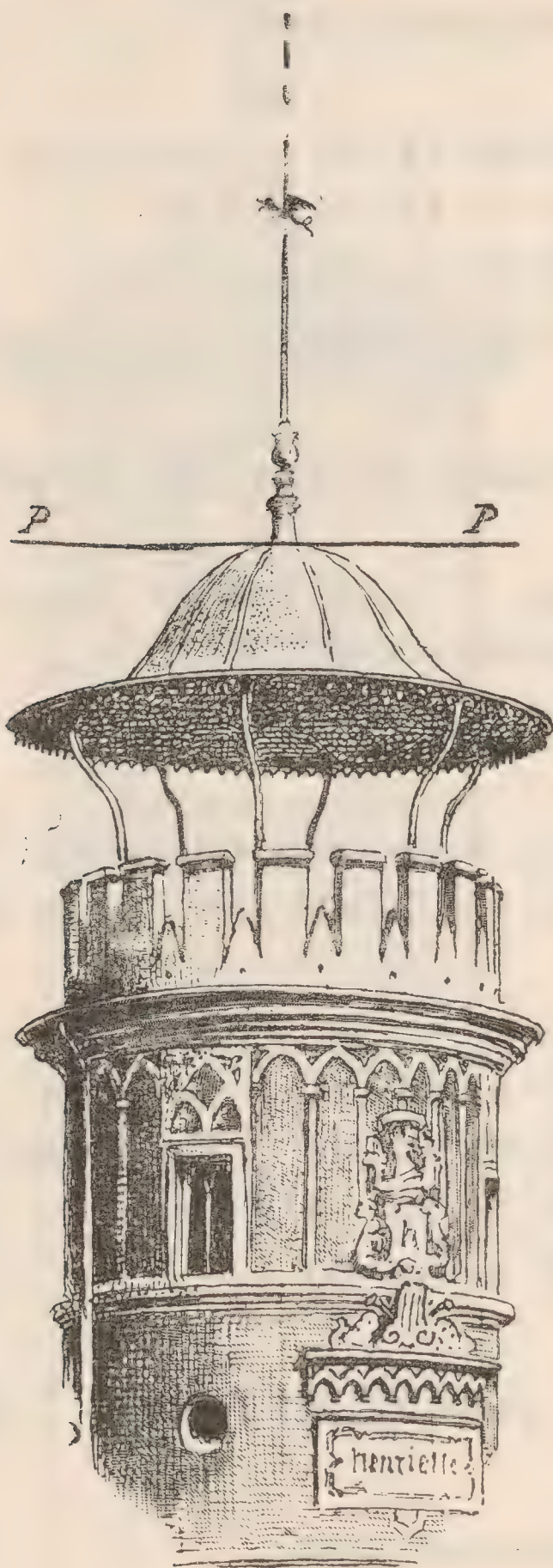



Fig. 5.

Distanza	Casa	Nouvelle-Palo		= $255^{m}.84$
"	"	"	-Paracarro	= 410 .34
"	"	"	-Cave	= 770 .47

Esattezza delle precedenti determinazioni.

5. — Si può facilmente trovare l'errore relativo nelle determinazioni di ciascuno dei punti determinati ricorrendo alla nota formola:

$$d \log. x = \frac{dx}{x} M \qquad (M \text{ è il modulo } 0.4342945)$$

donde $\frac{dx}{x} = \frac{d \log x}{M}$.

Si ottiene per ciascuno dei lati determinati:

$$\textit{Castello-P} \quad \text{errore relativo} = \frac{0{,}0000345}{0{,}4342945} = \frac{1}{12588}$$

$$\textit{Campanile-P} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad = \frac{0{,}0000239}{0{,}4342945} = \frac{1}{18171}$$

$$\textit{Casa Nouvelle-P} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad = \frac{0{,}0000298}{0{,}4342945} = \frac{1}{14574},$$

risultato soddisfacentissimo.

Calcolo delle coordinate geografiche.

6. — Trattandosi di punti la cui distanza non eccede tre chilometri sono state adoperate le formole:

$$\varphi' - \varphi = \frac{s \cos z}{\rho \operatorname{sen} 1''},$$

$$\theta' - \theta = \frac{s \operatorname{sen} z}{N \operatorname{sen} 1'' \cos \varphi'},$$

$$m = (\theta' - \theta) \operatorname{sen} \frac{1}{2} (\varphi + \varphi'),$$

$$z' = 180 + z + m,$$

che servono a calcolare le coordinate geografiche di $B(\varphi', \theta')$ quando sono note le coordinate geografiche di $A(\varphi, \theta)$, e le coordinate geodetiche polari (s, z) di B rispetto ad A. La prima dà la latitudine φ', la seconda la longitudine θ' e la terza la con-

vergenza dei meridiani tra A e B che serve poi a calcolare l'azimut z' del punto A in B ossia l'azimut reciproco della geodetica AB.

Partendo dalle coordinate geografiche già note di *Pietraborga* e di *Santuario* che si trovano nella già citata nostra memoria si sono calcolate le coordinate geografiche di *Paracarro* e di *Cave*, le quali poi sono state adoperate al calcolo delle coordinate geografiche degli altri punti.

Le coordinate geografiche dei punti geodetici Pietraborga e Santuario sono:

$$\text{Pietraborga} \ldots \begin{cases} \varphi = 45^\circ\,01'\,15''.861 \\ \theta = -1\;\;29\;\;59\;.976 \end{cases}$$

$$\text{Santuario di Trana} \begin{cases} \varphi = 45\;\;02\;\;25\;.776 \\ \theta = -1\;\;30\;\;23\;.069 \end{cases}$$

(le longitudini sono contate dall'Osservatorio dell'Istituto Idrografico della R[a] Marina a Genova *positive* ad Est, *negative* ad Ovest).

Dalla citata nostra memoria si ricava che l'azimut di *Colombè* su *Santuario* $= 242^\circ\,16'\,00''.70$ e che l'azimut di *Colombè* su *Pietraborga* $= 294^\circ\,03'\,46''.48$. Togliendo dal primo l'angolo tra *Colombè* e *Paracarro* (fig. 1) ed aggiungendo al secondo l'angolo a Pietraborga tra *Colombè* e *Paracarro* si sono ottenuti gli azimut di *Paracarro* su *Santuario* $= 91^\circ\,19'\,02''.46$ e quello di *Paracarro* su *Pietraborga* $= 1^\circ\,16'\,33''.66$.

Le formole precedenti hanno dato per gli azimut di *Santuario* su *Paracarro* $z' = 271^\circ\,19'\,20''34$ e per azimut di *Pietraborga* su *Paracarro* $= 181^\circ\,16'\,49''.11$.

La posizione geografica di *Paracarro* è risultata:

$$\text{Paracarro} \begin{cases} \varphi' = 45^\circ\,02'\,25''.356 \\ \theta' = -1\;\;29\;\;57\;.797. \end{cases}$$

Lo stesso si è fatto per *Cave*, partendo da *Paracarro* e da *Santuario*, e si è ottenuto:

Azimut di *Santuario* su *Paracarro*	=	271° 19′ 20″.34
Angolo a *Paracarro* tra *Cave* e *Santuario*	=	88 03 28 .58
Azimut di *Cave* su *Paracarro* z	=	183 15 51 .76.

Azimut di *Paracarro* su *Santuario* $= 91^\circ 19' 02''.46$
Angolo a *Santuario* tra *Paracarro* e *Cave* $= 55\ 28\ 05\ .83$

Azimut di *Cave* su *Santuario* $= z = 146\ 47\ 08\ .29.$

Il calcolo ha dato:

azimut di *Paracarro* su *Cave* $= 3^\circ 15' 50''.35$
azimut di *Santuario* su *Cave* $= 326\ 47\ 24\ .76$;

e la posizione geografica di *Cave* è risultata:

$$\text{Cave} \begin{cases} \varphi' = 45^\circ 02' 00''.56 \\ \theta' = -\ 1\ 29\ 59\ .79. \end{cases}$$

Analogamente sono state calcolate le posizioni geografiche di *Castello, Campanile del Comune* e di *Villa Nouvelle* partendo da *Cave* e da *Paracarro*.

I risultati sono i seguenti:

Posizione geografica di *Castello* (spigolo Est della torre) (fig. 3):

Latitudine $\varphi = 45^\circ 02' 03''.75$
Longitudine $\theta = -\ 1\ 30\ 14\ .37.$

Azimut di *Castello* su *Cave* $= 287^\circ 07' 12''.70$
Azimut di *Castello* su *Paracarro* $= 208\ 32\ 42\ .57.$

Posizione geografica di *Campanile del Comune* (asse) (fig. 4):

Latitudine $\varphi = 45^\circ 02' 11''.00$
Longitudine $\theta = -\ 1\ 30\ 16\ .98.$

Azimut di *Campanile* su *Cave* $= 310^\circ 38' 43''.96$
Azimut di *Campanile* su *Paracarro* $= 223\ 29\ 02\ .71.$

Posizione geografica di *Casa Nouvelle* (torretta) (fig. 5):

Latitudine $\varphi = 45^\circ 02' 22''.66$
Longitudine $\theta = -\ 1\ 30\ 16\ .16.$

Azimut di *Casa Nouvelle* su *Cave* $= 332^\circ 17' 47''.09$
Azimut di *Casa Nouvelle* su *Paracarro* $= 258\ 18\ 52\ .04.$

Posizione geografica di *Palo telegrafico*:

Latitudine $\varphi =$ 45° 02′ 30″.06
Longitudine $\theta = -$ 1 30 10 .90.

Azimut di *Palo* su *Cave* = 345° 02′ 51″.96
Azimut di *Palo* su *Paracarro* = 296 53 06 .21.

Altezze.

La quota trigonometrica di *Paracarro* fu determinata mediante la misura delle distanze zenitali dei piani di paragone (P. P.) di *Pietraborga, Colombè* e *Santuario* che ha dato i risultati seguenti:

Stazione a Paracarro ($\Delta I = 1^m.42$).

Distanza zenitale di *Pietraborga* (sommità della colonna che sostiene la croce) . . . = 76° 32′ 36″.5
Idem di *Colombè* (base cupolino) . . . . . . = 88 53 27 .0
Idem di *Santuario* (sommità della balaustrata) = 88 05 16 .75
(Distanza zenitale di *Paracarro* (suolo) misurata a *Santuario* ($\Delta I = 0^m.30$) . . . = 92 11 53 .0)
Idem di *Cave* (suolo) . . . . = 92 19 23 .75
Idem di *Castello* (sommità della torre) . . . = 88 55 01 .75
Idem di *Campanile del Comune* (soglia finestroni) = 91 22 25 .25
Idem di *Casa Nouvelle* (sommità cupolino). . = 91 54 32 .00

La quota trigonometrica di *Cave* fu determinata colle distanze zenitali misurate a *Cave* di *Paracarro* e *Santuario* e colle zenitali reciproche misurate a *Santuario* e a *Paracarro*.

Stazione a Cave ($\Delta I = 1^m.32$).

Distanza zenitale di *Paracarro* (suolo) . . . = 87° 50′ 47″.5
Idem di *Santuario* (sommità della balaustrata) = 86 58 02 .5
(Distanza zenitale di *Cave* (suolo) misurata a *Santuario* ($\Delta I = 0^m.30$) . . . . . . = 93 08 44 .7)
Idem di *Castello* (sommità della torre) . . . = 82 25 12 .0
Idem di *Campanile del Comune* (soglia finestroni) = 88 13 28 .25
Idem di *Casa Nouvelle* (sommità del cupolino) = 88 47 46 .75

Pel calcolo delle altezze si è adoperata la formola solita:

$$h' - h = s \cot (z - \beta s) + \Delta I - \Delta M$$

nella quale h è l'altezza sul mare del punto dove si fa stazione ed h' quella del punto di cui è stata misurata la distanza zenitale z; s è la distanza geodetica tra i due punti, ΔI l'altezza del centro del circolo verticale dell'istrumento sul *piano di paragone* (P. P.) del punto in cui si fa stazione e ΔM l'altezza della linea mirata sul P. P. del punto di cui è stata misurata la distanza zenitale. Per $\log \beta$ si è ritenuto il valore $\log \beta = 8.15147 - 10$ conveniente al Piemonte.

Le quote dei P. P. dei punti geodetici *Pietraborga*, *Colombè*, *Santuario di Trana* sono state prese dalla già citata nostra memoria e che qui riportiamo:

Pietraborga (sommità della colonna che sostiene la croce) 927^m.30
Colombè (base del cupolino del campanile) . . . . 467 .01
Santuario di Trana (sommità della balaustrata) . . 432 .63.

Eseguito il calcolo, si sono ottenuti i risultati seguenti:

Quota altimetrica di *Paracarro* (suolo). . . . . . 412^m.16
" " di *Cave* (suolo). . . . . 382 .13
" " di *Castello* (sommità torre) . . . 427 .88
" " di *Campanile* (soglia finestroni) . . 398 .90
" " di *Casa Nouvelle* (sommità cupolino) 399 .80.

I prospetti della *Torre del Castello*, del *Campanile del Comune* e della torre della *Casa Nouvelle* furono espressamente disegnati dall'Ingegnere Ludovico Perrachio; ringrazio cordialmente l'egregio Ingegnere della cortesia usatami.

Sulla strada nazionale *Trana-Avigliana* furono messi, fin dal 1910, parecchi caposaldi consistenti in piastre rettangolari di bronzo, e fu eseguita una livellazione di precisione tra *Avigliana* ed *Orbassano* dall'Ing. Carlo Iorio. Due di tali caposaldi si trovano uno sulla testata nord-ovest del ponte sul Sangone ed ha la quota 370^m.4441, l'altro sulla soglia della porta nodr

di entrata al Campanile del Santuario di Trana (Madonna della Stella), la cui quota è $394^{m}.9339$ [1].

Si presentava propizia l'occasione di ottenere le quote di precisione tanto di *Paracarro* quanto del *Campanile del Comune.* L'Ing. Iorio volle gentilmente (e di ciò lo ringrazio di cuore) eseguire due livellazioni di collegamento, una dal caposaldo sul ponte del Sangone alla *soglia* della porta d'ingresso del Campanile del Comune, l'altra dal caposaldo del Santuario alla *sommità del Paracarro* sulla strada di Reano. Tali livellazioni, eseguite il 30 maggio 1918 collo stesso livello di precisione adoperato per la livellazione *Avigliana-Trana-Orbassano*, hanno dato i risultamenti seguenti:

1° Differenza di livello tra la *soglia della porta di entrata* al Campanile del Comune ed il *caposaldo* sul ponte del Sangone $= 9^{m}.0124$. Perciò *l'altezza sul mare della soglia della porta di entrata* al Campanile del Comune è

metri 379.46.

Aggiungendo ad essa l'altezza della soglia dei finestroni sulla soglia della porta d'ingresso che è $18^{m}.70$ si ottiene per quota della soglia dei finestroni del Campanile del Comune

metri 398.16.

2° Differenza di livello tra la *sommità del Paracarro* ed il *caposaldo* che si trova sulla *soglia della porta Nord* del Santuario di Trana (Madonna della Stella) $= 17^{m}.3592$. Quindi *l'altezza sul mare della sommità del Paracarro* è

metri 412.29.

Essendo l'altezza del paracarro $= 0^{m}.30$, si può ritenere come altezza della base del paracarro (suolo) $=$ metri 412.00.

---

[1] Cfr. N. Jadanza, *Trattato di geometria pratica*, 2ª ed., 1914, pag. 560.

Interpolazione nelle tavole numeriche

Nota del Socio nazionale residente GIUSEPPE PEANO

Lo scopo della Matematica è di dare il valore numerico delle incognite che si presentano nei problemi pratici. Newton, Eulero, Lagrange, Cauchy, Gauss, e tutti i grandi matematici sviluppano le loro mirabili teorie fino al calcolo numerico delle cifre decimali necessarie.

È di somma importanza che le teorie matematiche che si insegnano nelle scuole di vario grado siano coronate dal calcolo numerico.

Per facilitare questi calcoli si sono pubblicate numerose tavole. È utile che in tutte le scuole si facciano conoscere le tavole più convenienti, in modo che ogni studioso sappia servirsene a tempo opportuno, e gli siano risparmiati dei calcoli noiosi.

Le tavole numeriche, che precedono i varii manuali degli ingegneri [1] hanno assunto una forma quasi identica, quale la lunga esperienza ha dimostrato essere la migliore.

Queste tavole sono utili ad ogni studioso di matematica. Però esse, per la mole del libro e per il prezzo, non sono comode pel pubblico non ingegnere.

L'Unione Tipografica Editrice Torinese ebbe ora la felice idea di pubblicarle in un fascicolo a parte, e di metterle in vendita a prezzo minimo [2].

---

[1] Colombo, Dubbel, Garuffa, Hospitalier, Hütte, de Laharpe, Malavasi, Mazzola, ecc.

[2] Tavole numeriche, Quadrato, Cubo, Radice quadrata e cubica, Logaritmo, Reciproco d'un numero, Seno, Coseno, Tangente, Cotangente, Logaritmi naturali, Sviluppo dell'arco, Tavole di interessi. Estratto dal Manuale l'“ Ingegnere „, dell'Ing. Garuffa. U. T. E. T., anno 1918. Prezzo centesimi 60.

Queste tavole, di applicazione universale, sono così rese accessibili a tutti coloro che debbono fare calcoli, e possono essere adottate dagli studenti di ogni grado di scuola. Essi acquisteranno gusto ai calcoli numerici, ed al rigore, e si avvieranno all'uso delle tavole speciali più costose.

Spesso i numeri, su cui si opera nei problemi pratici, non sono contenuti esattamente nelle tavole. Allora si ricorre all'interpolazione.

I libri che trattano dell'interpolazione determinano, per via sperimentale, l'errore che essa produce, e affermano che l'interpolazione, condotta con quelle regole, produce un errore di *alcune* unità dell'ultimo ordine decimale. Io mi propongo di calcolare di *quante* unità dell'ultimo ordine può essere l'errore; e applicherò questi risultati alle tavole citate, che chiamerò tavole UTET.

§ 1. — Tavole dei quadrati e dei cubi.

Le più antiche tavole di quadrati e di cubi, che siano pervenute a noi, si trovano al British Museum di Londra; sono scritte in terra cotta, e provengono dagli scavi di Babilonia; esse rimontano ad almeno 1600 anni prima di Cristo. Sono in base 60; la tavola dei cubi è ancora ben conservata.

Il prodotto di due numeri si può esprimere come differenza di due quadrati, colla formula:

$$(a+b)\times(a-b)=a^2-b^2,$$

ovvero

$$a\times b=[(a+b)/2]^2-[(a-b)/2]^2,$$

che già trovasi in Euclide, libro II prop. 5.

Avendosi, ad esempio, la tavola dei quadrati dei numeri da 1 a 1000, quale si trova nelle tavole UTET, si potra ricavare il prodotto di due numeri di tre cifre, come risulta dagli esempi che seguono.

Esempio 1°. — Calcolare $a \times b$, ove $a = 981$ e $b = 223$ sono dispari.

$$
\begin{array}{rll}
a+b = 1204, & (a+b)/2 = 602, & (\text{questo})^2 = 362404 \\
a = 981 & & \\
b = 223 & & \\
\hline
a-b = 758, & (a-b)/2 = 379, & (\text{questo})^2 = 143641 \\
 & & a \times b = 218763.
\end{array}
$$

La somma e differenza di a e b si fanno come d'ordinario, come pure la loro divisione per 2; i quadrati si leggono nella tavola.

Esempio 2°. — Se i due numeri sono pari, si può procedere come prima, oppure si possono dividere per 2:

$$
\begin{array}{lrl}
 & (a+b)/2 = 6{\cdot}50, & (\text{questo})^2 = 42{\cdot}2500 \\
a = 9{\cdot}86, & a/2 = 4{\cdot}93 & \\
b = 3{\cdot}14, & b/2 = 1{\cdot}57 & \\
 & (a-b)/2 = 3{\cdot}36, & (\text{questo})^2 = 11{\cdot}2896 \\
 & & a \times b = 30{\cdot}9604.
\end{array}
$$

Esempio 3°. — Se i numeri sono l'uno pari e l'altro dispari, come $9{\cdot}87 \times 3{\cdot}14$, calcolo come prima:

$$
\begin{array}{lr}
 & 9{\cdot}86 \times 3{\cdot}14 = 30{\cdot}9604 \\
\text{Aggiungo:} & 314 \\
\text{Trovo:} & 9{\cdot}87 \times 3{\cdot}14 = 30{\cdot}9918.
\end{array}
$$

L'uso della tavola dei quadrati per calcolare i prodotti fu indicato dai matematici arabi, e da Ludolff nel 1690. Per eliminare la divisione per 2, si sono costrutte delle tavole di quarti di quadrati; la più antica è del Voisin, anno 1817; permette di calcolare il prodotto di due numeri di 4 cifre. Utilissime per i calcolatori sono quelle di F. Perfetto [3] che dànno i prodotti di due numeri di 5 cifre. In questo libro si trovano pure i prodotti di due numeri da 1 a 1000.

---

[3] *Multiplicator Perfettus.* Milano, Aliprandi a. 1910.

Le tavole dei quadrati servono, come le logaritmiche, a ridurre un prodotto ad una somma algebrica; ed hanno il vantaggio di dare i prodotti esatti.

Anche il prodotto di tre numeri si può scomporre nella somma algebrica di cubi. GERGONNE, negli “ Ann. d. M. „, anno 1816, t. 7, pag. 163 diede la formula:

$$24abc = (a+b+c)^3 - (a+b-c)^3 - (a+c-b)^3 - (b+c-a)^3;$$

ma essa è meno pratica. Nei manoscritti di LAGRANGE, conservati all'Accademia delle Scienze di Parigi, e che io potei esaminare, grazie al prof. Jordan, trovasi, tomo 6, anno 1782, la formula che esprime il prodotto di n fattori come somma algebrica di potenze n-esime, riportata nel mio “ Formulario „, t. V, pag. 129, prop. 4·2.

§ 2. — Interpolazione.

Se fx è una funzione di primo grado in x, conoscendo per due valori a b della variabile, i valori fa e fb della funzione, ogni altro suo valore fx sarà dato dalla formula di interpolazione

$$fx = fa + (x-a)\times(fb-fa)/(b-a).$$

La x è in generale compresa fra a e b; se x è fuori, la formula dicesi di estrapolazione.

Questa formula, pressochè intuitiva, era nota agli Arabi; LEONARDO PISANO, nel libro del 1202, pag. 318, tradusse la parola araba Elchatayn in “ duarum falsarum positionum regula „, perchè per determinare fx, si dànno alla variabile due valori a e b diversi da x, cioè falsi.

Se la funzione non è di primo grado, la formula deve essere completata con un resto, che, trattandosi di funzioni semplici, si può calcolare coll'analisi finita, e che in generale si può esprimere colla derivata seconda.

Inoltre il prodotto di $x-a$ pel rapporto incrementale $(fb-fa)/(b-a)$, se uno dei fattori contiene infinite cifre, dovrà essere eseguito in qualche modo abbreviato, e così si ha un altro resto.

E se poi i valori della funzione contenuti nelle tavole sono solo approssimati ad un certo numero di cifre, si avrà un terzo resto a considerare.

§ 3. — Notazioni.

Le proposizioni matematiche contenute in questa Nota, come nelle mie precedenti dal 1889 in poi, sono completamente espresse in simboli. Questi simboli permettono di dare alle proposizioni forma chiara e precisa, e sono strumento indispensabile in molte ricerche.

I simboli di cui qui faccio uso sono:

ϵ e $\supset$, che rappresentano rispettivamente la proposizione singolare e la universale, secondo la nomenclatura di Aristotele, *καθ' ἕκαστον, καθόλου*. Essi appartengono alla logica matematica.

Le cifre 0, 1, ... 9, ed i segni di aritmetica $+$, $-$, $\times$, ecc., $=$, $>$, $<$.

X = dieci, base della numerazione.

Q = quantità, o numero reale positivo.

N = numero naturale, o numero intero positivo.

n = numero intero positivo o nullo o negativo.

Q, N, n indicano delle classi; le variabili $a, b, \dots n, \dots x, y, z$ sono lettere corsive.

Se a e b sono quantità, e $a < b$, $a \bar{} b$ indica l'intervallo da a a b, gli estremi esclusi; $a \vdash b$, $a \dashv b$, $a \vdash\!\dashv b$ indicano lo stesso intervallo, incluso a, o b, o a e b.

$$\theta = 0 \bar{} 1, \qquad \theta_0 = 0 \vdash 1.$$

θ rappresenta le quantità comprese fra 0 e 1, o le frazioni proprie; θ_0 rappresenta lo stesso intervallo, incluso 0.

Se x è una quantità numerica, $\mathrm{V}x$ indica " il valore intero di x „.

1. $$x \epsilon \mathrm{Q} \,.\supset.\, \mathrm{V}x \leqq x < \mathrm{V}x + 1.$$

2. Def. $$x \epsilon \mathrm{Q} \,.\, r \epsilon \mathrm{n} \,.\supset.\, \mathrm{V}_r x = \mathrm{X}^{-r} \mathrm{V}(\mathrm{X}^r x).$$

" Essendo x una quantità numerica, ed r un numero intero positivo o negativo, $\mathrm{V}_r x$ si può leggere ' il valore con r decimali di x ', ed ha il valore scritto „.

Così $\mathrm{V}_2 \pi = 3{\cdot}14$, $\mathrm{V}_0 \pi = 3$, $\mathrm{V}_{-1} \pi = 0$.

3. Def. $x \in Q . r \in n . \supset . M_r x = x - V_r x$.

" Avendo ancora x ed r lo stesso significato, $M_r x$, che si può leggere ' mantissa d'ordine r di x ', è la differenza fra x ed il suo valore con r decimali „.

4. Def. $x \in Q . r \in n . \supset . T_r x = V_r x - V_{r-1} x$.

" $T_r x$, che si legge ' il termine di grado decimale r in x ', è definito come sopra „. Si noti che la r che figura in $V_r x$, $M_r x$, $T_r x$, può essere tanto positiva quanto negativa.

5. Def. $a, b \in Q . r \in n . \supset . a \times_r b = \Sigma T_p a \times T_q b$, ove p e q assumono tutti i valori interi tali che $p + q \leqq r$.

$a \times_r b$ si legge " il prodotto di grado r di a per b „, ed è la somma di tutti i prodotti dei termini di a pei termini di b, il cui grado $p + q$ sia però $\leqq r$.

Il prodotto $a \times b$ di due numeri con infinite cifre trascende l'analisi finita; esso può essere sostituito per approssimazione col prodotto graduale, che ha importanza fondamentale nelle approssimazioni numeriche.

Una esposizione storica del prodotto graduale si trova nella mia Nota " Approssimazioni numeriche „, " Atti „ di questa Accademia, 25 febbraio 1917. Altre esposizioni recenti, notevoli per la loro chiarezza, sono dovute ai prof. MACCAFERRI [4] e VESIN [5].

Sostituendo al prodotto ordinario il prodotto graduale, si ha un errore, o resto. Pongasi perciò:

6. Def. $a \in Q . \supset . \Sigma$ cifre $a = \Sigma X^r T_r a$, ove r assume tutti i valori interi n.

Σ cifre a si può leggere " la somma delle cifre di a „, ed ha un valore finito, se a ha un numero finito di cifre non nulle.

---

[4] E. MACCAFERRI, *Approssimazioni numeriche*, Periodico di Matematica di Lazzeri, anno 1917. Questo articolo, che fu scritto prima del mio, fa parte di un apposito trattato, in corso di stampa.

[5] V. VESIN, *Prodotti approssimati*, Periodico di Matematica, a. 1917.

7. $a, b \in Q \,.\, r \in n \,.\!\supset.\, a \times b \geqq a \times_r b.$

" Il prodotto ordinario supera il prodotto graduale ".

8. $a, b \in Q \,.\, r \in n \,.\!\supset.\, a \times b - a \times_r b < X^{-r} \Sigma$ cifre a.

Questa limitazione della differenza fra prodotto ordinario e il graduale si applica quando a ha un numero finito di cifre.

Se i due fattori a e b hanno infinite cifre, fra le espressioni del resto nel prodotto graduale, la più semplice e più generale è quella dovuta alla prof. Vesin [6]:

9. $a, b \in Q \,.\, p, q \in n \,.\!\supset.\, a \times b - a \times_{p+q} b <$
$(\Sigma$ cifre $V_p a + \Sigma$ cifre $V_q b + 1)\, X^{-p-q}$;

cioè la differenza fra il prodotto ordinario ed il prodotto d'un certo grado, si ottiene scomponendo questo grado nella somma $p+q$ di due interi, positivi o negativi; allora questa differenza è minore dell'espressione scritta.

Se p e q sono degli n, e $p<q$, allora $p \cdots q$ indica l'insieme dei numeri interi p, $p+1, \ldots q$. Qui si presenterà spesso $0 \cdots 1$, che significa un numero eguale o a 0, o a 1; e $0 \cdots 2$ che è l'insieme dei numeri 0, 1, 2.

Nel § 6 si userà pure la notazione:

10. Def. $x \in Q \,.\, r \in n \,.\!\supset.\, V'_r x = V_r (x + X^{-r}/2).$

$V'_r x$ si legge " il valore arrotondato ad r decimali di x ".

§ 4. — Interpolazione nella tavola dei quadrati.

Si ha l'identità:

1. $a, b \in Q \,.\, a < b \,.\, x \in a \cdots b \,.\!\supset.$
$x^2 = a^2 + (x-a) \times (b^2 - a^2)/(b-a) - (x-a)(b-x).$

" Date due quantità a e b, la prima minore della seconda, e se x è un valore compreso fra a e b, allora il quadrato di x

[6] V. Vesin, *Proprietà del prodotto graduale*, " R. Accad. dei Lincei ", 6 gennaio 1918.

è eguale al valore che si ottiene interpolando il quadrato fra a e b, meno $(x-a)(b-x)$, che è il resto dell'interpolazione „.

E siccome $0 < (x-a)(b-x) \leqq (b-a)^2/4$, si ha:

2. Nell'ipotesi precedente .Ɔ.

$$x^2 \in a^2 + (x-a)\times(b^2-a^2)/(b-a) - (1-\theta_0)(b-a)^2/4.$$

Qui $1-\theta_0 = 0^{\dashv}1$, cioè frazione propria, compreso 1, valore che assume questa espressione per $x=(a+b)/2$.

Per applicare questa formula al calcolo pratico, suppongo che la quantità numerica x, di cui si vuole il quadrato, sia compresa fra 1 e 10, caso cui ci possiamo sempre ridurre, moltiplicando, se occorre, per una potenza positiva o negativa di 10.

Sia $v = \mathrm{V}_2 x$ il valore con 2 decimali di x, e $z = \mathrm{M}_2 x$ la mantissa rimanente. Nella tavola UTET leggo v^2, e la differenza tabulare $\Delta = (v+\mathrm{X}^{-2})^2 - v^2 = 2v\mathrm{X}^{-2} + \mathrm{X}^{-4}$. La formula 2, in cui al posto di a e b leggo v e $v+\mathrm{X}^{-2}$, diventa:

$$x^2 \in v^2 + \Delta\times\mathrm{X}^2 z - (1-\theta_0)\mathrm{X}^{-4}/4.$$

Sostituisco il prodotto trascendente $\Delta\times\mathrm{X}^2 z$ col prodotto di grado 6:

$$\Delta\times\mathrm{X}^2 z \in \Delta\times_6\mathrm{X}^2 z + \theta_0\mathrm{X}^{-6}\Sigma \text{ cifre } \Delta.$$

Ora Δ varia da 0·0201 per $v=1{\cdot}00$, a 0·1999 per $v=9{\cdot}99$; la massima somma delle cifre è 28. Conchiudo:

$$x^2 \in v^2 + \Delta\times_6\mathrm{X}^2 z + [(-25)^{\vdash}28]\mathrm{X}^{-6}.$$

Prendo il valore con 4 decimali, ed ho:

$$\mathrm{V}_4 x^2 \in v^2 + \mathrm{V}_4[\Delta\times_6\mathrm{X}^2 z] \pm (0\cdots1)\mathrm{X}^{-4}.$$

La proposizione completa si può scrivere:

3. $$x \in 1^{\frown}\mathrm{X} .\text{Ɔ}. \mathrm{V}_4(x^2) \in (\mathrm{V}_2 x)^2 + \mathrm{V}_4\{[(\mathrm{V}_2 x+\mathrm{X}^{-2})^2 - \mathrm{V}_2 x)^2]\times_6\mathrm{X}^2\mathrm{M}_2 x\} \pm (0\cdots1)\mathrm{X}^{-4},$$

e anche:

4. $$x \in 1^{\frown}\mathrm{X} .\text{Ɔ}. \mathrm{V}_4(x^2) \in \mathrm{V}_4\{(\mathrm{V}_2 x)^2 + [(\mathrm{V}_2 x+\mathrm{X}^{-2})^2 - (\mathrm{V}_2 x)^2]\times_6\mathrm{X}^2\mathrm{M}_2 x - 25\mathrm{X}^{-6}\} + (0\cdots1)\mathrm{X}^{-4}.$$

ESEMPIO. — Calcolo di π^2, ove $\pi = 3{\cdot}141592...$

Dalla tavola ho:

$$\begin{aligned} 3{\cdot}14^2 &= 9{\cdot}8596\,, \qquad \Delta = 0{\cdot}0629 \\ \Delta\times 0{\cdot}1 &= \quad 629 \\ \Delta\times 0{\cdot}05 &= \quad 3145 \\ (\mathrm{V}_3\Delta)\times 0{\cdot}009 &= \quad 558 \\ (\mathrm{V}_2\Delta)\times 0{\cdot}0002 &= \quad 12 \\ v^2 + \Delta\times_6(\mathrm{X}^2 x) &= 9{\cdot}869605. \end{aligned}$$

Conchiudo colla regola 3:

$$\mathrm{V}_4(\pi^2) \in 9{\cdot}8696 \pm (0 \cdots 1)\mathrm{X}^{-4},$$

e colla 4:

$$\mathrm{V}_4(\pi^2) \in 9{\cdot}8695 + (0 \cdots 1)\mathrm{X}^{-4}.$$

Continuando il calcolo, si ha $\mathrm{V}_4(\pi^2) = 9{\cdot}8696$.

Volendo maggiore approssimazione, osservo che:

$$x \in 1^{-}\mathrm{X} \,.\!\supset\!.\; x\times_4 x = (\mathrm{V}_2 x)^2 + 2\times \mathrm{T}_0 x\times \mathrm{T}_3 x + \\ + 2(\mathrm{T}_0 x\times \mathrm{T}_4 x + \mathrm{T}_1 x\times \mathrm{T}_3 x),$$

ossia se a $(\mathrm{V}_2 x)^2$, che leggo nella tavola, aggiungo i termini scritti, si ottiene il prodotto di grado 4 di x per x; e così si possono determinare i successivi prodotti graduali con regole note, e giudicare del resto.

§ 5. — Interpolazione nella tavola dei cubi.

Si ha l'identità:

1. $$a, b \in \mathrm{Q} \,.\, a < b \,.\, x \in a^{-}b \,.\!\supset\!. \\ x^3 = a^3 + (x-a)\times(b^3-a^3)/(b-a) - (x-a)(b-x)(a+b+x),$$

che esprime il cubo di x mediante la formula d'interpolazione pei cubi di a e di b, e un resto.

Osservo che $0 < (x-a)(b-x) \leqq (b-a)^2/4$, e $3a < a+b+x < 3b$; onde:

2. Nell'ipotesi precedente $.\!\supset\!.$
$$x^3 \in a^3 + (x-a)\times(b^3-a^3)/(b-a) - \theta(b-a)^2(a^{-}b)\times 3/4.$$

Per applicare questa formula al calcolo pratico, suppongo che la quantità x, che si deve elevare a cubo, sia compresa fra 1 e 10; caso cui possiamo sempre ridurci. Posto $v = V_2 x$, e $z = M_2 x$, nella tavola UTET leggo v^3, e la differenza tabulare $\Delta = (v + X^{-2})^3 - v^3$. La formula 2, in cui al posto di a e b leggo v e $v + X^{-2}$, diventa:

$$x^3 \in v^3 + \Delta \times X^2 z - \theta (v + \theta X^{-2}) X^{-4} \times 3/4,$$

e siccome $v \leqq 9{\cdot}99$, sarà:

$$x^3 \in v^3 + \Delta \times X^2 z - \theta \times 0{\cdot}75 \times X^{-3}.$$

Essendo l'errore $< X^{-3}$, calcolo il prodotto di grado 5:

$$\Delta \times X^2 z \in \Delta \times_5 X^2 z + \theta X^{-5} \Sigma \text{ cifre } \Delta.$$

Ora Δ varia da $0{\cdot}030301$ per $v = 1{\cdot}00$, a $2{\cdot}997001$ per $v = 9{\cdot}99$. La somma delle sue cifre è $\leqq 56$:

$$\Delta \times X^2 z \in \Delta \times_5 X^2 z + \theta \times 0{\cdot}56 X^{-3}.$$

Conchiudo:

$$x^3 \in v^3 + \Delta \times_5 X^2 z + (-0{\cdot}75 \overline{\ } 0{\cdot}56) X^{-3},$$

e

$$V_3 x^3 \in V_3 [v^3 + \Delta \times_5 X^2 z] \pm (0 \cdots 1) X^{-3}.$$

La proposizione completa si può scrivere:

3. $$x \in 1 \overline{\ } X \,.\!\supset\!.\, V_3(x^3) \in V_3 \{ (V_2 x)^3 + [(V_2 x + X^{-2})^3 - (V_2 x)^3] \times_5 M (X^2 x) \} \pm (0 \cdots 1) X^{-3}.$$

Esempio. — Calcolo di π^3.

Leggo nella tavola:

$$3{\cdot}14^3 = 30{\cdot}959144, \qquad \Delta = 0{\cdot}296731$$

$$\Delta \times_5 0{\cdot}15926 = \begin{cases} 2967 \\ 1480 \\ 261 \\ 4 \end{cases}$$

$$\overline{31{\cdot}00626}$$

Conservo 3 cifre decimali, e conchiudo $V_3\pi^3 \in 31{\cdot}006 \pm (0\cdots1)X^{-3}$.
Continuando il calcolo si verifica che: $V_3\pi^3 = 31{\cdot}006$.

La regola seguente dà 5 cifre decimali del cubo d'un numero ridotto ad essere compreso fra 1 e 10:

4. $$x \in 1^{-}X \,.\, v = V_2 x \,.\, z = M_2 x \,.\, d = 3v^2 + (3v)\times_5 z \,.\mathfrak{O}.$$
$$V_5(x^3) \in V_5(v^3 + d\times_7 z) + (0\cdots1)X^{-5}.$$

Esempio. — Calcolo di π^3.

Si ha $v = V_2\pi = 3{\cdot}14$, e $z = M_2\pi = 0{\cdot}00159265\ldots$

$$\text{Sarà } 3v = 9{\cdot}42\,;\ (3v)\times_5 z = \begin{cases} 0{\cdot}00942 \\ \quad\ \ 470 \\ \quad\quad 81 \end{cases}$$
$$\overline{0{\cdot}01493}$$

Leggo v^2 nella tavola, e calcolo: $3v^2 = \underline{29{\cdot}5788}$

$$d = 3v^2 + (3v)\times_5 z = 29{\cdot}59373.$$

$$\begin{array}{lr}
V_4\ d\times 0{\cdot}001 = & 0{\cdot}0295937 \\
V_3\ d\times 0{\cdot}0005 = & 147965 \\
V_2\ d\times 0{\cdot}00009 = & 26631 \\
V_1\ d\times 0{\cdot}000002 = & 590 \\
V_0\ d\times 0{\cdot}0000006 = & 174 \\
V_{-1} d\times 0{\cdot}00000005 = & 10 \\
\hline
d\times_7 z = & 0{\cdot}0471307
\end{array}$$

Leggo nella tavola $\qquad v^3 = \underline{30{\cdot}959144}$

$$v^3 + d\times_7 z = 31{\cdot}00627\ldots$$

Ne prendo 5 cifre decimali: $V_5\pi^3 \in 31{\cdot}00627 + (0\cdots1)X^{-5}$.

Continuando il calcolo, si verifica che la 5ª cifra decimale è proprio 7, ossia la correzione X^{-5} non si presenta in questo caso.

Volendo un maggior numero di cifre decimali, applico la regola:

5. $$x \in 1^{-}X \,.\, v = V_2 x \,.\, z = M_2 x \,.\, r \in 1\cdots50 \,.\mathfrak{O}.$$
$$V_{r+3}(x^3) \in V_{r+3}\{v^3 + [3v^2 + (3v+z)\times_{r+4} z]\times_{r+6} z\} + (0\cdots1)X^{-r-3}.$$

" Se x è una quantità compresa fra 1 e 10, detto v il suo valore con 2 decimali, e z la parte rimanente, se r è un numero fra 1 e 50, si ha il valore con $r+3$ cifre di x^3, colla

regola seguente. Calcolo $v^3+[3v^2+(3v+z)\times_{r+4}z]\times_{r+6}z$. Questa espressione, se in vece dei prodotti graduali immagino i prodotti ordinarii vale x^3. Cancello le ultime tre cifre, cioè prendo $r+3$ cifre di quella espressione. Tutte le cifre rimanenti saranno giuste, salvo l'ultima che forse si deve aumentare di una unità „.

Questa regola permette di determinare fino a 53 cifre decimali del cubo.

§ 6. — **Radice quadrata.**

Tutti i manuali degli ingegneri, già citati (1), dànno le radici quadrate e le cubiche dei numeri da 1 a 1000 con 4 cifre decimali. L'ultima è arrotondata. Quindi in pratica quell'approssimazione è ritenuta sufficiente.

Vogliamo stimare il resto nell'interpolazione di questa tavola.

Dalla formula 1 del § 4, in cui al posto di a, b, x, leggo $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{x}$, si ottiene, dopo alcune trasformazioni:

1. $a, b \in Q . a < b . x \in a^{-}b . \supset . \sqrt{x} = \sqrt{a} + (x-a)(\sqrt{b}-\sqrt{a})/(b-a) +$
$(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{b}-\sqrt{x})(\sqrt{b}-\sqrt{a})/(b-a)$

e dalla formula 2 dello stesso §, ovvero da questa:

2. Nelle ipotesi precedenti $. \supset .$
$\sqrt{x} \in \sqrt{a} + (x-a)(\sqrt{b}-\sqrt{a})/(b-a) + (1-\theta_0)(\sqrt{b}-\sqrt{a})^3/[4(b-a)]$.

Se per a pongo un numero intero v, per b il numero $v+1$, e $x=v+z$, ove $z \in \theta$, ottengo:

3. $v \in N . z \in \theta . \supset . \sqrt{(v+z)} \in \sqrt{v} + z\times(\sqrt{(v+1)}-\sqrt{v}) +$
$(1-\theta_0)(\sqrt{(v+1)}-\sqrt{v})^3/4$.

E siccome $\sqrt{(v+1)}-\sqrt{v} = 1/[\sqrt{v}+\sqrt{(v+1)}] < 1/(2\sqrt{v})$, si ha pure:

4. $v \in N . z \in \theta . \supset . \sqrt{(v+z)} \in \sqrt{v} + z\times(\sqrt{(v+1)}-\sqrt{v}) + \theta/(32v\sqrt{v})$.

Così risulta espresso $\sqrt{v}$ mediante l'interpolazione, e con un resto $< 1/(32v\sqrt{v})$. Questo resto sarà [7]:

$$\begin{array}{lllll} & < 0{\cdot}01, & 0{\cdot}001, & 0{\cdot}0001, & 0{\cdot}00001, \ldots \\ \text{se} & v \geqq 3, & 10, & 47, & 214. \end{array}$$

Il numero da cui si vuol estrarre la radice quadrata si può supporre compreso fra 10 e 1000; perchè si può sempre ridurre ad essere compreso fra questi limiti colla moltiplicazione o divisione per potenze di 100. Quindi nella tavola UTET e consimili, coll'interpolazione non si avrà oltre la 3ª cifra decimale delle radici.

Inoltre le tavole dànno dei numeri da 1 a 1000 le radici arrotondate alla 4ª decimale, e così si ha un secondo errore.

E un terzo proviene dalla necessità di abbreviare il prodotto trascendente $z \times (\sqrt{(v+1)} - \sqrt{v})$.

L'influenza di tutti questi resti è espressa dalla proposizione:

5. $$v \in 10 \cdots 1000 \,.\, z \in \theta \,.\supset.\, V_3 \sqrt{(v+z)} \in$$
$$V_3 \{ V_4 \sqrt{v} + [V_4 \sqrt{(v+1)} - V_4 \sqrt{v}] \times_5 z \} + (0 \cdots 2) X^{-3}.$$

Servendoci invece delle tavole coi valori arrotondati V', si ha:

5′. Nell'ipotesi precedente $.\supset.\, V_3 \sqrt{(v+z)} \in$
$$V_3 \{ V'_4 \sqrt{v} + [V'_4 \sqrt{(v+1)} - V'_4 \sqrt{v}] \times_5 z - 5X^{-5} \} + (0 \cdots 2) X^{-3}.$$

Il radicando, già ridotto ad essere compreso fra 10 e 1000, ove lo si moltiplichi per 4, e si divida la radice per 2, occorrendo più volte, si può ridurre fra limiti più vicini, anzi fra 250 e 1000.

Quindi è utile la seguente regola per ottenere quattro decimali della radice dei numeri fra 100 e 1000, servendoci delle tavole considerate.

6. $$v \in 100 \cdots 1000 \,.\, z \in \theta \,.\supset.\, V_4 \sqrt{(v+z)} \in$$
$$V_4 \{ V_4 \sqrt{v} + [V_4 \sqrt{(v+1)} - V_4 \sqrt{v}] \times_6 z \} + (0 \cdots 2) X^{-4},$$

che si ottiene dalla prop. 5, considerando il prodotto di grado 6

---

(7) G. Pagliero, *Calcolo infinitesimale, con applicazioni all'attuaria*. Lezioni litografate, anno 1910, p. 166.

in vece di quello di grado 5. Usando in vece una tavola colle radici arrotondate V′, si ha:

6′. Nelle ip. prec. $.\supset. V_4\sqrt{(v+z)} \in$
$$V_4\{V'_4\sqrt{v} + [V'_4\sqrt{(v+1)} - V'_4\sqrt{v}]\times_6 z - 50X^{-6}\} + (0\cdots2)X^{-4}.$$

Esempio. — Calcolo di $\sqrt{\pi}$.

Considero 100π. Dalle tavole UTET ho:

$V'_4\sqrt{314}$	=	17·7200	Diff. = 0·0282
Diff × 0·1	=	282	
Diff × 0·05	=	1410	
V_3 Diff × 0·009	=	252	
V_2 Diff × 0·0002	=	4	
		17·724486	
Per l'arrotondamento:		— 50	
		17·724436.	

Sopprimo le ultime due cifre, trasporto il punto decimale, e concludo:

$$V_5\sqrt{\pi} \in 1{\cdot}77244 + (0\cdots2)X^{-5}.$$

Continuando il calcolo, si ha che la 5ª cifra di $\sqrt{\pi}$ è 5.

Si può estrarre la radice quadrata coll'interpolazione nella tavola dei quadrati. Se nella formula 2 pongo $a = v^2$, ove v è un intero, $b = (v+1)^2$, e $x = v^2 + z$, ove $z \in \theta[(v+1)^2 - v^2]$, si ottiene:

7. $$v \in N \,.\, z \in \theta[(v+1)^2 - v^2)] \,.\supset.$$
$$\sqrt{(v^2+z)} \in v + z/[(v+1)^2 - v^2] + 0{\cdot}25\,\theta/[(v+1)^2 - v^2].$$

Si farà la divisione di z, e poi di $z + 0{\cdot}25$ per $(v+1)^2 - v^2 = 2v + 1$, e si scriveranno le cifre comuni ai due quozienti; esse saranno cifre esatte della radice.

Siccome $(v+1)^2 - v^2 = 2v + 1 > 2v$, il resto $(\theta/4)/[(v+1)^2 - v^2]$ si può anche ridurre a $\theta/(8v)$.

Per esempio, calcolo $\sqrt{\pi}$, servendomi delle tavole dei quadrati:

$$10000\pi = 31415{\cdot}92..$$

Leggo nella tavola: $177^2 = 31329$

$$86{\cdot}92$$

$$178^2 - 177^2 = 355;\ \text{questo} \times 0{\cdot}2 = 71{\cdot}0$$

$$15{\cdot}92$$

$$\text{,,} \quad \times 0{\cdot}04 = 14{\cdot}20$$

$$1{\cdot}72.$$

Queste cifre sono comuni ai valori per difetto e per eccesso. Per avere il resto per eccesso aggiungo 0·25:

resto per difetto $= 1{\cdot}72$	resto per eccesso $= 1{\cdot}97$
$355 \times 0{\cdot}004 = 1{\cdot}420$	$355 \times 0{\cdot}005 = 1{\cdot}775$
$\cdot 300$	$\cdot 190$

Divido per 100, e conchiudo che $V_5 \sqrt{\pi} = 1{\cdot}77244$, o questo $+ X^{-5}$.

Volendosi un maggior numero di cifre decimali, conviene applicare l'estrazione graduale della radice quadrata, di cui la Prof. Mori-Breda diede recentemente un'esposizione chiara e completa [8].

§ 7. — Radice cubica.

Dalla formula del § 5, ove si legga $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[3]{b}$, $\sqrt[3]{x}$ al posto di a, b, x, si ottiene la formula d'interpolazione per le radici cubiche:

$$1. \quad a, b \in Q \,.\, a < b \,.\, x \in a^{-}b \,.\supset.\, \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{a} + (x-a)(\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{a})/(b-a) + (\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a})(\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{a})(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{x})/(b-a).$$

Se al posto di a pongo un intero v, e faccio $b = v+1$, e $x = a + z$, ove $z \in \theta$, si ha:

$$2. \quad v \in N \,.\, z \in \theta \,.\supset.\, \sqrt[3]{(v+z)} \in \sqrt[3]{v} + z[\sqrt[3]{(v+1)} - \sqrt[3]{v}] + \theta/(36 v^{5/3}).$$

---

(8) E. Mori-Breda, *Estrazione graduale della radice quadrata*, " Atti Accad. Torino ,, 13 gennaio 1918.

Questo resto nell'interpolazione delle tavole delle radici cubiche dei numeri interi da 1 a 1000 sarà:

$$\begin{array}{lcccccc} < & 0{\cdot}1, & 0{\cdot}01, & 0{\cdot}001, & 0{\cdot}0001, & 0{\cdot}00001, & 0{\cdot}000001, \\ \text{se } v > & 1, & 2, & 8, & 30, & 117, & 464. \end{array}$$

Il numero, da cui si vuol estrarre la radice cubica, si può ridurre ad essere compreso fra 1 e 1000.

Si può anche ridurre ad essere compreso fra 125 e 1000; perchè, occorrendo, si moltiplica per 8, e si divide la radice per 2.

Ciò fatto, si possono avere coll'interpolazione nella tavola delle radici cubiche quattro cifre decimali, mediante la regola:

3. $$v \in 100 \cdots 999 \,.\, z \in \theta \,.\supset.\, V_4 \sqrt[3]{(v+z)} \in$$
$$V_4 \{ V_4 \sqrt[3]{v} + [V_4 \sqrt[3]{(v+1)} - V_4 \sqrt[3]{v}] \times_6 z \} + (0 \cdots 2) X^{-4}.$$

Usando invece le tavole dei valori arrotondati $V'_4 \sqrt[3]{v}$, si avrà:

3′. Nell'ipotesi della 3 $.\supset.\, V_4 \sqrt[3]{(v+z)} \in$
$$V_4 \{ V'_4 \sqrt[3]{v} + [V'_4 \sqrt[3]{(v+1)} - V'_4 \sqrt[3]{v}] \times_6 z - 50 X^{-6} \} + (0 \cdots 2) X^{-4}.$$

Per esempio, calcolo $\sqrt[3]{\pi}$. L'interpolazione fra 3 e 4 dà solo 2 cifre decimali. Perciò moltiplico per 64: $\sqrt[3]{\pi} = (\sqrt[3]{(64\pi)})/4$.

$$64\pi = 201{\cdot}061\ldots$$

Nella tavola UTET leggo: $V' \sqrt[3]{201} = 5{\cdot}8578$

Differenza $= 0{\cdot}0097$, questa $\times_6 0{\cdot}061\ldots = \left\{ \begin{array}{r} 582 \\ 9 \end{array} \right.$

5·858391

Per l'arrotondamento — 50

5·858341.

Conchiudo: $V_4 \sqrt[3]{(64\pi)} \in 5{\cdot}8483 + (0 \cdots 2) X^{-4}$.

Divido per 4: $V_4 \sqrt[3]{\pi} \in 1{\cdot}4645 + (0 \cdots 1) X^{-4}$.

Il calcolo ulteriore dice che la 4ª decimale è effettivamente 5.

Si può estrarre la radice cubica coll'interpolazione nella tavola dei cubi dei numeri $100\cdots1000$. Nella proposizione 1 pongo $a=v^2$, ove v è un intero, $b=v+1$, $x=v^2+z$, ove $z \in \theta[(v+1)^3-v]$; e si ottiene:

4. $$v \in N \,.\, z \in \theta[(v+1)^3-v^3] \,.\supset.\, \sqrt[3]{(v^3+z)} \in v + z/[(v+1)^3-v^3] + \theta(3v+2)/[4[(v+1)^3-v^3]].$$

Si farà la divisione di z, e di $z+(3v+2)/4$ per $(v+1)^3-v^3$; le cifre comuni ai due quozienti saranno cifre esatte della radice.

Il resto $\theta(3v+2)/[4[(v+1)^3-v^3]]$ si può anche ridurre a $\theta/(4v)$.

Il radicando cubico a sia ridotto ad essere compreso fra 1 e 1000. Per avere 6 cifre decimali di $\sqrt[3]{a}$, la regola classica spinge il calcolo fino alla 18ª cifra decimale. Qui spiego una nuova regola, in cui si spinge il calcolo solo fino alla 7ª cifra decimale. Questa regola si ottiene dalla classica sopprimendo le cifre che seguono la 7ª.

Sia v il valore con 2 cifre decimali della radice $v=V_2\sqrt[3]{a}$, che leggo nella tavola dei cubi.

Calcolo: $d=3v^2$, e $r=V_7 a-v^3$.

Il v^2 si legge nella tavola dei quadrati.

Divido r per d, e trovo il primo termine, o termine di grado decimale 3, e sia x.

Calcolo: $d_1=d+x\times 3v$, e $r_1=r-x\times V_4 d_1$.

Divido r_1 per d_1, e trovo il termine y di grado 4; calcolo: $d_2=d_1+x\times 3v+y\times V_1(3v)$, e $r_2=r_1-y\times V_3 d_2$,

Divido r_2 per d_2, e trovo il termine z di grado 5; e poi quello t di grado 6:

$$r_3=r_2-z\times V_2 d_2\,.$$
$$r_4=r_3-t\times V_1 d_2\,.$$

Se $v\geqq 1{\cdot}30$, risulta:

$$V_6\sqrt[3]{a} \in v+x+y+z+t-(0\cdots1)X^{-6}.$$

La regola classica calcola v, d, r come sopra; poi $d_1=d+x\times3v+x^2$, $r_1=r-x\times d_1$, $d_2=d_1+x\times3v+2x^2+y\times(3v+3x)+y^2$, ecc. Questa regola trovasi, con varianti di forma, in Bertrand, e negli attuali trattati d'Aritmetica di Amodeo, Burali, Castellano, Catania, Gaeta, Ingrami, Lomonaco, Moreno, ecc., ma non in tutti.

Pongo $u = x + y + z + t$. La regola si esprime in simboli così:

5. $$a \in 3^{-}X^3 . v = V_2 \sqrt[3]{a} . u = \max[0 \cdots (X^4 - 1)]X^{-6} \cap u \ni [a \geqq v^3 + (3v^2 + 3v T_3 u) \times_7 T_3 u + (3v^2 + 6v T_3 u + 3v \times_5 T_4 u) \times_7 (T_4 u + T_5 u + T_6 u)] . \supset . V_6 \sqrt[3]{a} \in v + u - (0 \cdots 1) X^{-6}.$$

" Se a è una quantità con 1, o 2, o 3 cifre intere, e maggiore di 3, leggo nella tavola dei cubi il valore v con 2 decimali di $\sqrt[3]{a}$; poi determino la massima frazione decimale u di ordine 6, e minore di X^{-2}, tale che a sia maggiore dell'espressione scritta; allora il valore cen 6 decimali di $\sqrt[3]{a}$ vale $v + u$, diminuito forse di una unità dell'ultimo ordine decimale ".

La scrittura simbolica contiene ancora il simbolo aritmetico max=massimo, e i simboli di logica $\cap$ e $\ni$, che rappresentano rispettivamente la congiunzione logica, e l'operazione inversa della $\in$, e che qui corrispondono alle parole con cui quella proposizione fu tradotta.

Esempio. — Calcolo di $\sqrt[3]{\pi}$. Dalla tavola dei cubi ricavo $v = \mathbf{1{\cdot}46}$; leggo v^2 nella tavola, calcolo $3v^2$, e $3v = 4{\cdot}38$, e dispongo il calcolo come segue:

		$V_7 \pi =$	3·1415926
$d = 3v^2 =$	6·3948	$v^3 =$	3·112136
$x = \mathbf{4} X^{-3}$; $x \times 3v =$	1752	$r =$	294566
$d_1 =$	6·41232	$x \times V_4 d_1 =$	256492
$y = \mathbf{5} X^{-4}$; $x \times 3v =$	1752	$r_1 =$	38074
$y \times V_1 (3v) =$	215		
$d_2 =$	6·43199	$y \times V_3 d_2 =$	32155
		$r_2 =$	5919
$z = \mathbf{9} X^{-5}$		$z \times V_2 d_2 =$	5787
		$r_2 =$	132
$t = \mathbf{2} X^{-6}$		$t \times V_1 d_2 =$	128
			4

Conchiudo: $V_6 \sqrt[3]{\pi} \in 1{\cdot}464592 - (0 \cdots 1) X^{-6}$.

Si è supposto $a > 3$. Se a fosse compreso fra 1 e 3, moltiplicandolo per 8 e dividendo la radice per 2 ci riduciamo al caso precedente. Se si applica la regola anche se a è compreso fra 1 e 2, in qualche raro caso (il cui numero però è infinito), la differenza può anche essere di 2 unità del 6° ordine, ma non di più.

§ 8. — Tabella dei reciproci.

Le tavole moderne del tipo considerato dànno tutte i valori di $1000/n$, ove n varia da 1 a 1000, con 5 decimali; quindi nella tavola si possono leggere i valori di $1/n$ con 8 decimali. Questi valori sono esatti, se n è un divisore di 10^8; altrimenti la tavola UTET dà i valori arrotondati.

La regola per l'interpolazione è:

1. $$v \in \mathrm{N} \,.\, z \in \theta \;.\supset.\; 1/(v+z) = 1/v - z(1/v - 1/(v+1)) - z(1-z)/[v(v+1)(v+z)]$$

da cui si ricava:

2. $$\text{Ip. precedente} \;.\supset.\; 1/(v+z) \in 1/v - z(1/v - 1/(v+1)) - \theta/(4v^3).$$

Il resto $\theta/(4v^3)$ sarà minore di

	X^{-3},	X^{-4},	X^{-5},	X^{-6},	X^{-7},	X^{-8},
se	$v > 7$,	14,	30,	63,	136,	293.

Nelle tavole considerate si può sempre supporre v compreso fra 100 e 1000, quindi coll'interpolazione si hanno solo 6 cifre decimali in $1/n$, e 3 cifre decimali in $1000/n$.

§ 9. — Resto nelle formule d'interpolazione.

Se fx è una funzione reale definita nell'intervallo $a \vdash\!\dashv b$, ove $a < b$, avente ivi derivata seconda, e se $x \in a^{-}b$, si ha:

$$fx = fa + (x-a) \times (fb - fa)/(b-a) - (x-a)(b-x)(\mathrm{D}^2 fz)/2,$$

ove z è un conveniente valore compreso fra a e b. Questo teorema si trova in Cauchy, anno 1840; la dimostrazione si è

successivamente semplificata per opera di GENOCCHI, SCHWARZ, STJELTJES. Vedasi p. e. il mio " Formulario ", edizione V del 1908, pag. 297 e 307.

Il resto si può pure esprimere con un integrale definito, applicando la regola da me data pel resto nelle formule di quadratura, ed in generale nelle funzioni di primo grado di una funzione [9].

Nel nostro caso si ha:

$$\begin{vmatrix} fx & x & 1 \\ fb & b & 1 \\ fa & a & 1 \end{vmatrix} = \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{vmatrix} (x-z)\varphi(x-z) & x & 1 \\ (b-z)\varphi(b-z) & b & 1 \\ (a-z)\varphi(a-z) & a & 1 \end{vmatrix} (\mathrm{D}^2 fz)\, dz,$$

ove φz è quella funzione di z tale che, per $z > 0$, $\varphi z = 1$, per $z < 0$, si ha $\varphi z = 0$, e $\varphi 0 = 1/2$, o altro valore.

Questa formula si può pure stabilire direttamente [10] [11].

§ 10. — Logaritmi.

Se a è una quantità positiva, si chiama " ordine di a " il massimo numero intero, positivo o nullo o negativo, x tale che $10^x \leqq a$.

L'ordine di a è anche il numero delle cifre di a che precedono quella delle unità; ove questa frase sia convenientemente intesa.

Log$a$ indica il logaritmo decimale di a. Allora l'eguaglianza:

$$\mathrm{Log}\, 5 = 0{\cdot}6989700...$$

significa che l'ordine di 5 è 0; che l'ordine di $5^{10} = 9765625$ è 6, ossia che 6 cifre precedono quella delle unità; che l'ordine di 5^{100} è 69, ossia esso ha in tutto 70 cifre, e così via.

---

(9) *Resto nelle formule di quadratura espresso con un integrale definito*, " Rendiconti Acc. Lincei ", 4 maggio 1913.

(10) P. QUARRA, *Resto in alcune formule di quadratura*, " Atti Acc. Torino ", 30 gennaio 1913.

(11) F. CANTELLI, *Resti nelle formule di quadratura*, " Atti Acc. Torino ", 28 novembre 1915.

Questa è una definizione semplice ed elementare dei logaritmi decimali. La dott. Frisone ne dedusse le proprietà dei logaritmi, e un nuovo metodo per calcolarli direttamente [12].

Ciò è vero prendendo i logaritmi abbreviati, $V_r \, \text{Log} a$. Se si considerano i logaritmi arrotondati, $V'_r \, \text{Log} a$, non è più vero che la sua parte intera, o caratteristica, sia l'ordine di a.

Così l'ordine di 9999999 è 6, ma la parte intera del suo logaritmo a 7 decimali arrotondato è 7.

$$a, b \in Q \,.\, r \in N \,.\supset.\, V_r \text{Log}(a \times b) \in V_r \text{Log} a + V_r \text{Log} b + (0 \cdots 1) X^{-r}.$$

" Il logaritmo abbreviato di un prodotto vale la somma dei logaritmi dei fattori, aumentata forse di un'unità dell'ultimo ordine „.

$$a, b \in Q \,.\, r \in N \,.\supset.\, V'_r \text{Log}(a \times b) \in V'_r \text{Log} a + V'_r \text{Log} b \pm (0 \cdots 1) X^{-r}.$$

" Il logaritmo arrotondato di un prodotto vale la somma dei logaritmi dei fattori, o questa somma più un'unità dell'ultimo ordine, o questa somma diminuita di un'unità dell'ultimo ordine „. Cioè il logaritmo arrotondato ha tre valori, mentre l'abbreviato ne ha soli due [13].

Babbage, nella *Table of Logarithms*, pubblicata nel 1827, notò con un segno se l'ultima cifra sia stata aumentata nell'arrotondamento; e questa indicazione si trova in alcune tavole posteriori. Così il lettore può a suo piacere usare i valori abbreviati dei logaritmi, i quali valori abbreviati sono assoggettati a regole di calcolo note e semplici; ovvero può usare i valori arrotondati. E può nella tavola a 7 decimali leggere i logaritmi con 6 o con 5 cifre decimali.

Il resto dell'interpolazione dei logaritmi si ottiene dalla formula del § 9 ponendo $fx = \text{Log}\, x$:

$$1. \quad v \in N \,.\, z \in \theta \,.\supset.\, \text{Log}(v+z) \in \text{Log} v + z[\text{Log}(v+1) - \text{Log} v] + z(1-z)(\text{Log}\, e)/[2(v+\theta)^2].$$

---

[12] R. Frisone, *Una teoria semplice dei logaritmi*, " Atti R. Acc. delle Scienze di Torino „, 13 maggio 1917.

[13] G. Pagliero, *Come si usano i logaritmi*, Paravia, 1917, p. 47.

Questo resto si può anche ridurre a $\theta(\text{Log e})/(8v^2)$. Esso sarà minore di

X^{-2},	X^{-3},	X^{-4},	X^{-5},	X^{-6},	X^{-7},	X^{-8},	X^{-9},
se $v > 3$,	8,	24,	74,	233,	737,	2330,	7368.

In conseguenza i tipi di tavole che, con data ampiezza, permettono coll'interpolazione di determinare il massimo numero di cifre decimali, ovvero, che dato il numero delle cifre decimali, hanno volume minimo, sono:

1° Le tavole a 3 decimali dei numeri da 10 a 100. Stanno su d'una cartolina postale, e sono molto utili per spiegare la teoria dei logaritmi.

2° Le tavole a 5 decimali dei numeri da 100 a 1000; sono tali le tavole del manuale UTET, e consimili. Si possono stampare su due pagine ordinarie.

3° Le tavole a 7 decimali dei numeri da 1000 a 10000; sono quelle di Lalande, ecc.

4° Le tavole a 9 decimali dei numeri da 10^4 a 10^5; in pratica esistono quelle a 10 decimali del Vega, le quali esigono l'interpolazione di secondo grado, cioè due tabelle di differenze. Le tavole a 7 decimali dei numeri da 10^4 a 15^5 hanno su quelle a 7 decimali da 10^3 a 10^4 il vantaggio di diminuire il lavoro dell'interpolazione.

Le tavole a 7 decimali dei numeri da 100 a 1000 hanno le dimensioni del tipo 2, ma esigono l'interpolazione di secondo grado. Sono tali quelle ora pubblicate dagli Ing. Carlo e Pietro CAMINATI [14]; il termine di secondo grado vi è chiamato *correzione.*

Oltre al resto nell'interpolazione, c'è il resto proveniente dall'aver abbreviato o arrotondato il logaritmo; e quello proveniente dalla necessità di abbreviare la moltiplicazione trascendente di z per la differenza tabulare.

Tutti questi resti sono compendiati nella regola:

2. $$v \in 100\cdots999 \,.\, z \in \theta \,.\supset.\, V_5 \text{Log}(v+z) \in$$
$$V_5 \{ V_5 \text{Log} v + [V_5 \text{Log}(v+1) - V_5 \text{Log} v] \times_7 z \} + (0\cdots2) X^{-5}.$$

---

[14] *Nuovo Manuale Italiano Logaritmico-Trigonometrico*, Piacenza, 1918.

" Se v è un numero intero compreso fra 100 e 999, e se z è una frazione propria, allora il valore con 5 decimali di $\mathrm{Log}(v+z)$ è eguale al valore corrispondente del logaritmo di v, più il prodotto di grado 7 della differenza tabulare per z, da cui sopprimo le ultime 2 cifre decimali; più ancora o 0, o 1, o 2 unità del 5° ordine decimale ".

Usando invece i logaritmi arrotondati $\mathrm{V}'\mathrm{Log}$, si ha:

2'. Ipotesi della 2 .Ɔ. $\mathrm{V}_5\mathrm{Log}(v+z) \in$
$\mathrm{V}_5 \{ \mathrm{V}'_5\mathrm{Log}v + [\mathrm{V}'_5\mathrm{Log}(v+1) - \mathrm{V}'_5\mathrm{Log}v] \times_7 z - 50\mathrm{X}^{-7} \} + (0 \cdots 2)\mathrm{X}^{-5}$.

Questa proposizione si può anche scrivere:

2''. Idem .Ɔ. $\mathrm{V}_5\mathrm{Log}(v+z) \in$
$\mathrm{V}'_5 \{ \mathrm{V}'_5\mathrm{Log}v + [\mathrm{V}'_5\mathrm{Log}(v+1) - \mathrm{V}'_5\mathrm{Log}v] \times_7 z \} \pm (0 \cdots 1)\mathrm{X}^{-5}$.

I casi in cui la cifra 5ª del logaritmo è eguale alla cifra 5ª del valore ottenuto colle tavole a 5 decimali, abbreviati o arrotondati, colla regola indicata, ovvero è eguale a questa cifra $+1$, sono frequenti.

Molto rari, benchè in numero infinito, sono quelli in cui quella differenza è 2; bisogna cercarli in modo da rendere grandi i tre resti.

Esempio. Vuolsi Log 105·4. Si ha: $\mathrm{V}_5\mathrm{Log}\,105 = 2{\cdot}02118$

$\Delta = \mathrm{V}_5\mathrm{Log}\,106 - \mathrm{V}_5\mathrm{Log}\,105 = 412\mathrm{X}^-$ $\quad \Delta \times 0{\cdot}4 = \quad 1648$

2·022828.

Prendo il valore con 5 decimali; risulta dalla regola:

$$\mathrm{V}_5\mathrm{Log}\,105{\cdot}4 \in 2{\cdot}02282 + (0 \cdots 2)\mathrm{X}^{-5}.$$

La 5ª cifra decimale è effettivamente 4, e non 2.

Quanto precede è applicabile a tutte le tavole di logaritmi dei tipi indicati dopo la prop. 1 di questo §. Però trattandosi di logaritmi a 7 decimali dei numeri da 10^4 a 10^5, non ho potuto trovare un caso in cui la differenza nell'ultima cifra decimale fra il valore vero e il valore dato dall'interpolazione sia $2\mathrm{X}^{-7}$.

Perciò l'affermazione che si trova in tanti libri che " nelle tavole a 7 decimali dei numeri da 10000 a 100000 l'incremento del logaritmo è *sensibilmente* proporzionale a quello del numero ", forse significa " l'errore in questa proporzionalità è nullo ".

Nella ricerca inversa della relazione $x = \text{Log}\,a$, in cui è dato x, e si cerca $a = X^x$, uso le tavole dei valori abbreviati dei logaritmi a 5 decimali dei numeri da 100 a 1000. Perciò il numero x avrà per parte intera 2, ed avrà 5 cifre decimali.

La regola pratica dice di leggere nella tavola il massimo numero intero fra 100 e 999 tale che $V_5 \text{Log}\, v \leqq x$; calcolo $\Delta = V_5 \text{Log}(v+1) - V_5 \text{Log}\, v$, e divido $x - V_5 \text{Log}\, v$ per la differenza tabulare Δ, spingendo il calcolo a due decimali; sia z questo quoziente:

$$z = X^{-2} \{ [X^7 (x - V_5 \text{Log}\, v)] /_0 (X^5 \Delta) \} .$$

La scrittura $b /_0 a$, che qui comparisce, ove a e b sono numeri naturali, indica il quoziente di b per a; caso particolare del rapporto graduale di due quantità numeriche.

Ora $V_2(X^x)$, cioè il valore con 2 decimali del numero il cui logaritmo è x, sarà $= v + z$, diminuito forse di 1, o di 2, o di 3 centesimi. In simboli:

3. $x \in 2 + X^{-5}[0 \cdots (X^5 - 1)] \,.\, v \in 100 \cdots 999 \,.\, V_5 \text{Log}\, v \leqq x <$
$V_5 \text{Log}(v+1) \,.\, \Delta = V_5 \text{Log}(v+1) - V_5 \text{Log}\, v \,.$
$z = X^{-2} \{ [X^7 (x - V_5 \text{Log}\, v)] /_0 (X^5 \Delta) \} \,.\supset.$
$V_2(X^x) \in v + z - (0 \cdots 3) X^{-2}.$

Per esempio X alla potenza 2·99825, colla regola comune dell'interpolazione, $= 996{\cdot}00$; mentre il suo valore con 2 decimali è 995·97; la differenza è precisamente $3\, X^{-2}$.

Per brevità, sono soppresse qui le dimostrazioni delle proposizioni dal § 5 prop. 4 in poi.

Le proposizioni precedenti, in cui manca ogni indicazione bibliografica, non si trovano nei libri da me consultati.

Debbo grazie ai colleghi delle " Conferenze Matematiche Torinesi ", e specialmente alla prof. Luisa Viriglio, per l'idea di questo Studio, e per la verifica dei calcoli.

Generalizzazione della trasformazione di Combescure per le curve

Nota di MATTEO BOTTASSO

Il BIANCHI [1] ha chiamato *trasformazione di* COMBESCURE una corrispondenza fra i punti di due curve tale che le tangenti in due punti corrispondenti risultino sempre parallele. Ne segue allora che le tre direzioni principali in un punto di una delle dette curve sono rispettivamente parallele alle tre direzioni principali corrispondenti nel punto corrispondente dell'altra curva. Per cui, data una linea P, per avere la più generale sua trasformata di COMBESCURE basta considerare lo spigolo di regresso della sviluppabile inviluppata dagli ∞^1 piani, che si ottengono conducendo ad ogni piano osculatore π, in P, alla linea data, un piano parallelo ad una distanza arbitraria x, variabile con continuità al variare di P.

Consideriamo ora un piano π, variabile col punto P della linea data, la cui giacitura sia invariabilmente legata col triedro principale in P della linea stessa e la cui distanza x da P sia funzione continua arbitraria di questo punto.

Lo spigolo di regresso Q della sviluppabile inviluppata da tale sistema ∞^1 di piani può chiamarsi " *una trasformata della linea data* P *rispetto alla giacitura data ed alla distanza* x ".

La trasformazione così definita, comprende, in particolare per π avente la giacitura del piano osculatore in P, la trasformazione, secondo il BIANCHI, di COMBESCURE.

In questa Nota studio appunto tale trasformazione generale, valendomi tanto del calcolo vettoriale ordinario (con i due

---

(1) L. BIANCHI, *Lezioni di Geometria differenziale*, 2ª ediz., vol. I (Pisa, E. Spoerri, 1902), pag. 40 e seg.

prodotti $\times$, $\wedge$) quanto delle formazioni geometriche del PEANO. Qui come in altri casi ([2]) l'uso contemporaneo dei due algoritmi conduce in modo più rapido e semplice a stabilire delle proprietà piuttosto complesse.

Così, dopo le premesse dei n^{i} 1 e 2, ho trovato l'espressione del punto Q in funzione del punto P (e degli elementi s, $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$, ρ, τ..., della linea P), della distanza x e d'un vettore unitario $\boldsymbol{u}$ (e delle sue prime derivate) normale al piano π, e quindi invariabilmente legato al triedro principale in P. Similmente, giovandomi d'una mia Nota sugli inviluppi ([3]), ho espresso nel n° 6 il rapporto $f = ds_1/ds$ dell'elemento d'arco della linea Q al corrispondente elemento della linea P, ed il prodotto di tale rapporto per ciascuna delle due curvature della linea Q, come estensione delle proprietà essenziali della trasformazione di COMBESCURE.

Ho espresso pure nel n° 4 il punto Q con gli elementi della linea P ed il solo vettore $\boldsymbol{u}$ (senza $\boldsymbol{u}'$, $\boldsymbol{u}''$), considerando inoltre il caso di $x = 0$ (linea R), dal quale si passa al caso generale con una semplice trasformazione di COMBESCURE.

Se, invece di x, è dato f in funzione di P, la linea Q risulta determinata a meno d'una traslazione ed il punto Q può esprimersi sotto forma d'un integrale definito con un limite variabile (n° 7).

Ho infine espresso la terna principale $\boldsymbol{t}_1$, $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{b}_1$ della linea Q, della quale (in generale) la sola binormale $\boldsymbol{b}_1 = \pm \boldsymbol{u}$ è rigidamente legata a $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$ ([4]).

Negli ultimi numeri (9 a 13) ho considerato i casi in cui $\boldsymbol{u}$ coincida successivamente con $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$, ovvero quando la linea è piana, od è un'elica cilindrica.

([2]) C. BURALI-FORTI, *Sopra alcune superficie rigate dipendenti dalle indicatrici sferiche di una curva gobba* (" Rend. R. Acc. Lincei ", vol. XXIII, serie 5ª, 2° sem., 1914).

([3]) *Le curvature negli inviluppi...* (" Atti R. Ist. Veneto ", t. LXXII, Parte 2ª, 1912-13).

([4]) I risultati indicati possono pure dedursi dalla soluzione del problema sulla determinazione degli elementi d'una linea della quale è assegnata la binormale ($\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{u}$). Per questo ed altri problemi analoghi V. in questo stesso Volume di Atti C. BURALI-FORTI, *Linea in ogni cui punto...*

1. — Della linea luogo del punto variabile P indichiamo con s l'arco (contato da un punto scelto ad arbitrio sulla linea), ρ, τ i raggi di flessione e torsione; $\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}$ i soliti tre vettori unitarî (a due a due ortogonali) paralleli rispettivamente alla tangente, alla normale principale ed alla binormale in P, e formanti un sistema ortogonale destro.

Indicando sempre con gli apici le derivate rispetto ad s, si ponga:

$$(1) \qquad f = \rho^{-1}.\boldsymbol{b} - \tau^{-1}.\boldsymbol{t} = \boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{n}', \qquad \delta = \rho\tau' - \tau\rho',$$

da cui

$$(2) \qquad f' = -\rho'\rho^{-2}.\boldsymbol{b} + \tau'\tau^{-2}.\boldsymbol{t}, \qquad f \wedge f' = \delta\,(\rho\tau)^{-2}.\boldsymbol{n}.$$

Le formule di Frenet assumono allora la forma semplice [Burali-Forti, loc. cit. (2)]:

$$(3) \qquad \boldsymbol{t}' = f \wedge \boldsymbol{t}, \qquad \boldsymbol{n}' = f \wedge \boldsymbol{n}, \qquad \boldsymbol{b}' = f \wedge \boldsymbol{b};$$

e quindi, se $\boldsymbol{u}$ è un vettore unitario invariabilmente collegato a $\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}$ (tale cioè che $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{b}$ sono costanti), si ha in generale:

$$(4) \qquad \boldsymbol{u}' = f \wedge \boldsymbol{u}.$$

In altri termini, la retta Pf è l'asse (istantaneo) della rotazione atta a portare a coincidere il triedro fondamentale di vertice P con quello successivo ad esso di vertice $P + dP$, e $(ds/dt)f$ è il vettore della velocità angolare che definisce il detto stato cinetico di rotazione [5]. Perciò la retta Pf è generatrice della rettificante della linea P.

2. — Per ciò che segue occorre specialmente tener presenti le formule del calcolo geometrico che ora riportiamo [6].

---

(5) V. p. es. P. Burgatti, *Lezioni di Meccanica razionale* (Bologna, Zanichelli, 1916), pag. 72 (7); oppure R. Marcolongo, *Meccanica razionale*, I (2a ediz., Hoepli, 1917), pag. 121.

(6) Vedi C. Burali-Forti, *Corso di Geometria Analitico-Proiettiva* (Torino, G. B. Petrini, 1912), Cap. I e Cap. IV, § 1; od anche C. Burali-Forti et R. Marcolongo, *Éléments de Calcul vectoriel*, etc. (Paris, Hermann, 1910), Appendice.

Se A è un punto, $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ sono vettori, u, v sono bivettori ed Ω è il trivettore unitario ($6A\Omega = 1$), si ha:

$$(5) \qquad 6Au \,.\, v = 6v \,.\, Au = uv,$$

$$(5') \qquad 6Au \,.\, Av = -6Av \,.\, Au = A \,.\, uv,$$

ove uv è prodotto regressivo nel piano all'infinito.

$$(6) \qquad 6A\boldsymbol{u} \,.\, Au = 6Au \,.\, A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} \times |u \,.\, A.$$

$$(7) \qquad \boldsymbol{uv} \,.\, u = \frac{\boldsymbol{u}u}{\Omega}\boldsymbol{v} - \frac{\boldsymbol{v}u}{\Omega}\boldsymbol{u};$$

in particolare:

$$(8) \qquad \boldsymbol{uv} \,.\, |\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}) \wedge \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w} \,.\, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} \,.\, \boldsymbol{u}.$$

Inoltre:

$$(9) \qquad 6A\boldsymbol{u} \,.\, \Omega = \boldsymbol{u}, \qquad 6Au \,.\, \Omega = u,$$

$$(10) \qquad \boldsymbol{u}\Omega = 0, \qquad u\Omega = 0,$$

$$(11) \qquad \boldsymbol{u}|\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} \,.\, \Omega, \qquad |(\boldsymbol{uv}) = |\boldsymbol{u} \,.\, |\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v},$$

$$(12) \qquad \boldsymbol{uvw} = \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} \,.\, \Omega.$$

3. — Si consideri il piano normale ad $\boldsymbol{u}$, a distanza x (funzione continua di P, cioè di s) da P; esso è la posizione della forma di 3ª specie

$$(13) \qquad \pi = (P + x\boldsymbol{u})|\boldsymbol{u} = P|\boldsymbol{u} + x\Omega.$$

Da questa, per derivazioni successive, si ricava subito:

$$(14) \qquad \begin{cases} \pi' = P|\boldsymbol{u}' + (\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{u} + x')\,\Omega, \\ \pi'' = P|\boldsymbol{u}'' + (x'' - \rho^{-1}\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{u})\,\Omega, \\ \pi''' = P|\boldsymbol{u}''' + (2\rho'\rho^{-2}\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{u} - \rho^{-1}\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{u}' + x''')\,\Omega, \end{cases}$$

quando si osservi che se $\boldsymbol{u}_1$ è un qualsiasi altro vettore unitario invariabilmente legato a $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b})$, dalla (4) risulta:

$$(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u}_1)' = \boldsymbol{f} \wedge \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{f} \times \boldsymbol{u}_1 = 0,$$

che inoltre è $P' = \boldsymbol{t}$ e per le (1), (2), (3), (4), (12) si ha:

$$\boldsymbol{t}|\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{t}f\boldsymbol{u} = -\rho^{-1}\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{u} \,.\, \Omega,$$
$$\boldsymbol{t}|\boldsymbol{u}'' = \boldsymbol{t}f'\boldsymbol{u} + \boldsymbol{t}f\boldsymbol{u}' = (\rho'\rho^{-2}.\, \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{u} - \rho^{-1}\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{u}')\,\Omega.$$

La retta caratteristica d'un piano dell'inviluppo di piani (13) è rappresentata da $\pi\pi'$, cioè per le (5'), (9), (10), (11), da

$$6\pi\pi' = P(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{u}') + (\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{u} + x').|\boldsymbol{u} - x.|\boldsymbol{u}'. \tag{15}$$

Il punto generico Q dello spigolo di regresso Γ, della rigata sviluppabile generata da $\pi\pi'$, vien rappresentato da $\pi\pi'\pi''$, che è precisamente il prodotto di tale punto Q per il fattore numerico $6\pi\pi'\pi''\Omega$ [Cfr. mia Nota (3), § 2]. Ora dalle (14), (15), in virtù delle (6), (9), (10), (5), (11) si ha subito:

$$\begin{aligned} 6^2\pi\pi'\pi'' = {} & \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{u}' \times \boldsymbol{u}''.\, P - (\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{u} + x')\, \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{u}'' + \\ & + x\boldsymbol{u}' \wedge \boldsymbol{u}'' + (x'' - \rho^{-1}\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{u}) \,.\, \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{u}'. \end{aligned} \tag{16}$$

Da questa e dalla terza delle (14), tenendo presenti con le (12), (10) le regole fondamentali del prodotto alternato, s'ottiene facilmente:

$$\begin{aligned} 6^3\pi\pi'\pi''\pi''' = {} & - x\boldsymbol{u}' \wedge \boldsymbol{u}'' \times \boldsymbol{u}''' + \\ & + (\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{u} + x')\, \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{u}'' \times \boldsymbol{u}''' + \\ & + (\rho^{-1}\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{u} - x'')\, \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{u}' \times \boldsymbol{u}''' + \\ & + (2\rho'\rho^{-2}\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{u} - \rho^{-1}\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{u}' + x''')\, \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{u}' \times \boldsymbol{u}''. \end{aligned} \tag{17}$$

Le (13), (15), (16) per le (9), (10) ci dànno ancora:

$$6\pi\Omega = |\boldsymbol{u}, \quad 6^2\pi\pi'\Omega = \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{u}', \quad 6^3\pi\pi'\pi''\Omega = \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{u}' \times \boldsymbol{u}''. \tag{18}$$

Per cui, indicando con Q il punto generico dello spigolo di regresso Γ inviluppato dai piani π, per la (16) e l'ultima delle (18), si ha:

$$\begin{aligned} Q = P + (\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{u}' \times \boldsymbol{u}'')^{-1} [& x\boldsymbol{u}' \wedge \boldsymbol{u}'' - \\ & - (\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{u} + x')\, \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{u}'' + (x'' - \rho^{-1}\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{u})\, \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{u}']. \end{aligned} \tag{19}$$

4. — In particolare, per $x = 0$ sostituendo ad $\boldsymbol{u}'$ il valore dato dalla (4) e ad $\boldsymbol{u}''$ il valore che ne segue

$$\boldsymbol{u}'' = (f \wedge \boldsymbol{u})' = f' \wedge \boldsymbol{u} + f \wedge (f \wedge \boldsymbol{u}), \tag{20}$$

s'ottiene *l'espressione del punto generico* R *dello spigolo di regresso della sviluppabile inviluppata dai piani* $P|\boldsymbol{u}$:

$$(21)\qquad R = P + [f\wedge f'\times \boldsymbol{u} + f\times \boldsymbol{u}\,.\,(f\wedge \boldsymbol{u})^2]^{-1}. \\ .\{\boldsymbol{t}\times \boldsymbol{u}\,.\,[(f'\wedge \boldsymbol{u})\wedge \boldsymbol{u} + f\times \boldsymbol{u}\,.\,f\wedge \boldsymbol{u}] + \\ + \rho^{-1}\boldsymbol{n}\times \boldsymbol{u}\,.\,(f\wedge \boldsymbol{u})\wedge \boldsymbol{u}\}.$$

La tangente in Q alla Γ_0 è la posizione di $\pi\pi'$ ed è quindi parallela al vettore [V. la 2ª delle (18)]

$$(18')\qquad 6^2\pi\pi'\Omega = \boldsymbol{u}\wedge \boldsymbol{u}' = \boldsymbol{u}\wedge(f\wedge \boldsymbol{u}) = f - f\times \boldsymbol{u}\,.\,\boldsymbol{u},$$

cioè alla componente normale di f rispetto ad $\boldsymbol{u}$; perciò detta tangente è l'intersezione dei due piani, l'uno normale ad $\boldsymbol{u}$ e l'altro parallelo ad f ed $\boldsymbol{u}$, passanti per Q.

Siccome la (18′) è indipendente da x, emerge che:

Le linee Q, *corrispondenti ad uno stesso vettore* $\boldsymbol{u}$ *ed a funzioni* x *arbitrariamente fissate, si ottengono l'una dall'altra con la particolare trasformazione di* Combescure-Bianchi.

Quindi, per ottenere tutte le curve date dalla nostra trasformazione generale basta considerare ad esempio la linea R, corrispondente ad $x = 0$, ed applicare a questa la trasformazione di Combescure. Cioè:

La più generale trasformazione (*d'una linea* P) *rispetto ad una giacitura data ed alla distanza* x, *è il prodotto della trasformazione rispetto a quella stessa giacitura ed alla distanza* zero *per la più generale trasformazione di* Combescure-Bianchi.

Nella (19) si posson pure sostituire ad $\boldsymbol{u}', \boldsymbol{u}''$ i loro valori (4), (20), ed allora tenendo conto della (21) si ha:

$$(19')\qquad Q = R + [f\wedge f'\times \boldsymbol{u} + f\times \boldsymbol{u}\,.\,(f\wedge \boldsymbol{u})^2]^{-1}. \\ .\{x\,[(f\wedge \boldsymbol{u})^2.f + f\wedge f'\times \boldsymbol{u}\,.\,\boldsymbol{u}] + \\ + x'[(f'\wedge \boldsymbol{u})\wedge \boldsymbol{u} + f\times \boldsymbol{u}\,.f\wedge \boldsymbol{u}] + x''\boldsymbol{u}\wedge(f\wedge \boldsymbol{u})\},$$

che stabilisce anche la corrispondenza fra le due curve Q ed R.

5. — Quali esempi ben noti a verifica di quanto precede, nel caso di $x = 0$, osserviamo che:

1°) Per $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{t}$ s'ottiene la *sviluppabile polare* (della linea P), nel qual caso la (15) ci dà quale retta tangente $\rho[P(\boldsymbol{t}\wedge \boldsymbol{t}') + \boldsymbol{n}\boldsymbol{b}] = (P + \rho\boldsymbol{n})\boldsymbol{b}$, e la (21) si riduce a $P + \rho\boldsymbol{n} - \tau\rho'.\boldsymbol{b}$.

2°) Per $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{n}$ s'ottiene la *sviluppabile rettificante,* ed allora dalla (15), per la (1), si ha quale retta tangente Pf, e dalla (21) si ottiene, quale punto generico dello spigolo di regresso, $P-\rho\tau^2\delta^{-1}f$.

3°) Per $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{b}$ s'ottiene la sviluppabile dei piani osculatori, e dalla (15) si ha $P\boldsymbol{t}$ quale retta tangente, mentre la (21) ci dà subito $R=P$.

6. — L'elemento d'arco ds_1, la flessione $1/\rho_1$ e la torsione $1/\tau_1$ della curva Γ in Q si possono ottenere immediatamente, dopo i risultati del n° 3, in funzione della linea P, di $\boldsymbol{u}$ e di x, valendosi delle formole (12) della mia Nota cit. [in (3), pag. 288], che si possono scrivere sotto la forma:

$$\frac{ds_1}{ds}=\frac{\mathrm{mod}\,(\pi\pi'\pi''\pi''')}{6\,(\pi\pi'\pi''\Omega)^2}\,\mathrm{mod}\,(\pi\pi'\Omega). \tag{22}$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{1}{\rho_1}&=6\,\mathrm{mod}\frac{(\pi\pi'\pi''\Omega)^3}{\pi\pi'\pi''\pi'''}\;\frac{\mathrm{mod}\,(\pi\Omega)}{[\mathrm{mod}\,(\pi\pi'\Omega)]^3},\\ \frac{1}{\tau_1}&=-\frac{6\,(\pi\pi'\pi''\Omega)^2}{\pi\pi'\pi''\pi'''\,(\pi\Omega)^2}. \end{aligned}\right. \tag{23}$$

Così, per le (19), (18), dalla (22) si ha:

$$\begin{aligned}\frac{ds_1}{ds}=\mathrm{mod}\Big\{\frac{\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{u}'}{(\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{u}'\times\boldsymbol{u}'')^2}\big[&-x\boldsymbol{u}'\wedge\boldsymbol{u}''\times\boldsymbol{u}'''+\\ &+(\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{u}+x')\,\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{u}''\times\boldsymbol{u}'''+\\ &+(\rho^{-1}\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{u}-x'')\,\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{u}'\times\boldsymbol{u}'''+\\ &+(2\rho'\rho^{-2}.\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{u}-\rho^{-1}.\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{u}'+x''')\,\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{u}'\times\boldsymbol{u}''\big]\Big\}.\end{aligned} \tag{24}$$

Indicando con f (funzione di P, cioè dell'arco s) il valore (24) di ds_1/ds, dalle (23) si ricava subito:

$$\left\{\begin{aligned} f\rho_1^{-1}&=\mathrm{mod}\,(\pi\pi'\pi''\Omega)\;\mathrm{mod}\,(\pi\Omega):(\pi\pi'\Omega)^2,\\ f\tau_1^{-1}&=-\epsilon\,\mathrm{mod}\,(\pi\pi'\Omega):(\pi\Omega)^2, \end{aligned}\right. \tag{23'}$$

ove ϵ indica il segno del numero reale $\pi\pi'\pi''\pi'''$; cioè, per le (18), (4), (20):

$$\left\{\begin{aligned} f\rho_1^{-1}&=\mathrm{mod}\,(\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{u}'\times\boldsymbol{u}''):(\boldsymbol{u}')^2\\ &=\mathrm{mod}\,[\delta\,(\rho\tau)^{-2}\,(\boldsymbol{f}\wedge\boldsymbol{u})^{-2}.\,\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{u}+\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{u}],\\ f\tau_1^{-1}&=-\epsilon\,\mathrm{mod}\,\boldsymbol{u}'=-\epsilon\,\mathrm{mod}\,(\boldsymbol{f}\wedge\boldsymbol{u}). \end{aligned}\right. \tag{25}$$

Queste ultime mostrano che il rapporto $\tau_1 : \rho_1$ è indipendente da x, come deve avvenire, dopo quanto si è detto nel n° 4, per una nota proprietà delle trasformazioni di Combescure.

7. — Assegnato il vettore $\boldsymbol{u}$ ed il numero positivo $f = ds_1/ds$ in funzione di P (o di s), la (24) mostra che per ottenere la distanza x del piano osculatore a Γ in Q dal punto corrispondente P della linea primitiva, basta risolvere un'equazione differenziale lineare del 3° ordine.

Perciò la curva Γ è individuata dal vettore $\boldsymbol{u}$, dalla funzione f e dai valori x_0, x_0', x_0'' che x, x', x'' assumono rispettivamente per un valore assegnato s_0 di s. In altri termini, Γ risulta individuata dati $\boldsymbol{u}, f$ ed il punto Q_0 di Γ corrispondente ad un valore fissato s_0 di s, cioè ad una posizione fissata P_0 del punto P.

Del resto ciò risulta pure osservando che, siccome la tangente in Q a Γ è parallela al vettore (18′) (n° 4) e gli archi s_1 crescono con s, quale vettore unitario $\boldsymbol{t}_1$ parallelo a detta tangente si ha:

$$(26) \qquad \boldsymbol{t}_1 = dQ/ds_1 = \boldsymbol{u} \wedge (\boldsymbol{f} \wedge \boldsymbol{u}) : \text{mod}\, (\boldsymbol{f} \wedge \boldsymbol{u});$$

e quindi moltiplicando per f ed integrando:

$$(27) \qquad Q = Q_0 + \int_0^s f\, [\text{mod}\, (\boldsymbol{f} \wedge \boldsymbol{u})]^{-1}\, \boldsymbol{u} \wedge (\boldsymbol{f} \wedge \boldsymbol{u}) \,.\, ds.$$

8. — Indicando con $\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{b}_1$ la solita terna unitario-ortogonale-destrogira, parallela alle direzioni principali di Γ in Q, dalla (26), cioè dalla

$$(26') \qquad \boldsymbol{t}_1 = -(\text{mod}\, \boldsymbol{u}')^{-1}\, \boldsymbol{u}' \wedge \boldsymbol{u},$$

osservando che si ha, qualunque sia il vettore $\boldsymbol{a}$:

$$(28) \qquad [(\text{mod}\, \boldsymbol{a})^{-1} .\, \boldsymbol{a}]' = (\text{mod}\, \boldsymbol{a})^{-3} .\, (\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{a}') \wedge \boldsymbol{a},$$

e per le formule di Frenet, si ottiene:

$$\rho_1^{-1} f \,.\, \boldsymbol{n}_1 = -(\text{mod}\, \boldsymbol{u}')^{-3} .\, \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{u}' \times \boldsymbol{u}'' .\, \boldsymbol{u}';$$

e quindi, per le (25), $-\boldsymbol{n}_1 = \epsilon_0 (\text{mod}\, \boldsymbol{u}')^{-1} . \boldsymbol{u}'$, essendo ϵ_0 il segno di $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{u}' \times \boldsymbol{u}''$. Dopo ciò si ha subito $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{t}_1 \wedge \boldsymbol{n}_1 = \epsilon_0 \boldsymbol{u}$. Dunque:

La linea trasformata della linea P *rispetto alla giacitura normale al vettore* $\boldsymbol{u}$ *e ad una* x *arbitraria, il cui arco cresca col crescere di quello della linea* P, *ha in ogni suo punto* Q (*corrispondente al punto* P) *la sua tangente, la sua normale principale e la sua binormale rispettivamente parallele ai vettori della terna unitario-ortogonale-destrogira:*

$$(29) \quad \begin{cases} (\text{mod}\, \boldsymbol{u}')^{-1} . \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{u}' = \{ \text{mod}\, [\boldsymbol{f} \wedge (\boldsymbol{f} \wedge \boldsymbol{u})] \}^{-1} . \boldsymbol{f} \wedge (\boldsymbol{f} \wedge \boldsymbol{u}), \\ -\epsilon_0 (\text{mod}\, \boldsymbol{u}')^{-1} . \boldsymbol{u}' = -\epsilon_0 [\text{mod}\, (\boldsymbol{f} \wedge \boldsymbol{u})]^{-1} . \boldsymbol{f} \wedge \boldsymbol{u}, \text{ ed } \epsilon_0 \boldsymbol{u}, \end{cases}$$

ove ϵ_0 *è il segno del numero reale* $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{u}' \times \boldsymbol{u}''$.

Il rapporto dell'elemento d'arco di detta linea trasformata a quello corrispondente della linea primitiva è espresso dalle (24), *e le due curvature della linea sono date dalle* (25).

Alcuni casi particolari.

9. — Specializzando la posizione del vettore $\boldsymbol{u}$ si ottengono dei casi particolari della trasformazione da noi studiata.

Così la trasformazione di Combescure si ottiene ponendo $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b}$, dalla quale segue, per le formule di Frenet:

$$\boldsymbol{b}' = \tau^{-1} \boldsymbol{n}, \qquad \boldsymbol{b}'' = -\rho^{-1} \tau^{-1} \boldsymbol{t} - \tau' \tau^{-2} \boldsymbol{n} - \tau^{-2} \boldsymbol{b},$$
$$\boldsymbol{b}''' = \rho^{-2} \tau^{-2} (2 \rho \tau' + \tau \rho') \boldsymbol{t} + \tau^{-3} [2 (\tau')^2 - \tau \tau'' - 1 - \tau^2 \rho^{-2}] \boldsymbol{n} + \\ + 3 \tau' \tau^{-3} \boldsymbol{b},$$

e quindi

$$\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{b}' = -\tau^{-1} \boldsymbol{t}, \qquad \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{b}'' = \tau' \tau^{-2} \boldsymbol{t} - \tau^{-1} \rho^{-1} \boldsymbol{n},$$
$$\boldsymbol{b}' \wedge \boldsymbol{b}'' = \tau^{-2} \rho^{-1} \boldsymbol{b} - \tau^{-3} \boldsymbol{t}, \qquad \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{b}' \times \boldsymbol{b}'' = \rho^{-1} \tau^{-2},$$
$$\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{b}' \times \boldsymbol{b}''' = -\tau^{-3} \rho^{-2} (2 \rho \tau' + \tau \rho'),$$
$$\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{b}'' \times \boldsymbol{b}''' = \tau^{-3} \rho^{-2} (\rho \tau^{-1} + \tau \rho^{-1} + \rho \tau'' + \rho' \tau'),$$
$$\boldsymbol{b}' \wedge \boldsymbol{b}'' \times \boldsymbol{b}''' = \tau^{-5} \rho^{-2} (\rho \tau' - \tau \rho') = \tau^{-5} \rho^{-2} \delta.$$

Dopo ciò le (19) e (24) dànno facilmente:

$$(30)\qquad Q_b = P - \rho\,(\tau^{-1}x + \tau' x' + \tau x'')\,.\,\boldsymbol{t} + \tau x'.\,\boldsymbol{n} + x\boldsymbol{b},$$

$$(31)\qquad ds_1/ds = \operatorname{mod}\big\{1 + \delta\tau^{-2}x - [\rho\tau^{-1} + \tau\rho^{-1} + (\rho\tau')']\,x' - (2\rho\tau' + \tau\rho')\,x'' - \rho\tau x'''\big\},$$

quali espressioni del punto generico della curva trasformata della linea P e della funzione $f = ds_1/ds$ mediante gli elementi intrinseci della linea primitiva e della distanza x.

Similmente le (25) dànno subito le note relazioni [loc. cit. (1), § 20, (44)]:

$$\rho_1 = f\,.\,\rho, \qquad \tau_1 = -\,\epsilon f \operatorname{mod}\tau = \epsilon_1 f\tau,$$

ove ϵ_1 è il segno del valore della parentesi graffa nell'espressione scritta per f.

La (27) si riduce semplicemente a

$$(30')\qquad Q_b = Q_0 + \int_0^s f\boldsymbol{t}\,ds = Q_0 + \int f\,.\,dP,$$

ove, anche nell'ultimo termine, s'intende che l'integrazione va estesa fra i due punti della curva P corrispondenti ai valori 0 ed s dell'arco; mentre, per le (29), la terna $\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{b}_1$ coincide rispettivamente con $\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}$.

10. — Per $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{t}$ si ottengono tutte le trasformate di Combescure dello spigolo di regresso della sviluppabile polare della linea P. Allora si ha:

$$\boldsymbol{t}' = \rho^{-1}\boldsymbol{n}, \qquad \boldsymbol{t}'' = -\,\rho^{-2}\,(\boldsymbol{t} + \rho'\boldsymbol{n} + \rho\tau^{-1}\boldsymbol{b}),$$

$$\boldsymbol{t}''' = 3\rho'\rho^{-3}\boldsymbol{t} + \rho^{-2}\tau^{-2}\,(2\tau\rho' + \rho\tau')\,\boldsymbol{b} + \rho^{-3}\,[2\,(\rho')^2 - \rho\rho'' - 1 - \rho^2\tau^{-2}]\,\boldsymbol{n};$$

$$\boldsymbol{t}\wedge\boldsymbol{t}' = \rho^{-1}\boldsymbol{b}, \qquad \boldsymbol{t}\wedge\boldsymbol{t}'' = \rho^{-1}\tau^{-1}\boldsymbol{n} - \rho'\rho^{-2}\boldsymbol{b}, \qquad \boldsymbol{t}'\wedge\boldsymbol{t}'' = \rho^{-2}\boldsymbol{f};$$

$$\boldsymbol{t}\wedge\boldsymbol{t}'\times\boldsymbol{t}''' = -\,\rho^{-2}\tau^{-1}, \qquad \boldsymbol{t}\wedge\boldsymbol{t}'\times\boldsymbol{t}''' = \rho^{-3}\tau^{-2}\,(2\tau\rho' + \rho\tau'),$$

$$\boldsymbol{t}\wedge\boldsymbol{t}''\times\boldsymbol{t}''' = -\,\rho^{-3}\tau^{-2}\,[\tau\rho^{-1} + \rho\tau^{-1} + (\tau\rho')'],$$

$$\boldsymbol{t}'\wedge\boldsymbol{t}''\times\boldsymbol{t}''' = \delta\rho^{-5}\tau^{-2}.$$

Quindi, quali espressioni del punto generico della curva trasformata, e del rapporto del suo elemento d'arco all'elemento corrispondente della curva primitiva in virtù delle (19), (24), si ha:

$$(32)\quad R_t = P + x\boldsymbol{t} + \rho(1+x')\,\boldsymbol{n} + \tau[\rho^{-1}x + \rho'(1+x') + \rho x'']\,\boldsymbol{b},$$

$$(33)\quad ds_1/ds = \mathrm{mod}\,\{\rho\tau^{-1} + (\tau\rho')' + \delta\rho^{-2}x + \rho\tau x''' + [\rho\tau^{-1} + \tau\rho^{-1} + (\tau\rho')']\,x' + (2\tau\rho' + \rho\tau')\,x''\}.$$

Inoltre, per $f = ds_1/ds$, le (25) permettono pure di esprimere i raggi di flessione e di torsione (ρ_1 e τ_1) della linea predetta, e risulta:

$$(34)\qquad \rho_1 = f\,.\,\mathrm{mod}\,\tau, \qquad \tau_1 = -\epsilon f.\,\rho = \epsilon_1\rho,$$

ove ϵ_1 è il segno del valore della ultima parentesi graffa.

La (27), per $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b} = \boldsymbol{t}\wedge\boldsymbol{n} = \rho\boldsymbol{t}\wedge\boldsymbol{t}'$, si riduce a:

$$(32')\quad Q_t = Q_0 + \int_0^s f\boldsymbol{b}\,ds = Q_0 - \int f\boldsymbol{n}\wedge dP = Q_0 + \int \rho f\boldsymbol{t}\wedge d\boldsymbol{t};$$

e, per le (29), la terna $\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{b}_1$ coincide rispettivamente con $\boldsymbol{b}$, $\epsilon_2\boldsymbol{n}$, $-\epsilon_2\boldsymbol{t}$, essendo ϵ_2 il segno di τ (7).

Così nel caso di $x = 0$ si ha $f = \mathrm{mod}\,[\rho\tau^{-1} + (\tau\rho')']$; e, quali espressioni sotto forma semplice ed intrinseca dei due raggi di curvatura della sviluppabile polare [Cfr. la Nota (3), n° 3], si ottiene:

$$(34')\quad \rho_c = \mathrm{mod}\,[\rho + \tau(\tau\rho')'], \qquad \tau_c = \rho\,[\rho\tau^{-1} + (\tau\rho')'].$$

11. — Per $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{n}$ si hanno le trasformate di COMBESCURE dello spigolo di regresso della sviluppabile rettificante.

Nel caso di $\delta = 0$, cioè $\rho^{-1}\tau =$ costante, la linea P è una elica e i piani $Q|\boldsymbol{n}$ inviluppano un cilindro a generatrici parallele a quelle del cilindro dell'elica. Escluso questo caso, e pro-

---

(7) Cfr. G. SANNIA, *Trasformazioni di Combescure ed altre analoghe per le curve storte* (" Rend. Circ. Mat. " di Palermo, t. XX, 1905, pp. 83-92), pag. 85.

cedendo come nei due numeri precedenti, quale espressione del punto generico di detta trasformata s'ottiene senza difficoltà:

$$(35)\qquad Q_n = P + x\boldsymbol{n} - \delta^{-1}\{[\rho\tau^2 - (\rho^2+\tau^2)\,x - \rho^2\tau^2 x''].\boldsymbol{f} + \\ + (\rho^2\tau' - \tau^2\rho')\,x'.\boldsymbol{n}\}.$$

Da questa emerge che *la tangente in un punto* Q_n *di tale linea trasformata incontra in* $P + [x - \delta^{-1}(\rho^2\tau' - \tau^2\rho')x']\boldsymbol{n}$ *la normale principale del punto corrispondente sulla linea primitiva,* poichè detta tangente è parallela ad $\boldsymbol{f}$.

Osservando ancora che Q'_n è un multiplo di $\boldsymbol{f}$, si ottiene facilmente l'espressione di Q'_n stesso, nonchè $ds_1/ds = \mathrm{mod}\, Q'_n$, e si ha:

$$(36)\qquad ds_1/ds = \sqrt{\rho^2+\tau^2}\,(\rho\tau)^{-2}\,\mathrm{mod}\,\{\delta^{-1}[\tau^3\rho\rho' - (\tau^3\rho' + \rho^3\tau')\,x + \\ + \rho^2\tau\,(\rho^2\tau' - \tau^2\rho')\,x' - \tau^3\rho^2\rho' x''] - \\ - \rho\tau\,[\delta^{-1}(\rho\tau^2 - (\rho^2+\tau^2)\,x - \rho^2\tau^2 x'')]'\}.$$

Dopo ciò dalle (25) si ottengono le espressioni dei due raggi di curvatura ρ_1, τ_1 della linea Q_n:

$$(37)\qquad \rho_1 = f\,(\mathrm{mod}\,\delta)^{-1}(\rho^2+\tau^2), \\ \tau_1 = -\,\epsilon f\,(\rho^{-2}+\tau^{-2})^{-\frac{1}{2}} = -\,\epsilon_1\rho\tau f\,(\rho^2+\tau^2)^{-\frac{1}{2}},$$

ove ϵ_1 è il segno del valore della parentesi graffa in $ds_1/ds = f$.

Per $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{n} = \rho\boldsymbol{t}' = \boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{t}$ la (27) ci dà:

$$(35')\qquad Q_n = Q_0 + \int_0^s f\boldsymbol{n}\,ds = Q_0 + \int f.\boldsymbol{b}\wedge dP = Q_0 + \int f\rho.d\boldsymbol{t};$$

e dalle (29) si ha che la terna $\boldsymbol{t}_1$, $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{b}_1$ coincide con

$$(\mathrm{mod}\,\boldsymbol{f})^{-1}.\boldsymbol{f},\qquad \epsilon_0\sqrt{\rho^{-2}+\tau^{-2}}\,(\rho^{-1}\boldsymbol{t} + \tau^{-1}\boldsymbol{b}),\qquad \epsilon_0\boldsymbol{n},$$

ove ϵ_0 è il segno di δ.

Nel caso di $x = 0$ si ottiene $ds_1/ds = \delta^{-2}\sqrt{\rho^2+\tau^2}\,\mathrm{mod}\,(\tau\delta' - 2\delta\tau')$; e come *espressione intrinseca dei raggi di curvatura dello spigolo di regresso della rettificante:*

$$(37')\qquad \begin{cases} \rho_r = (\rho^2+\tau^2)^{\frac{3}{2}}.\,\mathrm{mod}\,[\delta^{-3}(\tau\delta' - 2\delta\tau')], \\ \tau_r = \rho\tau\delta^{-2}(2\delta\tau' - \tau\delta'). \end{cases}$$

12. — Altri esempi s'ottengono considerando curve speciali.

Così per una *curva piana* in cui la binormale è costante, e sia $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{k}$, si ha:

$$f = \rho^{-1}\boldsymbol{k}, \qquad f' = -\rho'\rho^{-2}\boldsymbol{k}, \qquad f'' = \rho^{-3}[2(\rho')^2 - \rho\rho'']\boldsymbol{k}.$$

Ed allora dalle (19), (24) si deducono quali espressioni del punto generico della curva trasformata e del rapporto $f = ds_1/ds$ del suo elemento d'arco a quello corrispondente della linea P:

$$\begin{aligned} Q = P &+ x(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{u})^{-1}\boldsymbol{k} + \\ &+ \rho(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{u})^{-1}(\boldsymbol{k}\wedge\boldsymbol{u})^{-2}\{(\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{u}+x')[\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{u}\,.\,\boldsymbol{k}\wedge\boldsymbol{u} + \\ &+ \rho'\boldsymbol{u}\wedge(\boldsymbol{k}\wedge\boldsymbol{u})] + (\rho x'' - \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{u})\,\boldsymbol{u}\wedge(\boldsymbol{k}\wedge\boldsymbol{u})\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ds_1/ds = \operatorname{mod}\{([(\rho')^2+\rho\rho'']\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{u} - \rho'\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{u} + [1+(\rho')^2+\rho\rho'']x' + \\ + 3\rho\rho'x'' + \rho^2x''')(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{u})^{-1}\} : \operatorname{mod}(\boldsymbol{k}\wedge\boldsymbol{u}). \end{aligned}$$

Per l'espressione della flessione e della torsione, dalle (25) si ha:

$$f\rho_1^{-1} = \rho^{-1}\operatorname{mod}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{u}, \qquad f\tau_1^{-1} = -\epsilon\rho^{-1}\operatorname{mod}(\boldsymbol{k}\wedge\boldsymbol{u}),$$

ove ϵ è il segno del valore dell'ultima parentesi graffa.

Le (27), (29) si trasformano nelle espressioni che si ottengono sostituendo in esse $\boldsymbol{k}$ ad f ed ϵ_0 risulta il segno di $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{u}$.

13. — Consideriamo più in generale le curve in cui f ha direzione costante, cioè è parallelo al vettore unitario $\boldsymbol{k}$. Son queste eliche dei cilindri le cui generatrici son parallele a $\boldsymbol{k}$. Se per una tale curva è $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{t} = \cos\theta$ ed r è la flessione in P della sezione retta del cilindro, per le note formule della torsione e della flessione dell'elica ([8]) si ottiene:

$$f = r^{-1}\operatorname{sen}\theta\,.\,\boldsymbol{k}, \qquad f' = -r'r^{-2}\operatorname{sen}\theta\,.\,\boldsymbol{k},$$
$$f'' = r^{-3}\operatorname{sen}\theta\,[2(r')^2 - rr'']\,\boldsymbol{k}.$$

([8]) C. Burali-Forti, *Corso* ecc., loc. cit. ([6]), p. 114.

E le espressioni (19), (24) del punto generico Q e della funzione $f = ds_1/ds$ della curva trasformata diventano:

$$Q = P + r(\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{u})^{-1}(\text{sen}\,\theta\,.\,\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{u})^{-2}\,\{(\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{u} + x')\,.$$
$$.\,[r'\boldsymbol{u} \wedge (\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{u}) + \text{sen}\,\theta\,.\,\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{u}\,.\,\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{u}] +$$
$$+ (rx'' - \text{sen}^2\,\theta\,.\,\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{u})\,\boldsymbol{u} \wedge (\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{u})\} + x(\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{u})^{-1}.\,\boldsymbol{k},$$

$$ds_1/ds = [\text{mod}\,(\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{u}\,.\,\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{u})]^{-1}\,\text{mod}\,\{-r'.\,\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{u} +$$
$$+ \text{sen}\,\theta\,.\,\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{u} + (\text{sen}\,\theta)^{-2}(\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{u} + x')[(r')^2 + rr'' + \text{sen}^2\,\theta] +$$
$$+ r(\text{sen}\,\theta)^{-2}(3r'x'' + rx''')\}.$$

Per i raggi di flessione e di torsione si ha:

$$\rho_1 = fr\,[\text{mod}\,(\text{sen}\,\theta\,.\,\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{u})]^{-1},$$

$$\tau_1 = -\,\epsilon\,\epsilon_0 fr\,[\text{mod}\,(\text{sen}\,\theta\,.\,\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{u})]^{-1},$$

ove ϵ_0 è il segno di $\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{u}$, ed ϵ è quello del valore racchiuso nella parentesi graffa ultima.

Si riconosce così che nella trasformazione considerata *un'elica cilindrica (od una curva piana) ha sempre per trasformata un'elica, che può anche ridursi ad una curva piana.*

Messina, Marzo 1918.

La composizione chimica del riso naturale e del riso brillato italiano

Nota I del Dott. GIOVANNI ISSOGLIO

Lo studio del valore nutritivo degli alimenti e specialmente quello dei cereali ha avuto in questi ultimi dieci anni un nuovo orientamento. Infatti non è sufficiente studiare gli alimenti secondo le direttive per l'addietro adottate, circoscrivendo le determinazioni analitiche ai soli principii nutritizii più importanti, quali sono gli albuminoidi fra le sostanze quaternarie ed i grassi ed i carboidrati fra quelle ternarie: accanto a questi principii necessarii vi hanno altri corpi di grandissima importanza per la loro azione favorevole sul ricambio organico.

Si crede generalmente che queste ultime sostanze esercitino un'azione oligodinamica sull'organismo; occorre però pensare che noi ingeriamo giornalmente masse non indifferenti di alcuni cibi (frumento sotto forma di pane, riso presso moltissimi popoli) ed allora si comprenderà, come detti corpi si trovino sempre in discreta quantità nel cibo, quando questo alimento non sia stato snaturalizzato, coi moderni metodi di macinazione o di brillatura, che si riducono poi in ultima analisi ad un vero depauperamento del cereale, quale ce lo fornisce la natura.

Le sostanze alle quali abbiamo accennato e che a partire dall'ultimo decennio si studiarono con particolare interesse sono: i composti fosforati organici od organominerali, i lipoidi, gli ormoni, le vitamine, gli enzimi ed altri ancora.

Le ricerche che riguardano il quantitativo di anidride fosforica totale nelle sue varie forme contenuta nei cibi più utili e più comuni sono ancora poche: metteremo in rilievo quelle

di Balland (1), di Bernardini e Siniscalchi, di Patten ed Hart (2), di Suzuki e Yoshimura (3) ed ultimamente di Masoni (4) intorno al frumento ed alla sua farina.

Anche chi scrive, in un'analisi del pane di tutto frumento (5), ha rivolto la sua attenzione intorno alla composizione chimica di esso per riguardo al contenuto in anidride fosforica nelle sue varie forme.

Queste sono le ricerche più importanti che si abbiano intorno a siffatto ordine di idee: non fanno invece difetto le analisi che ci indicano la composizione centesimale dei cereali per quanto concerne il contenuto in principii alimentari immediati: alcuni autori dànno anche la composizione delle ceneri dei cereali, ma nulla più.

Chi abbia assistito, come accadde a me, alle esperienze di Guareschi, alle sue numerose ed interessanti comunicazioni alla R. Accademia di agricoltura, alla Associazione chimica industriale, alla R. Accademia di medicina (6) e ad una conferenza tenuta nell'Aula Magna della R. Università (7), chi abbia veduto dibattersi in dolorose convulsioni i piccioni e le galline nutrite col riso brillato, non può non rimanere colpito ed il suo pensiero viene attratto dalla importanza dei fenomeni appresi, onde si fa strada il ragionamento più ovvio, che se in questo riso brillato non venne aggiunto nulla di velenoso e convulsivante, ad esso venne tolta però colla brillatura qualche sostanza chimica utile al sistema nervoso degli animali, in quanto serve ad equilibrare le funzioni organiche di questa parte importantissima dell'organismo animale.

---

(1) *Les Aliments: chimie, analyse, valeur alimentaire. Céréales.* Vol. I, e " C. R. ", 1895, t. CXXI, p. 561; 1903, t. CXXXVI; 1906, t. CXLIII.

(2) " Am. Chem. Journal ", 1904.

(3) " Bull. Coll. Agr. ", Tokio, 1907, vol. VII, p. 495.

(4) *Ricerche sul valore alimentare delle farine commerciali di cereali della Toscana.* Pisa, 1914; *Sul valore alimentare delle farine di frumento e del pane in rapporto ai composti fosforati* (" Staz. Sperim. Agr. It. ", 1915, p. 385).

(5) " Atti della R. Accademia di agricoltura ", 1918, vol. XI; O. Mattirolo e G. Issoglio, *Ricerche analitiche sovra un pane preparato colla pasta di frumento.*

(6) " Atti della R. Accademia di Medicina di Torino ", 1918.

(7) " Giornale di Farmacia e di Chimica ", t. LXVII, p. 29.

Eijkman, Funk, Suzuki ed altri dimostrarono all'evidenza, che la polinevrite era dovuta alla mancanza di *vitamine* nel riso brillato, cioè di quelle sostanze che, avendo carattere chimico intermedio fra gli albuminoidi e gli alcaloidi, agiscono in piccolissima quantità sugli animali non soltanto impedendo lo sviluppo della polinevrite, ma portando a guarigione istantaneamente quei soggetti, che, colpiti dai fenomeni nervosi della polinevrite, venivano inoculati di piccole dosi di *vitamine*.

Se la presenza di queste sostanze ha importanza grandissima per impedire il *beri-beri* negli uomini e la polinevrite negli animali, non meno importante però deve essere la presenza o l'assenza dei composti fosforati per la profilassi di queste malattie nervose, poichè noi sappiamo che le cellule del sistema nervoso sono ricchissime di composti fosforati ed esse trovano nell'elemento fosforo l'incentivo principale alla loro funzione organica, senza poi aggiungere che nelle ossa, nel sangue (specie nei corpuscoli rossi), nei liquidi dell'organismo ed altresì nei muscoli il fosforo entra ancora come costituente importantissimo.

La moltiplicazione attiva delle cellule avviene soltanto in quanto esse sono più ricche in fosforo, onde l'importanza grandissima che questo elemento ha nella riproduzione della specie.

Data l'importanza del fosforo, nelle sue varie forme, sulla quale credo inutile di dover maggiormente insistere, ho voluto investigare pel riso, se realmente la quantità di fosforo esistente in quello italiano naturale o semplicemente sbramato ed in quello invece della stessa origine, ma lavorato e brillato, potesse di per sè stessa aiutarci ad interpretare gli imponenti fenomeni fisiologici sviluppantisi negli animali alimentati colle diverse qualità di riso.

Le analisi chimiche riuscirono assai confortanti, tanto che il prof. Guareschi ebbe la bontà di citare questi miei saggi analitici nella sua importantissima Memoria sulla più razionale utilizzazione dei cereali (1).

In questa mia prima Nota desidero pertanto far conoscere *in extenso* i risultati ottenuti, tanto più che siffatte analisi di confronto per il riso italiano, specie per quanto riguarda i composti fosforati, mancano ancora.

---

(1) " Atti della R. Accad. di Medicina ". Loco citato.

In una prossima Nota ho intenzione di mettere in evidenza quali sono i prodotti che diventano ricchi di sostanze fosforate in seguito alla brillatura del riso medesimo e che vengono per lo più adoperati nell'alimentazione del bestiame, quando accorti negozianti esteri non acquistino con mano rapace la preziosa merce per restituirla poi sotto forma di prodotti farmaceutici e di alimenti del bestiame depauperati, ma fatti apparire più nutrienti da adatta presentazione commerciale.

Le varietà di riso sottoposte ad analisi sono le seguenti:

1° Riso rosso svestito (*Oryza sativa rubra?*) (1).

Granelli omogenei ricoperti di una pellicola di colore rosso scuro; spaccata la cariosside nell'interno si presenta perfettamente bianca.

La colorazione rossa resiste abbastanza bene agli acidi, viene invece asportata dagli alcali e specialmente dalla ammoniaca molto diluita, che non ne fa variare i caratteri organolettici e cioè il colore.

2° Riso svestito bianco (*Oryza sativa*).

Cariosside incolora striata longitudinalmente; alcune di queste cariossidi presentano colore leggermente verdognolo. Resiste bene alla cottura come il precedente. Mentre si fa cuocere svolge un gradevole profumo, quale si riscontra nei legumi cotti (faggiuoli, ceci, lenticchie).

3° Riso brillato perla.

Granellini piccoli trasparenti, che hanno l'aspetto di tante piccole perle; sono pesanti e scorrevoli l'uno sovra l'altro. Resistono abbastanza alla cottura, ma non svolgono alcun odore gradevole ed appetitoso.

4° Riso mercantile raffinato.

È un riso commerciale comune, quale veniva sul mercato due anni or sono. È perfettamente bianco, omogeneo, senza presentare i caratteri di trasparenza e scorrevolezza del riso perla. Resiste poco alla cottura e neppure questo svolge alcun profumo particolare: il suo sapore è fatuo.

---

(1) Riso a pellicola intera rossa separato dal riso piemontese svestito. Vi esiste nella proporzione da 4 a 6 %.

5° Riso cremonese bianco.

È perfettamente incoloro ed ha i caratteri che ricordano il riso mercantile raffinato sopra detto.

6° Riso cremonese striato di rosso.

Granelli più piccoli del precedente, bianco con numerose striature rosse, che scorrono longitudinalmente sulla cariosside.

Queste due ultime qualità di riso hanno importanza se riferite alle esperienze di Guareschi, dalle quali si rileva che gli animali (galline, piccioni) alimentati colla miscela dei due risi suaccennati nella proporzione del 66 % del riso bianco e del 34 % del riso striato di rosso, non presentano dopo molti giorni i veri fenomeni caratteristici e terribili della polineurite, ma gli animali dopo un certo tempo si ammalano e fanno la scelta dei grani mangiando ancora quelli striati di rosso e lasciando invece i granelli bianchi. Però anche i granelli striati in rosso a lungo andare sono rifiutati dall'animale.

Questa scelta eseguita dai soggetti ci dice già *a priori* che i granelli di riso striato di rosso hanno caratteri chimici ed alimentari alquanto superiori ai granelli bianchi, ciò che d'altra parte è dimostrato sia dalla analisi chimica, sia alimentando separatamente gli animali sovra ricordati colle due qualità di riso.

7° Riso bianco mercantile.

Siffatto riso è quello che viene attualmente in commercio (marzo 1918). Presenta i caratteri organolettici dei risi lavorati precedenti.

Se si toglie l'aspetto esteriore, che raggiunge il maggior splendore nel riso brillato perla, gli altri caratteri di appetibilità son tutti negativi; risulta pertanto evidente che il riso svestito, quantunque di aspetto meno promettente, dovrebbe avere la preferenza nell'alimentazione in causa del suo aroma gradevole, che concorre indirettamente ad eccitare la secrezione delle glandule dello stomaco.

È un errore il credere che la secrezione delle glandule pepsiniche debba essere coadiuvata dagli stimolanti forti, quali il pepe, i garofani, la senape, l'aglio e le cipolle; questi, secondo il mio modesto parere, oltrechè ottundere l'olfatto, contenendo numerose essenze agiscono sulla pepsina ed impediscono

la sua azione proteolitica, parimenti come accade per gli antisettici organici, che ostacolano la digestione.

Il Pawlow ha dimostrato che è sufficiente la vista di un cibo appetitoso per favorire la cosidetta *secrezione psichica* delle glandule pepsiniche; parimenti dicasi per il profumo gradevole degli alimenti.

Il solo profumo e la vista di un piatto di lenticchie hanno indotto Esaù a rinunciare alla primogenitura in favore di Giacobbe. Ciò forse non sarebbe accaduto se detta minestra non avesse sprigionato alcun profumo aromatico, atto ad impressionare favorevolmente l'olfatto del patriarca. La parabola biblica vien qui ricordata per mettere in evidenza l'importanza che hanno sui nostri sensi i caratteri organolettici molteplici dei cibi naturali.

Ecco i caratteri fisici delle varietà di riso analizzate:

	Peso di ettolitro	Peso di 1000 grani	Peso specifico	Volume reale di 1000 grani cm^3
1° Riso rosso svestito . . .	84.7	22.26	1.444	15.40
2° „ bianco „ . . .	87.1	22.93	1.426	16.09
3° „ brillato perla . . .	94.3	22.98	1.458	15.48
4° „ mercantile raffinato .	85.6	23.55	1.430	16.45
5° „ cremonese bianco . .	82.1	25.18	1.428	15.97
6° „ „ striato di rosso	82.2	21.37	1.438	15.70
7° „ bianco mercantile . .	86.5	23.18	1.435	16.06

Ecco quale è la composizione chimica delle surriferite varietà di riso, come risulta dai miei saggi analitici:

	Acqua	Ceneri	Grassi	Azoto	Albuminoidi grezzi (*)	Cellulosa	Pentosani	Amido (per differenza)
	%	%	%	%	%	%	%	%
1° Riso rosso svestito	12.74	1.43	2.15	1.53	8.57	1.21	0.35	73.55
2° „ bianco „	13.22	1.24	2.08	1.37	7.81	1.15	0.30	73.20
3° „ brillato perla	13.65	0.87	0.64	1.25	7.12	0.18	0.05	77.19
4° „ mercantile raffinato	13.28	0.53	0.58	1.27	7.23	0.22	0.08	78.08
5° „ cremonese bianco	12.88	0.59	0.65	1.30	7.41	0.25	0.12	78.10
6° „ „ striato di rosso	12.65	0.68	0.77	1.51	8.55	0.32	0.18	76.95
7° „ bianco mercantile (marzo 1918)	13.37	0.57	0.68	1.28	7.29	0.24	0.10	77.75

(*) N × 5.7.

Delle ceneri e dell'anidride fosforica nelle sue varie forme. — L'esame complessivo del sovrascritto specchietto, specie per quanto riguarda le ceneri del riso, non lascia intravvedere in alcun modo quale è l'importanza delle materie minerali che sono contenute nei granelli delle varie qualità di cereali che furono sottoposte ad analisi, e sembrerebbe in sulle prime, che il riso perla fosse ad esempio il più ricco di sostanze minerali naturali fra i risi lavorati. Per poter raffrontare le ceneri di tutte queste varietà di riso ho creduto opportuno per ogni sostanza analizzata determinare la proporzione di cenere, che è solubile nell'acido cloridrico al 10 % e quella invece che è insolubile in detto solvente, rapportando infine quanto rimane indisciolto a 100 parti di ceneri totali:

	Ceneri totali %	Ceneri solubili in acido cloridrico al 10 %	Ceneri insolubili in acido cloridrico al 10 %	Ceneri insolubili in acido cloridrico al 10 % in 100 p. di ceneri
1° Riso rosso svestito. . .	1.43	1.245	0.195	13
2° „ bianco „ . . .	1.24	1.092	0.146	11.5
3° „ brillato perla . . .	0.87	0.492	0.378	43
4° „ mercantile raffinato.	0.53	0.378	0.156	29
5° „ cremonese bianco .	0.59	0.472	0.105	20
6° „ „ striato rosso	0.68	0.575	0.118	16
7° „ bianco mercantile . (marzo 1918)	0.57	0.432	0.144	25

Il rapporto delle ceneri insolubili in acido cloridrico sovra 100 parti di ceneri totali ci dice prima di ogni cosa che il riso svestito è il più povero di siffatte ceneri insolubili, perchè, come hanno dimostrato le analisi di molti autori, queste ceneri sono per la massima parte costituite da fosfati alcalini ed alcalino-terrosi, raggiungendo l'anidride fosforica il 52 % delle ceneri stesse.

Nei risi lavorati invece la quantità delle ceneri insolubili è alquanto in aumento.

Il riso perla confrontato colle altre qualità presenta una percentuale di ceneri insolubili molto rilevante: questa diversità ci mette sull'avviso che in questo riso deve trovarsi una materia minerale estranea.

Al fine di conoscere quale è questa sostanza estranea alla composizione normale del riso ho incenerito gr. 60 di riso brillato perla e le ceneri ho ripreso con acido cloridrico diluito al 10 %, raccogliendo sopra un filtrino il residuo insolubile. Ho ottenuto così dopo calcinazione gr. 0.2312 di una sostanza insolubile bianca polverulenta, untuosa e saponosa al tatto, che sottoposi ad esame quantitativo per dedurne la composizione chimica:

anidride silicica % 65.34
ossido di magnesio % 25.42

Questi dati analitici messi in correlazione coi caratteri fisici ed organolettici della polvere sopra ricordata ci dicono, che essa è costituita da silicato di magnesio ossia da talco (1), impuro per la presenza di un eccesso di silice proveniente dalle ceneri del riso.

Il talco infatti, accanto al gesso, al caolino, alla polvere di marmo, è fra le materie minerali che si adoperano per la brillatura del riso.

Probabilmente è questa sostanza che dà la scorrevolezza caratteristica ai granelli del riso brillato perla e che gli conferisce anche il maggior peso specifico.

Differenziate così le ceneri delle varie qualità di riso sottoposte ad analisi, ho proceduto al dosamento dell'anidride fosforica totale, avendo quindi cura di conoscere parimenti sotto qual forma l'anidride fosforica si trovi nel seme del riso svestito ed in quello lavorato e quale relazione passi in questo cereale fra l'anidride fosforica fitinica e la lecitinica.

Col calcolo ho poi trasformato l'anidride fosforica lecitinica riscontrata in lecitina oleopalmitica. In una quinta colonna è segnato il rapporto ottenuto riferendo l'anidride fosforica totale a 100 parti di ceneri.

La determinazione dell'anidride fosforica totale venne eseguita sovra 5 gr. di sostanza, che fu mescolata intimamente con una miscela di nitrato potassico p. 1 e carbonato sodico p. 3.

---

(1) Il talco contiene dal 62 al 63 % di anidride silicica e dal 28 al 31 % di ossido di magnesio.

Dopo calcinazione completa si riprese con acqua e si trattò con acido nitrico e fosfomolibdato di ammonio nel modo solito.

Il precipitato giallo ottenuto ridisciolto in ammoniaca venne riprecipitato colla miscela magnesiaca. Trasformato il fosfato ammonico magnesico in pirofosfato di magnesio, da questo si risalì alla quantità di anidride fosforica totale contenuta nel riso esaminato.

La determinazione dell'anidride fosforica fitinica venne eseguita sia seguendo il metodo di Posternak (1) ed operando sopra 10 gr. di riso, sia mettendo in pratica il metodo volumetrico proposto da Heubner e Stadler, applicato da Rather (2) nella determinazione dell'anidride fosforica fitinica nei prodotti delle piante e da me leggermente modificato per la preparazione rapida della soluzione titolata. Di questo metodo dirò in altra mia Nota.

La determinazione dell'anidride fosforica lecitinica venne eseguita con il metodo di Schultz e operando sovra 100 gr. di prodotto.

Ecco i risultati ottenuti:

	Anidride fosforica			Lecitina %	Anidride fosforica rapportata a 100 p. di ceneri
	totale %	fitinica %	leciti-nica %		
1° Riso rosso svestito . .	0.84	0.485	0.010	0.109	58
2° „ bianco „ . . .	0.68	0.435	0.008	0.087	55
3° „ brillato perla . .	0.26	0.058	tracce	piccolissime quantità	30
4° „ mercantile raffinato	0.24	0.055	tracce	piccolissime quantità	45
5° „ cremonese bianco .	0.38	0.152	—	—	62
6° „ „ striato rosso	0.46	0.188	—	—	67
7° „ bianco mercantile . (marzo 1918)	0.29	0.082	—	—	50

(1) " C. R. ", CXXXVII, 1903.

(2) " Journal Amer. chem. soc. ", 1917, *39*, 2506.

La differenza esistente fra il riso svestito ed il riso lavorato appare evidentissima; infatti, mentre il primo è abbastanza ricco di composti fosforati minerali ed organominerali, il secondo è povero di queste sostanze, e mentre l'anidride fosforica fitinica può arrivare a 5 gr. per ogni Kgr. di riso svestito, in quello raffinato e brillato non arriva al grammo per ogni chilogramma di riso; quanto poi all'anidride fosforica lecitinica, essa manca affatto nei risi lavorati, mentre nel riso svestito sotto forma di fosfolecitina arriva ad 1 gr. di lipoide per ogni chilogrammo di cereale. Ciò che nella nostra nutrizione giornaliera può avere la sua influenza.

Un'altra osservazione, degna di nota, consiste nell'affinità che esiste chimicamente fra i derivati fosforati e le sostanze albuminoidi, onde si rileva costantemente il fatto che il riso più ricco in derivati fosforati ha anche maggior dovizia di sostanze proteiche.

Il rapporto dell'anidride fosforica a 100 p. di ceneri, mentre per il riso svestito e per alcuni risi poco depauperati è superiore al 50 $^0/_0$, poichè viene fissato dal carbonato sodico anche il fosforo lecitinico e quello delle nucleine e degli acidi nucleici, che altrimenti si volatilizza nel semplice dosamento delle ceneri, per le altre varietà di riso e specialmente per il riso brillato perla, che contiene il talco, è inferiore a quello generalmente riscontrato nel riso naturale.

I dati numerici da me riscontrati corrispondono bene alle esperienze di Balland e di Hooper (1).

L'ultimo autore citato ha, d'accordo con quanto scrissi, messo in chiaro che la brillatura fa diminuire il potere alimentare del riso e lo impoverisce, oltrechè di grassi, di proteina e di ceneri, anche di composti fosforati organominerali, accanto ai quali si trovano sempre le vitamine ed i fermenti.

Secondo questo autore un riso che non contenga meno del 0.469 $^0/_0$ di anidride fosforica è ancora un alimento salutare, ciò che vien dimostrato nel nostro caso dal riso cremonese striato di rosso, il quale nell'alimentazione dei polli e dei

---

(1) *Phosphorous in Indian Foodstuffs.* " Am. Journ. chem. soc. ", 1912, t. II, p. 1638.

piccioni si è affermato migliore degli altri risi lavorati, perchè non produce la polinevrite.

Hooper osserva ancora che il riso raccolto nelle regioni dove erano maggiori i casi di polinevrite conteneva da 0.26 a 0.400 di anidride fosforica; quello che contiene soltanto 0.27 $^0/_0$ di anidride fosforica è causa sicura di polinevrite.

Lo stesso fatto è stato constatato da Guareschi nelle sue esperienze sui polli e sui piccioni, poichè il riso brillato perla con solo 0.26 $^0/_0$ di anidride fosforica dava dopo pochi giorni negli animali che se ne alimentavano segni evidenti di polinevrite.

I miei dati analitici non vanno però d'accordo coi risultati ottenuti da Rather, che afferma di aver trovato nel riso gr. 1.26 di fosforo fitinico (1). In altro caso dice di aver ricavato gr. 44 di acido inositopentafosforico da 1250 gr. di riso svestito (*police rice*) (2).

Nel primo caso si dovrebbe riscontrare nel riso analizzato 2.88 $^0/_0$ di anidride fosforica fitinica. Questa quantità è immensamente superiore a quella trovata da tutti gli autori, che si sono occupati di questo argomento, poichè anche secondo Balland la quantità di anidride fosforica totale nel riso non supera mai il 0.85 $^0/_0$, ciò che si verifica pure esaminando le numerose analisi eseguite da Browne, Schärling, Payen, Kellner ed altri e che sono riportate dal König.

Nel caso poi dell'acido inositofosforico ricavato dal riso svestito (*police rice*) secondo il calcolo risulterebbe, che questo cereale conterrebbe ancora 1.96 $^0/_0$ di anidride fosforica, ciò che rimane ancora inesplicabile data la composizione chimica del riso, che non raggiunge mai tale cifra.

Che se poi sotto il nome di *police rice* si dovesse intendere il riso brillato, allora debbo far osservare che dalle esperienze di Hooper e dalle mie risulta, che il riso brillato è poverissimo di ceneri ed anche di anidride fosforica totale; l'anidride fosforica fitinica poi nel riso brillato viene ad essere ridotta ai minimi termini.

---

(1) " Journal Amer. chem. soc. ", 1917, *39*, 2506.

(2) Id, id., 1918, XL, p. 523.

Per dimostrare il depauperamento in elementi minerali cui viene sottoposto il riso durante la brillatura si può mettere in confronto la quantità degli elementi che compongono la cenere, nel cereale naturale ed in quello lavorato, come fecero Schermann e Gettler per il grano intero ed il fior di farina, secondo quanto è riportato nel libro di Graham Lusk, *The elements of science of Nutrition.*

Prendendo come confronto un riso svestito analizzato da Kellner e Nagaoka (1), il quale conteneva gr. 1.27 % di cenere sulla sostanza secca e del quale si conosce parimenti la composizione centesimale delle ceneri, mi fu possibile calcolare la quantità dei singoli elementi contenuti in 1 kgr. di detto riso, espressa in grammi, e mettere in confronto questo quantitativo col riso brillato, come si vedrà nel seguente specchietto:

	Riso intero ‰ gr.	Riso brillato ‰ gr.
Fosforo	2.678	0.890
Potassio	2.469	0.690
Magnesio . . .	0.865	0.270
Sodio	0.434	0.210
Calcio.	0.266	0.080
Ferro	0.144	0.070
Cloro	0.115	0.150
Totale gr.	6.871	2.287.

La brillatura del riso, essendo purtroppo entrata nella consuetudine, specie per quei cereali che sono destinati alla esportazione, portò naturalmente a considerare questo alimento come una sostanza ricchissima di amido e mediocremente azotata, ma povera affatto di altri principii nutritivi, onde anche il Gautier nel suo libro *L'alimentation et les régimes chez l'homme sain ou malade*, pag. 448, mette il riso fra le sostanze poverissime di anidride fosforica, mentre ci è noto che il cereale naturale ne contiene sino al 0.80 %.

---

(1) " Colleg. of. Agric. of. the imp. Univ. „. Tokio, 1893. Bull. 12.

Il riso adunque devesi riguardare come un cibo nutriente, se la speculazione umana non gli toglie i materiali benefici che concorrono a formarne la cariosside, perchè questa coi principii nutritivi che contiene nel suo insieme sia capace di dar vita alla pianticina del riso donde si origina la pianta adulta.

Ora ci è noto che le giovani pianticine hanno bisogno all'inizio de loro sviluppo e per la loro vita di composti fosforati, di fermenti, di vitamine, di albuminoidi, grassi e carboidrati, analogamente a quanto avviene per gli animali, che per nutrirsi hanno d'uopo contemporaneamente di tutte queste sostanze. Mancando alcuna di esse la pianticina del riso non ha vita e l'animale alimentato da questo cibo deperisce ed è assalito da fenomeni nervosi molto violenti.

Credo non sia necessario ripetere in questo mio lavoro le conclusioni, che potranno riscontrarsi suffragate dalle esperienze probative sugli animali nella interessantissima pubblicazione del prof. Guareschi, *Sulla più razionale utilizzazione dei cereali con esperienze ed osservazioni sulla alimentazione col riso sbramato o naturale ed a diversi gradi di depauperamento o brillatura* (1).

In altra mia Nota dirò dei prodotti che si ottengono dalla brillatura del riso ed allora dimostrerò, come le sostanze fosforate organominerali di questo cereale vadano a concentrarsi nei prodotti di rifiuto della sua brillatura.

Torino. Laboratorio chimico municipale. Aprile 1918.

---

(1) " Atti della R. Accademia di Medicina ". Loco citato.

Sulle catene di radicali quadratici

Nota del Socio corrispondente SALVATORE PINCHERLE

La benevolenza di cui codesta insigne Accademia ha voluto darmi prova, onorandomi della nomina a suo Socio corrispondente, mi incoraggia a presentarle, anche in segno di gratitudine, questa modesta Nota in cui viene studiato un argomento il quale, sebbene d'indole assai elementare, dà luogo ad interessanti e non facili questioni ed è stato scarsamente considerato fin qui. Si tratta delle espressioni in forma di catene di radicali quadratici, della forma

$$\pm\sqrt{a\pm\sqrt{a\pm\sqrt{a}\ldots}},$$

dove a è un numero positivo, che verrà detto *base*.

Simili espressioni possono constare di un numero finito di radicali; le diremo *catene limitate* ed anche, per un motivo geometrico che verrà posto in luce in altro lavoro, daremo loro il nome di *fuochi*. Ma il numero dei segni radicali può anche essere infinito; avremo allora le *catene illimitate*, che esprimono un algoritmo indefinito consistente nella formazione della successione di catene limitate

$$\pm\sqrt{a}, \qquad \pm\sqrt{a\pm\sqrt{a}}, \qquad \pm\sqrt{a\pm\sqrt{a\pm\sqrt{a}}}, \ldots,$$

successione che è determinata qualora lo sia quella dei segni *più* o *meno*; le catene limitate costituenti la successione si designeranno col nome di *ridotte*. Se la successione delle ridotte ammette limite, la catena illimitata si dirà *convergente* e quel limite ne sarà il *valore*.

In una catena, limitata o no, i radicali si conteranno da sinistra a destra, primo radicale essendo quello più a sinistra.

Nel presente lavoro verranno considerate esclusivamente le catene limitate reali, e le illimitate a ridotte reali.

§ I.

1. — Una catena limitata, o fuoco, è determinata dalla sua base, dal numero dei radicali che in essa figurano e dal segno da cui è affetto ciascun radicale. Non vi è restrizione essenziale nel supporre il primo radicale affetto dal segno $+$; è ciò che ammetteremo quando non sia detto esplicitamente il contrario. In quanto agli altri segni, facciamo prima l'ipotesi che siano tutti positivi; si dà così luogo alla successione di fuochi:

$$\sqrt{a}, \quad \sqrt{a+\sqrt{a}}, \quad \sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}}, \ldots, \tag{1}$$

successione di numeri positivi crescenti che tende ad un limite, che è il loro limite superiore. Questo limite è finito se è $a>2$, poichè è allora

$$\sqrt{a+\sqrt{a}}<\sqrt{2a}<a,$$

onde

$$\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}}<a$$

e così via; ed è a più forte ragione finito per $a \leq 2$. Detto questo limite z, esso è manifestamente la radice positiva dell'equazione

$$z^2=a+z, \tag{2}$$

onde

$$z=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}. \tag{3}$$

La catena illimitata

$$\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots \text{in inf.} \ldots}}$$

è dunque convergente, e la (3) ne dà il valore.

2. — Quando i segni dei radicali non sono tutti positivi, conviene fare uso di una notazione che ponga opportunamente in evidenza la variazione dei segni stessi. Propongo la seguente. Essendo positivo il primo radicale, siano positivi altri $r_1 - 1$ immediatamente seguenti; a questi succeda un radicale negativo, seguìto poi immediatamente da $r_2 - 1$ positivi; indi un radicale negativo, seguìto immediatamente da $r_3 - 1$ positivi, e così via; si abbia infine un ultimo radicale negativo, seguìto da $r_n - 1$ positivi. Il fuoco così determinato verrà indicato colla notazione

$$(r_1, r_2, r_3, \dots r_n), \tag{4}$$

dove i numeri $r_1, r_2, \dots r_n$ sono interi positivi (lo zero escluso). Ogni fuoco positivo può rappresentarsi nella forma (4). Per un fuoco negativo, si può scrivere, se vi è in principio un radicale negativo seguìto da $r_1 - 1$ positivi, ecc.:

$$-(r_1, r_2, \dots r_n) \qquad \text{oppure} \qquad (0, r_1, r_2, \dots r_n).$$

Ai numeri interi $r_1, r_2, \dots$ si darà il nome di *cifre*; la somma delle cifre (numero dei radicali) $r_1 + r_2 + \dots + r_n$ verrà detta *ordine* del fuoco.

Come esempî: i fuochi della successione (1) saranno rappresentati da (1), (2), (3), ... Il fuoco $\sqrt{a - \sqrt{a}}$ verrà rappresentato da (1, 1); il fuoco

$$\sqrt{a - \sqrt{a + \sqrt{a - \sqrt{a + \sqrt{a}}}}}$$

da (1, 2, 2).

Per il calcolo di un'espressione (4), si comincia col calcolare (r_n), indi (r_{n-1}, r_n), indi (r_{n-2}, r_{n-1}, r_n), e così via; questi si diranno rispettivamente n^{simo}, $n - 1^{\text{simo}}$, $n - 2^{\text{simo}}$, ... *gruppo* della (4).

3. — La notazione precedente si può estendere; se $f = (s_1, s_2, .. s_p)$ è un fuoco, si potrà rappresentare con (r, f) il fuoco $(r, s_1, s_2, .. s_p)$, e se $\varphi = (r_1, r_2, .. r_n)$ è pure un fuoco, con

$$(\varphi, f) \qquad \text{od} \qquad (r_1, r_2, \dots r_n, f)$$

il fuoco $(r_1, r_2, .. r_n, s_1, s_2, .. s_p)$. Questa notazione può anche estendersi al caso in cui con f s'intenda una catena illimitata. In altri termini, se l'ultimo radicando a di φ si sostituisce con $a - f$, si scrive $(r_1, r_2, ... r_n, f)$; si scriverà invece $(r_1, r_2, ... r_n + (f))$ se l'ultimo radicando a di φ si sostituisce con $a + f$.

4. — È opportuno di riguardare lo zero come un fuoco (fuoco d'ordine zero); esso si denoterà con (0).

5. — Per $a = 0$, tutti i fuochi sono zero.

Per $0 < a < 1$, è $\sqrt{a} > a$. Ogni espressione $(1, r)$ rappresenta dunque un numero immaginario, e quindi, poichè la radice quadrata di un numero non reale non può essere reale, ogni fuoco in cui figura qualche segno — non è reale. In questo caso, sono reali dunque quei soli fuochi costituenti la successione (1), ed i loro contrarî. Soli punti limiti dei fuochi sono i due punti $\pm z$, dove z è dato dalla (3). Lo stesso vale per $a = 1$, salvo che è $(1, 1) = 0$; in questo caso, il fuoco $(r_1, r_2, ... r_n)$ può anche rappresentarsi con $(r_1, r_2, ... r_n + 1, 1)$ e con $(r_1, r_2, ... r_n, 1, 1)$.

Per $a \geq 2$, ogni fuoco è reale. Infatti, è $z \leq a$ se è $a \geq 2$; tutti gli elementi della successione (1) sono dunque minori di a, e perciò ogni espressione $(1, r)$, per grande che sia r, è reale e minore di a, e quindi ogni fuoco è reale (*).

Risulta da ciò che è il caso $1 < a < 2$ quello che presenta maggiore interesse per la discussione sulla realtà o meno dei fuochi; questa discussione viene data nei seguenti n[i].

6. — È importante, nello studio delle catene reali di radicali, di tenere presente la seguente proposizione, la cui dimostrazione non presenta difficoltà (**):

" Se $f = (r_1, r_2, ... r_p, r_{p+1}, ... r_m)$, $f' = (r, r_2, ... r_p, s_{p+1}, ... s_n)$ " sono due fuochi distinti, aventi in comune le prime p cifre, " mentre la $p + 1^{\text{sima}}$ è differente, è maggiore quel fuoco in cui

(*) Lo studio delle catene di radicali per il caso $a \geq 2$ ha formato l'oggetto di una Nota presentata all'Accademia delle Scienze di Bologna il 17 febbraio 1918.

(**) La dimostrazione è data nella Nota citata.

" questa $p+1^{\text{sima}}$ cifra è maggiore se p è pari, è maggiore " quello in cui questa $p+1^{\text{sima}}$ cifra è minore se p è dispari ".

Ne viene come corollario che " se due fuochi f, f' hanno le " prime p cifre in comune, ed un terzo fuoco f'' è compreso " fra f ed f', le prime p cifre di f'' coincidono con quelle cifre " comuni ".

§ II.

7. — Indico con $\alpha(x)$ la funzione x^2-a. Questa funzione — od operazione eseguita su x — si può iterare. Si porrà:

$$\alpha_1(x)=\alpha(x), \qquad \alpha_{n+1}(x)=\alpha_n(\alpha_1(x)), \qquad (n=1,2,3,\ldots). \tag{1}$$

La $\alpha_n(x)$ è funzione razionale intera, pari, di grado 2^n.

L'equazione

$$\alpha_n(x)=0 \tag{2}$$

ha 2^n radici, ognuna delle quali è rappresentata da una delle 2^n espressioni che si hanno da

$$\pm(r_1, r_2, \ldots r_p)$$

con

$$r_1+r_2+\ldots+r_p=n,$$

le r_i essendo numeri interi positivi (non nulli).

Fra queste radici sono massime in valore assoluto le $\pm(n)$; in ogni caso però inferiori in modulo a z.

8. — *a)* Applicando ad $x=0$ l'operazione α e le sue successive iterate, si ottiene la successione

$$\alpha_1(0)=-a, \quad \alpha_2(0)=a^2-a, \quad \alpha_3(0)=(a^2-a)^2-a, \ldots, \tag{3}$$

i cui elementi sono anche

$$-a, \qquad \alpha_1(a), \qquad \alpha_2(a), \ldots \alpha_n(a)=\alpha_{n+1}(0), \ldots$$

b) L'operazione α_m applicata ad un fuoco ha per effetto di sopprimere i primi m segni radicali. Così si ha

$$\alpha_{r_1+r_2+\ldots r_p}(r_1, r_2, \ldots r_p, r_{p+1}, \ldots r_n)=-(r_{p+1}, \ldots r_n).$$

Se f è d'ordine n, è $\alpha_n(f) = 0$; se è $m < n$, è $\alpha_m(f)$ un fuoco d'ordine $n - m$.

c) I valori di a per cui uno degli elementi (3) è nullo, si diranno *speciali*. Così $a = 1$ è speciale, poichè $\alpha_2(0) = 0$. Se a è speciale, è radice di una delle equazioni (2), poichè se è $\alpha_m(0) = 0$, è $\alpha_{m-1}(a) = 0$; se a è radice di un'equazione (2), è radice di infinite fra queste, poichè da $\alpha_m(0) = 0$ segue, per ogni intero p, $\alpha_{mp}(0) = 0$. L'essere a speciale porta l'annullarsi di una catena $(r_1, r_2, \dots r_p)$ e quindi di tutte quelle della forma

$$(r_1, r_2, \dots r_p, r_1, r_2, \dots r_p \dots r_1, r_2, \dots r_p).$$

d) Quando a è speciale, un medesimo fuoco può ammettere più rappresentazioni mediante catene limitate; infatti, se è $(r_1, r_2, \dots r_p) = 0$, sarà

$$\begin{aligned}(s_1, s_2, \dots s_n) &= (s_1, s_2, \dots s_n, r_1, r_2, \dots r_p) = \\ &= (s_1, s_2, \dots s_n + (r_1, r_2, \dots r_p)) = \\ &= (s_1, s_2, \dots s_n, r_1, r_2, \dots r_p, r_1, r_2, \dots r_p) = \dots\end{aligned}$$

Reciprocamente, se uno stesso fuoco f ammette due rappresentazioni per mezzo di catene limitate

$$(r_1, r_2, \dots r_p) = (s_1, s_2, \dots s_n),$$

la base è speciale; infatti, l'uguaglianza si mantiene applicando ai due membri della precedente l'operazione α e le sue iterate, ed in questo modo si possono ridurre ad avere la prima cifra differente; si può dunque senza restrizione supporre r_1 diverso da s_1; sia p. es. $r_1 > s_1$. Prendendo allora sui due membri l'operazione α_{s_1}, viene

$$(r_1 - s_1, r_2, \dots) = -(s_2, s_3, \dots),$$

ma qui, i due membri avendo segno diverso, l'uguaglianza è impossibile a meno che non sia $(s_2, s_3, \dots) = 0$; a è dunque speciale.

e) Se due equazioni (2), di grado diverso, hanno una radice comune, a è speciale; infatti se è

$$\alpha_m(x) = 0, \qquad \alpha_n(x) = 0, \qquad (m > n),$$

viene

$$\alpha_{m-n}(\alpha_n(x)) = \alpha_{m-n}(0) = 0,$$

cioè è nullo uno degli elementi (3).

f) Un'equazione (2) può avere radici multiple solo se a è speciale. Infatti,

$$\frac{d\alpha_m}{dx} = 2\alpha_{m-1}\frac{d\alpha_{m-1}}{dx};$$

ne segue

$$\frac{d\alpha_m}{dx} = 2^m x \alpha_1(x)\alpha_2(x)\dots\alpha_{m-1}(x);$$

se dunque x è radice multipla di $\alpha_m(x) = 0$, uno degli $\alpha_h(x)$, per $h < m$, deve essere nullo e quindi $\alpha_h(x)$, $\alpha_m(x)$ avendo una radice comune, a è speciale.

§ III.

9. — Supponiamo la base compresa fra 1 e 2. In ogni fuoco reale

$$f = (r_1, r_2, \dots r_n),$$

l'ultimo gruppo (r_n) è certamente reale e minore di a. Ora, affinchè f sia reale, è necessario e sufficiente che siano reali e non maggiori di a i gruppi

$$(r_i, r_{i+1}, \dots r_n), \qquad (i = 2, 3, \dots n).$$

Il caso $(r_i, r_{i+1}, \dots r_n) = a$, donde segue $(1, r_i, \dots r_n) = 0$, si presenta per a speciale.

10. — *a)* Considerando la successione dei fuochi positivi ad una cifra

$$(1) \qquad (1), (2), (3), \dots (n), \dots$$

si ha, per l'ipotesi $a > 1$, che è $(1) < a$, e per l'ipotesi $a < 2$, che è $\lim_{n=\infty}(n) > a$; onde esiste certamente, nella successione (1), un ultimo elemento minore di a; sia questo $(g_1 - 1)$, per modo che si abbia:

$$(2) \qquad (g_1 - 1) < a \leq (g_1).$$

Ora, la cifra g_1 non può figurare all'ultimo posto in un fuoco reale. Infatti, se è $g_1 > a$, $(1, g_1)$ è immaginario e quindi nè (r_1, g_1), nè $(r_1, r_2, \ldots r_{n-1}, g_1)$ possono essere reali, e se è $g_1 = a$, $(r_1, r_2, \ldots r_{n-1}, g_1)$ si trasforma in $(r_1, r_2, \ldots r_{n-1} - 1)$. Inoltre, una cifra superiore a g_1 non può figurare in un fuoco reale, tranne che al primo posto; infatti se in un fuoco abbiamo il gruppo $(r_i, r_{i+1}, \ldots r_n)$, con $r_i \geq g_1 + 1$, questo gruppo è maggiore di (g_1) e quindi anche di a, onde il fuoco non è reale.

b) Cerchiamo ora se, fra i fuochi a due cifre maggiori di $(g_1 - 1)$, ve n'è uno ultimo minore di a. Poichè un fuoco maggiore di $(g_1 - 1)$ deve avere per prima cifra almeno g_1, considereremo la successione crescente

$$(3) \qquad (g_1, g_1 - 1), \quad (g_1, g_1 - 2), \ldots (g_1, 2), \quad (g_1, 1).$$

Qui può darsi che non si trovi un elemento inferiore ad a, per modo che sia

$$(4) \qquad (g_1 - 1) < a \leq (g_1, g_1 - 1).$$

In questo caso, la cifra g_1 non può figurare in un fuoco reale f, tranne che al primo posto. Infatti, se esso figura in f per l'ultima volta al posto i, il gruppo corrispondente sarà $(g_1, r_{i+1}, r_{i+2}, \ldots r_n)$, ma questo è maggiore o per lo meno uguale a $(g_1, g_1 - 1)$ e quindi non minore di a. Di più, non vi è alcun fuoco compreso fra $(g_1 - 1)$ ed a; infatti, un tale fuoco dovrebbe avere la forma $(g_1, h_2, h_3 \ldots)$, ora questo è certamente non inferiore a $(g_1, g_1 - 1)$ e quindi non inferiore ad a.

c) Se non è verificata la (4), vi sarà un ultimo elemento, nella (3), inferiore ad a; si avrà dunque un numero g_2, compreso fra $g_1 - 1$ ed 1, tale che sia

$$(5) \qquad (g_1, g_2) < a \leq (g_1, g_2 - 1).$$

Si cerchi allora, nella successione crescente

$$(g_1, g_2), \quad (g_1, g_2, 1), \quad (g_1, g_2, 2), \ldots (g_1, g_2, g_1 - 1),$$

l'ultimo elemento inferiore ad a; se questo è $(g_1, g_2, g_3 - 1)$, si passa alla successione di fuochi a quattro cifre

$$(g_1, g_2, g_3 - 1), \quad (g_1, g_2, g_3, g_1 - 1), \dots (g_1, g_2, g_3, 1),$$

e così si prosegue.

11. — Il procedimento indicato può dare luogo ai tre seguenti casi:

A) Esso si continua indefinitamente, dando origine ad una successione crescente di fuochi

$$\varphi_1 = (g_1 - 1), \quad \varphi_2 = (g_1, g_2), \quad \varphi_3 = (g_1, g_2, g_3 - 1), \quad \varphi_4 = (g_1, g_2, g_3, g_4), \dots \tag{6}$$

tutti inferiori ad a. Essi hanno pertanto un limite — loro limite superiore — e questo sia $\lambda < a$.

B) Le cose procedendo come nel caso precedente, il limite λ della successione (6) sia invece uguale ad a.

C) Il procedimento non continua indefinitamente; si trova cioè un ultimo fuoco $\varphi = (g_1, g_2, \dots g_r)$ inferiore ad a; in altri termini, fra φ ed a non cade alcun fuoco.

12. — Esaminiamo dapprima il caso *A*. L'espressione $\sqrt{a - t}$, dove t varia da λ ad a, non dà alcun fuoco in questo intervallo; essa varia decrescendo da $\sqrt{a - \lambda}$ a 0, e ne segue che nell'intervallo $-\sqrt{a - \lambda} \dots \sqrt{a - \lambda}$ non cade alcun fuoco all'infuori dello zero.

Ne segue ancora che, essendo $f = (r_1, r_2, \dots r_m)$ un fuoco reale qualsiasi, fra

$$\mu = (r_1, r_2, \dots r_m + 1, \lambda) \qquad \text{e} \qquad \nu = (r_1, r_2, \dots r_m, 1, \lambda)$$

non cade alcun fuoco all'infuori di f medesimo; per m pari, μ è l'estremo inferiore e ν l'estremo superiore dell'intervallo $\mu \dots \nu$, ed il contrario ha luogo per m dispari. Ad ogni fuoco f corrisponde dunque un tale intervallo $\mu \dots \nu$, che diremo q e chiameremo *intervallo contiguo* corrispondente ad f. Gli estremi μ, ν dell'intervallo prenderanno il nome di *vertici*. I vertici dell'in-

tervallo contiguo corrispondente ad un fuoco positivo sono positivi; negativi per un fuoco negativo; di segno diverso solo i vertici $-\sqrt{a-\lambda}$ e $\sqrt{a-\lambda}$ dell'intervallo contiguo relativo allo zero.

Ogni vertice è, da una sola parte, punto limite di fuochi. Così ν è il limite della successione di fuochi

$$(7) \quad (r_1, \dots r_m, 1, \varphi_1), \quad (r_1, \dots r_m, 1, \varphi_2), \dots (r_1, r_m, 1, \varphi_n), \dots$$

ed è tale, se m è pari, che codesti fuochi si trovano alla sua destra, mentre in vicinanza di ν a sinistra non cade alcun fuoco: il contrario ha luogo se m è dispari. Ma ad ognuno dei fuochi delle successive (7) corrisponde un intervallo contiguo; di più, siccome è evidente che due intervalli contigui non hanno nè punti interni, nè estremi comuni, così i vertici superiori ed inferiori degl'intervalli contigui corrispondenti ai fuochi (7) tendono a ν.

L'esame precedente del caso A ci porta alle seguenti conclusioni: " Nel caso A, l'aggregato F dei fuochi reali è co-
" stituito di punti isolati, compresi fra $-z$ e z. L'aggregato F'
" derivato di F comprende i vertici ed i punti limiti di questi;
" ma ogni vertice essendo punto limite di vertici, F' è chiuso
" e denso in sè, e quindi perfetto. È inoltre non denso, e gli
" intervalli contigui, ognuno dei quali contiene nel suo interno
" un fuoco ed uno solo, servono a costruirlo. I punti $\pm z$ fanno
" parte di F' ".

13. — Veniamo al secondo dei casi elencati al n. 11. In questo caso B, la successione (6) tende ad a; formando dunque $\sqrt{a-t}$, dove t varia da λ ad a, si avrà, ponendo per t i valori (6), una successione di fuochi tendenti a zero. Lo zero è dunque limite di fuochi, e lo stesso avviene per ogni fuoco reale; inoltre, poichè tanto la successione

$$(r_1, \dots r_m + 1, \varphi_1), \quad (r_1, \dots r_m + 1, \varphi_2), \dots (r_1, \dots r_m + 1, \varphi_n), \dots$$

quanto la

$$(r_1, \dots r_m, 1, \varphi_1), \quad (r_1, \dots r_m, 1, \varphi_2), \dots (r_1, r_m, 1, \varphi_n), \dots$$

tendono ad $(r_1, \dots r_m)$, la prima da una parte e la seconda dall'altra, così ogni fuoco è punto limite di fuochi da ambo le

parti. L'insieme F dei fuochi è dunque denso in sè; l'insieme F' è perfetto.

Può accadere (caso B_1) che ogni punto dell'intervallo $-z \ldots z$ appartenga all'insieme F'; è ciò che si verifica nel caso $a = 2$. Qualora ciò non avvenga (caso B_2) vi sarà su $-z \ldots z$ qualche punto τ non appartenente ad F', e, poichè F' è perfetto, τ sarà isolato, cioè interno ad un intervallo t di cui i soli estremi apparterranno ad F'. Si può, senza restrizione, supporre tutto l'intervallo t inferiore ad a; infatti, se τ_1 ne è l'estremo superiore, si può sempre determinare un intero m tale che sia $(m+1) > \tau_1$, onde $\alpha_m(\tau_1) < a$, e si può sostituire la considerazione dell'intervallo $\alpha_m(t)$ a quella dell'intervallo t. Simili intervalli t, che non contengono punti di F', si diranno ancora *contigui*. Siano τ_0 e τ_1 gli estremi di t.

Ciò posto, sia f_1, $f_2 \ldots f_n, \ldots$ una successione di fuochi tendenti ad un fuoco reale f; per fissare le idee, i fuochi f_n procedano crescendo e siano formati da un numero pari di cifre. Per ognuno di questi f_n, l'espressione $(f_n, 1, t)$ rappresenterà un intervallo privo di fuochi per tutti i valori di t compresi fra τ_0 e τ_1, gli estremi esclusi; la successione degli intervalli contigui senza parti comuni

$$(f_1, 1, t), \quad (f_2, 1, t), \ldots (f_n, 1, t), \ldots$$

tende ad f crescendo, talchè in vicinanza di ogni fuoco e per conseguenza di ogni punto limite di fuochi, cadono infiniti intervalli contigui privi di fuochi. Risulta da ciò che l'aggregato perfetto F' è non denso. Riassumendo “ nel caso B_2 l'aggregato “ dei fuochi fa parte del proprio derivato, il quale è ancora “ perfetto non denso, ma i cui intervalli contigui non conten- “ gono nel loro interno alcun fuoco „.

14. — Rimane da considerare il caso C, in cui esiste un ultimo fuoco $\varphi = (g_1, g_2, \ldots g_s)$ inferiore ad a.

Considerando $\sqrt{a-t}$, dove t varia da φ ad a, si ha un intervallo compreso fra 0 e $\sqrt{a-\varphi}$ entro il quale non cade alcun fuoco, e quindi

$$\sqrt{a-\varphi} = (1, g_1, g_2, \ldots g_s) = (1, \varphi)$$

è il minimo fuoco positivo, come — $(1, \varphi)$ è il massimo fuoco negativo. Ne risulta immediatamente che ogni fuoco $f = (r_1, r_2, \dots r_n)$ si trova compreso fra due fuochi viciniori, l'uno a destra, l'altro a sinistra, che sono

$$(r_1, r_2, \dots r_n + 1, \varphi) \qquad \text{ed} \qquad (r_1, r_2, \dots r_n, 1, \varphi)$$

e che indicheremo brevemente con (f', φ) ed $(f, 1, \varphi)$ (*).

Partendo da un fuoco qualsiasi, si ha dunque una successione di viciniori da ambo le parti; ed a studiare una di queste successioni, basta naturalmente studiare quella che si ottiene partendo dallo zero e procedendo verso destra. Si ottiene così, se s è dispari, la successione

$$(8) \qquad 0, \quad (1, \varphi), \quad (1, \varphi, 1, \varphi), \quad (1, \varphi, 1, \varphi, 1, \varphi), \dots$$

e se s è pari, la successione

$$(9) \qquad 0, \quad (1, \varphi), \quad (1, \varphi', \varphi), \quad (1, \varphi', \varphi', \varphi), \quad (1, \varphi', \varphi', \varphi', \varphi), \dots$$

Queste successioni crescenti tendono ad un limite λ; partendo da un fuoco f qualsiasi, si ha la successione dei fuochi consecutivi, nel caso (8).

$$(10) \qquad (f, 1, \varphi), \quad (f, 1, \varphi, 1, \varphi), \quad (f, 1, \varphi, 1, \varphi, 1, \varphi), \dots$$

da una parte ed

$$(11) \qquad (f', \varphi), \quad (f', \varphi, 1, \varphi), \quad (f', \varphi, 1, \varphi, 1, \varphi), \dots$$

dall'altra, e nel caso (9), la successione

$$(12) \qquad (f, 1, \varphi), \quad (f, 1, \varphi', \varphi), \quad (f, 1, \varphi', \varphi', \varphi), \dots$$

(*) Indicheremo dunque coll'accento che nel fuoco di cui si tratta, l'ultima cifra è aumentata di un'unità. Si noti che, anche se $r_n = g_1 - 1$, (f', φ) è reale: infatti termina col gruppo $(g_1, g_1, g_2, \dots g_r)$, ed è $(g_1, g_2, \dots g_r) < a$, onde cotesto gruppo è reale, e siccome è minore di $(g_1, g_2, \dots g_r)$ per essere $g_2 < g_1$, è anche minore di a, ed (f', φ) è reale.

da una parte ed

$$(13) \qquad (f', \varphi), \quad (f', \varphi', \varphi), \quad (f', \varphi', \varphi', \varphi), \ldots$$

dall'altra (*). I limiti delle successioni precedenti (8) ... (13) si diranno *vertici*; essi sono $(r_1, r_2, \ldots r_n, \lambda)$ per le (10) e (12) ed $(r_1, r_2, \ldots r_n + \lambda)$ per le (11) e (13).

15. — Ogni fuoco appartiene dunque ad un intervallo al quale appartengono infiniti altri fuochi che si possono dire *associati* al primo; essi sono tutti isolati, e la successione dei fuochi associati tende agli estremi dell'intervallo contiguo, che sono vertici. I vertici appartengono all'aggregato F' derivato dell'aggregato F dei fuochi.

Supponiamo s dispari, per fissare le idee, ed accanto alla successione (8) consideriamo l'altra

$$(14) \qquad (1, \varphi, 1), \quad (1, \varphi, 1, \varphi, 1), \quad (1, \varphi, 1, \varphi, 1, \varphi, 1), \ldots$$

differente dalla (8), all'infuori del caso in cui φ sia formato da sole cifre 1 (**). Questa è decrescente; ognuno dei suoi elementi è maggiore di uno qualsiasi degli elementi della (8); essa ha dunque un limite μ — suo limite inferiore — con $\lambda \leq \mu$. Ora, due elementi di (14) non sono fuochi associati, infatti fra $(1, \varphi, 1)$ ed $(1, \varphi, 1, \varphi, 1)$ cade il fuoco $(1, \varphi, 1, \varphi, 2)$ ed insieme tutti i fuochi associati a questo. E così fra $(1, \varphi, 1, \varphi, 1)$ ed il successivo si trova $(1, \varphi, 1, \varphi, 1, \varphi, 2)$, ed analogamente fra due elementi consecutivi qualunque della (14). Il punto μ è dunque punto limite di vertici posti alla sua destra, e degli intervalli limitati da questi vertici. " L'aggregato dei punti

$$(15) \qquad (r_1, r_2, \ldots r_n, \mu), \quad (r_1, r_2, \ldots r_n + \mu)$$

(*) Le successioni (10) e (12) sono crescenti (a destra di f) e le successioni (11) e (13) sono decrescenti (a sinistra di f) se f ha un numero pari di cifre; il contrario ha luogo se f ha un numero dispari di cifre.

(**) Questo caso particolare viene esaminato più avanti: esso forma l'oggetto del n° 18.

“ è dunque un aggregato perfetto non denso; gli intervalli con-
“ tigui contengono un sistema associato di fuochi ed i relativi
“ vertici se è $\lambda < \mu$ (caso C_1), ed allora i vertici sono punti
“ limiti di fuochi da una sola parte, mentre i punti (15) sono
“ (da una sola parte) punti limiti di vertici. I punti (15) ap-
“ partengono al derivato F'' di F', ed è F'' perfetto non denso (*).
“ Se è $\lambda = \mu$ (caso C_2), i punti (15) coincidono coi vertici, ed
“ essi sono punti limiti di fuochi da una parte, punti limiti di
“ fuochi e di vertici dall'altra; l'aggregato F' è allora perfetto
“ non denso „.

§ IV.

16. — La discussione precedente mostra quali casi si possano presentare circa alla distribuzione delle catene reali limitate di radicali a base positiva a e dei loro punti limiti. Essendo F l'aggregato dei fuochi o catene reali limitate, tanto i punti di F che quelli di F' sono contenuti nell'intervallo $-z \dots z$. In questo si possono trovare intervalli i cui estremi appartengano ad F', e ciascun dei quali contiene o nessun fuoco (caso B_2), od uno solo (caso A), od un'infinità di fuochi isolati (caso C); può anche darsi che tutto l'intervallo $-z \dots z$ appartenga ad F' (caso B_1).

Diamo alcuni esempî dei varî casi:

17. — *a)* Se è $a < 1$, tutte e sole le espressioni ad una cifra (n° 5) sono reali; i fuochi sono dunque isolati, coi soli punti limiti $\pm z$. Si è nel caso C, con un solo intervallo con estremi appartenenti ad F'', intervallo che coincide con $-z \dots z$.

b) Se è $a > 2$, si presenta il caso A; ad ogni fuoco f corrisponde l'intervallo $(f, z) \dots (f, 1, z)$, in cui cade il solo fuoco f (**).

c) Se è $a = 2$, ogni punto del segmento $-2 \dots 2$ appartiene all'aggregato F'; si è nel caso B_1 (***).

(*) L'aggregato chiuso F' si compone dell'aggregato perfetto non denso F'' e dell'aggregato numerabile dei vertici; decomposizione conforme al teorema di Cantor Bendixson.

(**) Nota dell'Accad. di Bologna, citata al n° 5.

(***) Ibid. In questo caso è $z = 2$.

18. — Consideriamo il caso in cui a è tale che sia $g_1 = 2$, e $(g_1 - 1) < a < (g_1, g_1 - 1)$, cioè

$$(1) \qquad \sqrt{a} < a < \sqrt{a + \sqrt{a - \sqrt{a}}}.$$

In questa ipotesi, una catena in cui figuri la cifra 2 o una cifra superiore, in qualunque posto all'infuori del primo, non può essere reale (nº 10, b): fuochi reali sono dunque tutte e sole le espressioni della forma

$$(2) \qquad \pm (r, 1, 1, \ldots 1).$$

Ci limiteremo ai fuochi positivi. La successione

$$(3) \qquad \varphi_1 = (1), \quad \varphi_3 = (1, 1, 1), \quad \varphi_5 = (1, 1, 1, 1, 1), \ldots$$

è decrescente; tende ad un limite ξ, suo limite inferiore, e poichè è

$$\varphi_{2n+1} = (1, 1, \varphi_{2n-1}),$$

ξ è radice dell'equazione

$$(4) \qquad \alpha_2(x) = -x, \qquad \text{ossia} \qquad x^4 - 2ax^2 + x + a^2 - a = 0.$$

La successione

$$(5) \qquad \varphi_2 = (1, 1), \quad \varphi_4 = (1, 1, 1, 1), \quad \varphi_6 = (1, 1, 1, 1, 1, 1), \ldots$$

è crescente e tende ad un limite ξ', suo limite superiore; ed essendo

$$\varphi_{2n+2} = (1, 1, \varphi_{2n}),$$

anche ξ' è radice dell'equazione (4). Inoltre, dal confronto della (3) colla (5), siccome ogni φ_{2n+1} è maggiore di qualsiasi φ_{2m}, segue $\xi \geq \xi'$. Ma ξ e ξ' sono entrambi positivi e compresi fra 0 e $\sqrt{a}$, mentre la (4) ha due radici positive, l'una fra 0 e $\sqrt{a}$, l'altra fra $\sqrt{a}$ ed a; onde $\xi = \xi'$. La catena indefinita

$$(1, 1, 1, \ldots)$$

è dunque convergente (v. introduzione) ed il suo valore è

$$\xi = \frac{1}{2}(\sqrt{1+4a} - 1),$$

le ridotte d'indice pari φ_{2n} tendono a ξ crescendo, quelle d'indice dispari φ_{2n+1} decrescendo.

Essendo r un intero qualunque, i fuochi (r, φ_{2n}) tendono ad (r, ξ) decrescendo, i fuochi (r, φ_{2n-1}) tendono ad (r, ξ) crescendo; (r, ξ) è un vertice, limite dei fuochi (r, φ_{2n}) posti alla sua destra, dei fuochi (r, φ_{2n-1}) posti alla sua sinistra; l'intervallo $(r-1, \xi) \ldots (r, \xi)$ è intervallo contiguo limitato da due vertici ed entro il quale cadono gl'infiniti fuochi associati della forma $(r-1, \varphi_{2n})$ ed (r, φ_{2n-1}).

Riassumendo, sotto la condizione (1) le catene reali, limitate o no, possono presentare solo la cifra 1 dal secondo posto in poi. I vertici (r, ξ) costituiscono l'aggregato F'; l'aggregato F'' si riduce a $\pm z$.

Il caso ora trattato appartiene al caso C, colla particolarità però che F'' non è aggregato perfetto: questa eccezione è giustificata dall'osservazione fatta al n° 15.

19. — Infine, consideriamo il caso in cui è

$$(g-1) < a < (g, g-1), \tag{6}$$

essendo $g > 2$; caso in cui (n° 10, b) in una catena reale non può figurare la cifra g all'infuori del primo posto. In questo caso, fra $(g-1)$ ed a non cade alcun fuoco, come è osservato al citato n° 10, b; onde siamo nel caso C. Vogliamo mostrare come si sia anzi nel caso C_2, cioè come coincidano i limiti indicati al n° 15 con λ e μ, i quali, nel caso attuale, poichè il fuoco indicato con φ al n° 14 è qui $g-1$, sono i limiti rispettivi delle successioni

$$(1, g-1),\ (1, g-1, 1, g-1),\ (1, g-1, 1, g-1, 1, g-1), \ldots \tag{7}$$

e

$$(1, g-1, 1),\ (1, g-1, 1, g-1, 1),\ (1, g-1, 1, g-1, 1, g-1, 1), \ldots \tag{8}$$

20. — Per dimostrare l'identità di questi limiti, occorre qualche osservazione sul comportamento delle radici delle equazioni

(9) $$\alpha_m(x) = 0\,, \qquad (m = 1, 2, 3, \dots g).$$

a) Esse sono (n° 7) in numero di 2^m, date dalle catene $\pm(r_1, r_2, \dots r_s)$ in cui la somma delle cifre è m: tutte reali per essere $m \leq g$ e a due a due contrarie. Se ρ è radice di $\alpha_{m-1}(x) = 0$, $\sqrt{a \pm \rho}$ dà due radici di $\alpha_m(x) = 0$, e se ρ, ρ' sono due radici di $\alpha_{m-1}(x) = 0$ consecutive in ordine crescente, $\sqrt{a + \rho}$, $\sqrt{a + \rho'}$ saranno radici di $\alpha_m(x) = 0$ consecutive in ordine crescente e $\sqrt{a - \rho}$, $\sqrt{a - \rho'}$ radici di $\alpha_m(x) = 0$ consecutive in ordine decrescente.

b) Siano

$$-(m),\ -(m-1,1),\ -(m-2,1,1), \dots (m-2,1,1),\ (m-1,1),\ (m)$$

le radici di $\alpha_m(x) = 0$ ordinate in ordine crescente. Una qualunque fra queste, che non sia $\pm(m)$, è tale che la precedente termina con cifra 1 e la seguente con cifra diversa da 1, oppure la precedente con cifra diversa da 1 e la seguente con cifra 1. Ciò si verifica subito per le radici di $\alpha_3(x) = 0$, che sono

$$(-3),\ (-2, 1),\ -(1, 1, 1),\ -(1, 2),\ (1, 2),\ (1, 1, 1),\ (2, 1),\ (3);$$

supponiamo verificato l'asserto per $\alpha_{m-1}(x) = 0$ e siano ρ_k, ρ_{k+1}, ρ_{k+2} le radici consecutive. Tre radici consecutive di $\alpha_m(x) = 0$ saranno allora

$$\sqrt{a + \rho_k},\quad \sqrt{a + \rho_{k+1}},\quad \sqrt{a + \rho_{k+2}},$$

o

$$\sqrt{a - \rho_k},\quad \sqrt{a - \rho_{k+1}},\quad \sqrt{a - \rho_{k+2}};$$

ora se ρ_k, ρ_{k+2} terminano l'una colla cifra 1, l'altra no, lo stesso è di $\sqrt{a \pm \rho_k}$ e $\sqrt{a \pm \rho_{k+2}}$.

c) Siano $(\dots 1)$, $(\dots h_m)$ due radici consecutive di $\alpha_m(x) = 0$ di cui una termini con 1, l'altra no: fra queste cade il fuoco $(\dots h_m,\ g - 1)$ di ordine $m + g - 1$. Ciò si verifica subito per $\alpha_3(x) = 0$; fra $(1, 2)$ ed $(1, 1, 1)$ cade $(1, 2, g - 1)$; fra $(2, 1)$

e (3) cade $(3, g-1)$. Il fatto sia verificato per $\alpha_{m-1}(x)=0$, cioè $(\rho_h, g-1)$ sia compreso fra ρ_h e ρ_{h+1}; si vede che:

$$\sqrt{a+(\rho_h, g-1)} \text{ è compreso fra } \sqrt{a+\rho_h} \text{ e } \sqrt{a+\rho_{h+1}},$$
$$\sqrt{a-(\rho_h, g-1)} \quad \text{"} \quad \sqrt{a-\rho_h} \text{ e } \sqrt{a-\rho_{h+1}},$$

e la proposizione è così dimostrata.

d) Osserviamo infine che l'equazione

$$\alpha_m(x)=0,$$

sviluppando l'espressione α_m e notando che il termine indipendente da x, $\alpha_m(0)=\alpha_{m-1}(a)$, è positivo per l'ipotesi $(g-1)<a$, presenta 2^{m-1} variazione; cioè precisamente tante quante sono le sue radici positive.

21. — Siamo ora in grado di dimostrare l'uguaglianza dei numeri λ e μ, limiti rispettivi delle successioni (7) e (8). Intanto, essi sono entrambi radici dell'equazione

$$x=(1, g-1, x),$$

e quindi di

$$\alpha_g(x)+x=0, \tag{10}$$

di cui indicheremo il primo membro con $\beta(x)$.

Osserviamo intanto che $\beta(x)$ ha lo stesso numero di variazioni di $\alpha_g(x)$, cioè 2^{g-1}, e quindi la (10) ha al più 2^{g-1} radici positive. Se ρ, ρ' sono due radici consecutive di $\alpha_g(x)=0$ tali che l'una termini colla cifra 1 e l'altra no, fra queste (nº 20, *c*) cade un fuoco della forma $(\rho, g-1)$ o $(\rho', g-1)$: questo fuoco si indichi con σ. Si ha manifestamente

$$\beta(\rho)>0, \qquad \beta(\rho')>0,$$

mentre è

$$\beta(\sigma)=-(g-1)+\sigma,$$

e questo è certamente negativo perchè la prima cifra in σ, che è $(\rho, g-1)$ o $(\rho', g-1)$, è la prima cifra di ρ o ρ', al più uguale a $g-1$. Onde

$$\beta(\rho)>0, \qquad \beta(\sigma)<0, \qquad \beta(\rho')>0,$$

e quindi fra ρ e ρ' cadono almeno due radici della (10); ma le coppie di radici come ρ, ρ' sono 2^{g-2}, mentre le radici positive di (9) sono 2^{g-1} al più, onde esse sono esattamente 2^{g-1}.

Ciò posto, $(1, g-1)$ ed $(1, g-2, 1)$ sono due radici consecutive di $\alpha_g(x)=0$ nella condizione indicata per ρ e ρ', e quindi fra $\rho=(1, g-1)$ e $\sigma=(1, g-1, g-1)$ cade una radice della (10) ed una sola. D'altra parte, tutti gli elementi delle (7) e (8) essendo compresi fra ρ e ρ', lo stesso accade di λ e μ; essendo queste radici della (10), esse devono dunque coincidere, c. d. d.

22. — Da quanto precede, rimane stabilito che se la base soddisfa alla condizione (6), con $g>2$, l'aggregato dei fuochi si trova nel caso C_2. Risulta ancora che la catena illimitata

$$(1, g-1, 1, g-1, 1, \ldots)$$

è convergente (v. introd.) e che il suo valore è la radice minima positiva dell'equazione (10).

L'Accademico Segretario
CARLO FABRIZIO PARONA

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona. Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di **C. Frati, A. Baudi di Vesme** e **C. Cipolla.**

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in-f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di **C. Cipolla, G. De Sanctis** e **P. Fedele.**

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in-4°, di 70 pagg. e 96 tav.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza del 28 Aprile 1918 . *Pag.* 361

Jadanza (Nicodemo). — Cenni necrologici su Paolo Pizzetti . „ 363

Detto. — Determinazione Geodetica del Castello di Trana e del Campanile del Comune . . . . „ 379

Peano (Giuseppe). — Interpolazione nelle tavole numeriche . „ 395

Bottasso (Matteo). — Generalizzazione della trasformazione di Combescure per le curve . . . . „ 419

Issoglio (Giovanni). — La composizione chimica del riso naturale e del riso brillato italiano (Nota I) . . . . . . „ 433

Pincherle (Salvatore). — Sulle catene di radicali quadratici . „ 447

Tip. Vincenzo Bona – Torino.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. LIII, DISP. 13ª, 1917-1918.

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 3.
1918

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 12 Maggio 1918.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. COMM. ANDREA NACCARI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci D'Ovidio, Direttore della Classe, Segre, Peano, Jadanza, Foà, Guareschi, Guidi, Mattirolo, Grassi, Somigliana, Panetti, Ponzio, Sacco, Majorana e Parona Segretario.

Si legge e si approva l'atto verbale della precedente adunanza.

Il Socio Sacco offre in omaggio cinque sue pubblicazioni (*Prof. C. Bruno; Conte L. Di Rovasenda; La pianura di Alessandria; Il ghiacciaio ed i laghi del Ruitor; L'evoluzione del fiume Tanaro*) e ne parla brevemente. Il Presidente ringrazia.

Si presentano, e sono accolte per la stampa negli *Atti*, le seguenti Note:

Prof. F. Gerbaldi, *Simmetria e periodicità nelle frazioni continue di Halphen*. Il Socio Segre, che presenta, richiama l'attenzione della Classe, la quale vivamente se ne compiace, sulla dedica che l'A. fa del lavoro al Maestro illustre Senatore D'Ovidio in occasione del suo LXXV genetliaco.

Socio I. Guareschi, *Nuovi acidi* ββ *dialchilglutarici*, comunicazione seconda.

Prof. A. Tanturri, *Sui prodotti infiniti* $(1-x)(1-x^2)$ $(1-x^3)\ldots$ *e* $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\ldots$, presentata dal Socio Peano.

Socio Q. Majorana, *Influenza del movimento di uno specchio o della sorgente sulla propagazione della luce.* L'A. coglie l'occasione per ringraziare la Classe della sua nomina a Socio e poi riassume il lavoro, accennando alle origini, allo scopo, ai risultati delle sue ricerche sperimentali. Il Presidente, che ebbe modo di assistere alle esperienze e di apprezzarne la difficoltà e delicatezza, si congratula col collega e si compiace che gli importanti risultati siano consegnati ai nostri *Atti* accademici.

Socio C. F. Parona, *Ragguagli sopra gli ossami fossili trovati in una tomba presso Anteopolis* (Monti di Gau, Alto Egitto). L'A., riferendo in proposito, osserva che lo studio riguarda un copioso materiale scoperto e raccolto dal collega Schiaparelli durante una delle sue missioni archeologiche in Egitto.

Raccoltasi poscia la Classe in seduta privata procede alla nomina di un membro della Commissione per il premio Vallauri del quadriennio 1915-1918. Riesce eletto il Socio Parona.

LETTURE

Simmetria e periodicità nelle frazioni continue di Halphen [1]

Nota I di F. GERBALDI, a Pavia

1. Prefazione. — Sia dato un polinomio di 4° grado

$$X = X(x) = a_0 x^4 + 4 a_1 x^3 + 6 a_2 x^2 + 4 a_3 x + a_4,$$

e si faccia variare x nell'intorno di un punto fisso ξ, per cui X non si annulli; sia poi y una costante data e si ponga $X(y) = Y$. Chiamo *elemento di* HALPHEN la funzione

$$\frac{\sqrt{X} - \sqrt{Y}}{x - y},$$

dove $\sqrt{Y}$ è uno, prefissato, dei due valori della radice quadrata di Y e $\sqrt{X}$ denota un ramo della radice quadrata di X, che si può ritenere sviluppato in una serie di potenze intere di $x - \xi$, se ξ è finito. Fatta la sostituzione $x = s + \xi$, sia t il valore di s che corrisponde al valore y di x; chiamo *parametro* dell'elemento la costante y o la t, secondochè si considera come variabile la x o la s. Sia poi

$$p_0 + 4 p_1 s + 6 p_2 s^2 + 4 p_3 s^3 + p_4 s^4$$

(1) All'illustre Prof. Sen. ENRICO D'OVIDIO, del quale io ebbi la ventura di esser discepolo ed anche l'onore di essere assistente (1879-80), dedico in occasione del suo LXXV genetliaco, le mie ricerche sulle frazioni continue di Halphen. — La prima parte di esse comparirà nel volume *Scritti matematici offerti ad* ENRICO D'OVIDIO che è in corso di stampa (Torino, Fratelli Bocca). — La seconda parte consta di questa e di un'altra Nota, che si stampano in questo volume degli " Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino ". — La terza parte sarà pubblicata nel vol. LI dei " Rendiconti del R. Istituto Lombardo ". — Dovendo qui spesso far uso di formole stabilite nella prima parte, le richiamerò scrivendo in [ ] i numeri coi quali le formole stesse sono ivi segnate.

il polinomio trasformato di X; sarà per ipotesi $p_0 \neq 0$. Fissato uno dei due valori della radice quadrata di p_0, che si denota con $\sqrt{p_0}$, si considera la serie

$$\sqrt{X} = \sqrt{p_0}(1 + q_1 s + q_2 s^2 + \ldots)$$

e si suppongono calcolati i valori di q_1, q_2, q_3, q_4, [(2) § 1]; e quindi le quantità [N. 8]:

$$I = q_1^2 - 4q_2, \qquad J = q_1 q_3 + 2q_4,$$
$$4K = J^2 - q_3^2 I = q_1 q_3 q_4 + q_2 q_3^2 + q_4^2 = q_4^2 - q_3 q_5.$$

Halphen ha studiato nel " Traité des fonctions elliptiques „, t. II, Chap. XIV, lo sviluppo dell'elemento analitico considerato in una frazione continua:

$$\frac{\sqrt{X} - \sqrt{Y}}{x - y} = C + \frac{\beta_1|}{|\alpha_1} + \frac{\beta_2|}{|\alpha_2} + \frac{\beta_3|}{|\alpha_3} + \ldots,$$

dove: il termine iniziale C è un binomio di 1° grado in s; i denominatori α_i, pur essi binomi di 1° grado in s, non si annullano per $s = 0$; i numeratori β_i sono monomi di 2° grado in s, ed ha fatto uso delle funzioni ellittiche per esprimere i termini α_i, β_i.

La frazione continua *discendente* fa parte di una frazione continua illimitata nei due sensi (*completa*):

$$\ldots + \frac{\beta_{-2}|}{|\alpha_{-2}} + \frac{\beta_{-1}|}{|\alpha_{-1}} + \frac{\beta_0|}{|\alpha_0} + \frac{\beta_1|}{|\alpha_1} + \frac{\beta_2|}{|\alpha_2} + \ldots,$$

dalla quale si possono staccare infinite altre frazioni continue discendenti, a cominciare da un numeratore qualunque ed io ho stabilito in modo algebrico [N. 4] che, per ogni valore intero (positivo, nullo, o negativo) dell'indice i, si ha:

$$\frac{\beta_{i+1}|}{|\alpha_{i+1}} + \frac{\beta_{i+2}|}{|\alpha_{i+2}} + \ldots = \frac{\sqrt{X} - \sqrt{Y_i}}{x - y_i} - C^{(i)},$$
$$C^{(i)} = \sqrt{p_0}\,[q_1 + \lambda_i (s + t_i)],$$

per guisa che ad ogni frazione continua completa è *associata* una successione di elementi $\dfrac{\sqrt{X} - \sqrt{Y_i}}{x - y_i}$, essendo $Y_i = X(y_i)$, e quindi

una successione di parametri y_i, ovvero t_i, $(y_i = t_i + \xi)$, ed ancora una successione di costanti λ_i.

Fra tali due successioni sussistono le due equazioni [(28), (32) N. 3], che si possono compendiare nella seguente, che è di 2° grado separatamente rispetto a t e λ:

$$(1) \qquad p_0 t^2 \lambda^2 + 4 p_1 t \lambda - p_4 t^2 - 4 p_3 t + 2 p_0 \lambda - 2 p_0 q_2 = 0.$$

Quest'equazione, per $t = t_i$ è soddisfatta da $\lambda = \lambda_{i-1}$ e $\lambda = \lambda_i$; per $\lambda = \lambda_i$ è soddisfatta da $t = t_i$ e $t = t_{i+1}$. Da qui si ricavano le relazioni ricorrenti [(38), (39)], che servono a calcolare le successioni stesse:

$$(2) \qquad t_{i+1} = - t_i - 4 \frac{p_1 \lambda_i - p_3}{p_0 \lambda_i^2 - p_4}, \qquad \lambda_{i+1} = - \lambda_i - 2 \frac{1 + q_1 t_{i+1}}{t^2_{i+1}},$$

facendo uso dei valori iniziali:

$$t_0 = t, \qquad \lambda_0 = \frac{1}{t^2} \left[\frac{\sqrt{Y}}{\sqrt{p_0}} - (1 + q_1 t) \right];$$

calcolate le quali, i termini della frazione continua sono espressi dalle formole [(33), (36)], cioè:

$$(3) \qquad \beta_{i+1} = (p_4 - p_0 \lambda_i^2)\, s^2, \qquad \alpha_i = - \frac{2\sqrt{p_0}}{t_i} \left(1 + \frac{1 + q_1 t_i}{t_i}\, s \right).$$

Quando nella successione dei parametri $t, t_1, t_2, \ldots$ si trovano valori nulli o infiniti, le formole precedenti cadono in difetto.

Giova per lo studio della frazione continua di Halphen considerarla completa e scriverla in una particolare forma equivalente (*forma normale*), nella quale i denominatori hanno tutti i termini costanti eguali a 1, cioè:

$$\ldots + \frac{v_{-2} s^2|}{|1 - u_{-2} s} + \frac{v_{-1} s^2|}{|1 - u_{-1} s} + \frac{v_0 s^2|}{|1 - u_0 s} + \frac{v_1 s^2|}{|1 - u_1 s} + \ldots .$$

I coefficienti v_i, u_i sono legati alle successioni precedenti t_i, λ_i dalle relazioni:

$$(4) \qquad u_i = - \left(q_1 + \frac{1}{t_i} \right), \qquad v_{i+1} = \frac{1}{2} (q_2 - \lambda_i).$$

Questi coefficienti si calcolano direttamente, facendo uso delle formole ricorrenti [(54), (55), (56), (57) § 1], cioè:

$$(5)\quad \begin{cases} u_i + u_{i-1} + q_1 = \dfrac{q_3}{2v_i}, & u_i u_{i-1} + v_i = q_2 + \dfrac{q_4}{2v_i}, \\ v_{i+1} + v_i = u_i^2 + q_1 u_i + q_2, & 2v_i v_{i+1} = q_3 u_i - q_4. \end{cases}$$

Quando t è finito e diverso da 0, i valori iniziali sono:

$$u_0 = -q_1 - \frac{1}{t}, \qquad v_0 = \frac{1}{2t^2}\left(\frac{\sqrt{Y}}{\sqrt{p_0}} + 1 + q_1 t + q_2 t^2\right);$$

e nella frazione continua discendente, che dà lo sviluppo dell'elemento, il termine iniziale è $C = \sqrt{p_0}\,[q_1 + \lambda_0 (s + t)]$, ed il primo numeratore è $-\frac{2\sqrt{p_0}}{t} v_1 s^2$.

Quando sia $t = \infty$, con $t_1, t_2, \ldots$ finiti e diversi da 0, i valori iniziali sono $u_0 = -q_1$, $v_0 = \frac{1}{2}\left(q_2 + \frac{\sqrt{p_4}}{\sqrt{p_0}}\right)$; nella frazione continua discendente il termine iniziale è $\sqrt{p_0}\,(1 + q_1 s)$, il primo numeratore è $2v_1 s^2$; l'elemento analitico sviluppato dalla frazione continua allora è $\sqrt{X} - \sqrt{p_4}\, s^2$ [N. 10].

Quando sia $t = 0$, con $t_1, t_2, \ldots$ finiti e diversi da 0, nella frazione continua discendente si assume come termine iniziale $\sqrt{p_0}\,(1 + q_1 s + q_2 s^2)$, come primo numeratore $q_3 s^3$, come valori iniziali $u_1 = \frac{q_4}{q_3}$, $v_2 = \frac{K}{q_3^2}$; l'elemento analitico sviluppato allora dalla frazione continua è $\sqrt{X}$ [N. 11].

Gli sviluppi d'un elemento nell'intorno del punto $\xi = \infty$, sono studiati al [N. 12]; allora i numeratori della frazione continua sono tutti costanti ed i denominatori sono di 1° grado in s della forma $s - u_i$.

Quando nella successione dei parametri t_i ve ne è qualcuno nullo, e così pure quando nella successione dei parametri t_i ve ne è qualcuno infinito e si tratta dello sviluppo di un elemento nell'intorno di $\xi = \infty$, si presentano nella frazione continua frazioni parziali irregolari, allo studio delle quali è dedicato il [§ 2].

Infine, per quanto riguarda le generalità relative alla simmetria ed alla periodicità di una frazione continua di HALPHEN, terremo presenti le cose esposte al [N. 5, § 1].

2. Caso della simmetria pari. — Quando la frazione continua presenta il caso della simmetria pari, se α_p è il denominatore centrale, si ha: $\lambda_{p-1} = \lambda_p$ e $v_p = v_{p+1}$. — Allora t_p, ovvero y_p (secondochè X si pensa funzione di x, ovvero di s) si dirà il *parametro centrale*; nella frazione continua in forma normale si diranno: *centrale* il coefficiente u_p, *semi-centrali* i coefficienti v_p, v_{p+1}.

Abbiamo visto [N. 10] che, se $t_h = \infty$, la frazione continua è simmetrica col centro nel denominatore di rango h, quando il polinomio dato X è di 3° grado e allora soltanto. — Abbiamo visto inoltre [N. 11] che, se $t_h = 0$, con $t_{h-1} \neq 0$, la frazione continua è sempre simmetrica rispetto ad un denominatore irregolare. In quel che segue, escluderemo i valori 0 e ∞ di t.

TEOREMA 1°. — *Quando una frazione continua di* HALPHEN *presenta il caso della simmetria pari, il parametro centrale* y *è radice dell'equazione* X(x) = 0 (²).

In fatti dalle formole [(24), § 1] segue subito che, affinchè sia $\lambda_p = \lambda_{p-1}$ è necessario e sufficiente che si abbia $Y_p = 0$; si vede inoltre, che se t è il valore di un parametro centrale, si ha:

$$\lambda_{p-1} = \lambda_p = -\frac{1 + q_1 t}{t^2},$$

valore che denoteremo con λ. — Corrispondentemente ai quattro valori di y, che son radici di X, si hanno quattro valori di λ; volendo formare l'equazione di 4° grado che li ha per radici, osserviamo che l'equazione [(32), § 1], quando si ponga $t_i = t$, ha λ per radice doppia; per conseguenza sussistono le equazioni:

$$p_0 t^2 \lambda + 2p_1 t + p_0 = 0,$$
$$-(2p_1 t + p_0)\lambda + (p_4 t^2 + 4p_3 t + 2p_0 q_2) = 0.$$

Se da queste eliminiamo λ, ricaviamo:

$$p_0 + 4p_1 t + 6p_2 t^2 + 4p_3 t^3 + p_4 t^4 = X(y) = 0, \tag{6}$$

(²) Cfr. HALPHEN, *Traité des fonctions elliptiques*, t. II, pag. 592.

e ritroviamo il teorema. — Se invece eliminiamo t, otteniamo l'equazione di 4° grado in λ domandata. Questo calcolo risulta spedito, quando si usa la forma normale della frazione continua. — Dalle formole ricorrenti [(56), (57), § 1] per $v_p = v_{p+1} = v$, $u_p = u$, si deducono le equazioni:

(7) $$2v = u^2 + q_1 u + q_2, \qquad 2v^2 = q_3 u - q_4.$$

Da queste eliminando la v si ottiene:

(8) $$(u^2 + q_1 u + q_2)^2 - 2(q_3 u - q_4) = 0,$$

equazione che determina i valori del coefficiente centrale u nei casi di simmetria pari; è facile verificare che essa è equivalente alla (6), se si tien presente la relazione:

$$u = -\frac{1 + q_1 t}{t}.$$

Quando invece dalle (7), (8) si elimina la u, si ricava:

(9) $$4v^4 + 2Jv^2 - 2q_3^2 v + K = 0,$$

alla quale devono soddisfare i valori v dei coefficienti semicentrali.

Talora è conveniente fare la sostituzione [(69) N. 8]:

$$w = q_3 u - q_4;$$

allora le equazioni (7), (8) diventano:

(a) $$2q_3^2 v = w^2 + Jw + K, \qquad (b) \quad 2v^2 = w.$$

Da queste, eliminando w, si ritrova la (10); eliminando invece v, si ricava:

(10) $$(w^2 + Jw + K)^2 - 2q_3^4 w = 0,$$

che è equivalente alla (9).

Conseguenza importante del teorema sopra stabilito è la proposizione seguente:

Condizione necessaria, affinchè una frazione continua di Halphen *sia simmetrica, con simmetria pari, è che l'equazione* $X = 0$

ammetta una radice appartenente al campo di razionalità determinato dai coefficienti di X *e delle quantità assegnate* ξ, y, $\frac{\sqrt{Y}}{\sqrt{p_0}}$. Infatti, come si è osservato al [N. 7, § 1], tutti i parametri della frazione continua appartengono al detto campo di razionalità, e d'altra parte il parametro centrale y è radice dell'equazione $X=0$. — È poi chiaro che la condizione enunciata non è sufficiente.

3. Caso della simmetria impari. — Quando la frazione continua presenta il caso della simmetria impari, se β_p è il numeratore centrale, si ha: $t_{p-1}=t_p$ e $u_{p-1}=u_p$; i parametri t_{p-1}, t_p si diranno *semi-centrali.* Nella frazione continua in forma normale si diranno: *centràle* il coefficiente v_p e *semi-centrali* i coefficienti u_{p-1}, u_p.

Se v è il valore del coefficiente centrale v_p e si pone $\lambda=q_2-2v$, per questo valore di λ l'equazione [(28), § 1] ha eguali le due radici t_{p-1}, t_p; denotando con t il loro comune valore, sussistono le equazioni:

$$(11)\qquad \begin{cases} (p_0\lambda^2-p_4)\,t+2\,(p_1\lambda-p_3)=0\,, \\ (p_1\lambda\ -p_3)\,t+\ \ (p_0\lambda-q_2)=0\,. \end{cases}$$

Da queste eliminando t, si ha un'equazione di 3° grado in λ, dalle radici della quale si deducono i valori che può prendere il coefficiente centrale v; eliminando invece λ, si ha un'equazione di 3° grado in t, alla quale devono soddisfare i valori dei parametri semi-centrali.

Occupiamoci in primo luogo dell'equazione in λ. Denotando con Δ il discriminante dell'equazione [(32), § 1], di 2° grado in λ, l'equazione domandata è $\Delta=0$. Or bene tenendo presente

$$q_2=\frac{1}{p_0^2}\,(3p_0p_2-2p_1^2)\,,$$

si ha:

$$\frac{1}{2}\,\Delta=-\,p_0^2\lambda^3+3p_0p_2\lambda^2+(p_0p_4-4\,p_1p_3)\,\lambda+ \\ +\frac{1}{p_0}\,(2p_0p_3^2-3p_0p_2p_4+2p_1^2p_4)\,,$$

$$\frac{1}{2}\,p_0\,\Delta=(-\,p_0\lambda+p_2)^3-(p_0p_4-4p_1p_3+3p_2^2)\,(-\,p_0\lambda+p_2)- \\ -\,2\,(p_0p_2p_4+2p_1p_2p_3-p_2^3-p_0p_3^2-p_1^2p_4).$$

Se ora si considera la forma:

$$\overline{X} = p_0 s_2^4 + 4p_1 s_1 s_2^3 + 6p_2 s_1^2 s_2^2 + 4p_3 s_1^3 s_2 + p_4 s_1^4,$$

che si deduce da X ponendo $s = \frac{s_1}{s_2}$, gli invarianti di $\overline{X}$ nella notazione di Clebsch sono:

$$i = 2\,(p_0 p_4 - 4p_1 p_3 + 3p_2^2),$$
$$j = 6\,(p_0 p_2 p_4 + 2p_1 p_2 p_3 - p_2^3 - p_0 p_3^2 - p_1^2 p_4).$$

Per conseguenza, introducendo la quantità

$$l = -p_0 \lambda + p_2, \tag{12}$$

l'equazione $\Delta = 0$ si riduce alla nota risolvente cubica:

$$l^3 - \frac{1}{2}\,il - \frac{1}{3}\,j = 0. \tag{13}$$

Risoluta che sia questa equazione, dalle sue radici si deducono facilmente i valori del coefficiente centrale v; basta ricordare $v = \frac{1}{2}(q_2 - \lambda)$ e tenere presente la (12); si ricava:

$$v = \frac{1}{2p_0}\left(l - \frac{1}{6}\,p_0 I\right). \tag{14}$$

Si conchiude:

Teorema 2°. — *Quando una frazione continua di* Halphen *presenta il caso della simmetria impari, il coefficiente centrale* v *ha un valore espresso dalla* (14), *dove per* l *si sostituisca una radice della risolvente cubica* (13).

Passiamo in secondo luogo a formare l'equazione di 3° grado in t, alla quale deve soddisfare il valore d'un parametro semicentrale. — A questo scopo occorre eliminare λ dalle (11); dalla seconda di queste si ricava:

$$\lambda = \frac{p_0 q_2 + p_3 t}{p_0 + p_1 t}; \tag{15}$$

sostituendo nella prima, si arriva facilmente alla seguente equazione di 3° grado in t:

$$\begin{aligned}(p_0 p_3^2 - p_1^2 p_4)\,t^3 + 2\,(3p_0 p_2 p_3 - p_0 p_1 p_4 - 2p_1^2 p_3)\,t^2 +\\ + (9p_0 p_2^2 - p_0^2 p_4 - 2p_0 p_1 p_3 - 6p_1^2 p_2)\,t - p_0^2 q_3 = 0.\end{aligned} \tag{16}$$

Notevole è la forma di quest'equazione. Se si considera il covariante sestico T della biquadratica $\overline{X}$ e si forma la 3ª derivata di T rispetto a s_2, questa per $s_1 = t$, $s_2 = 1$ coincide (a meno d'un fattor numerico) col primo membro della (16); allora, ricordando che la $\overline{X}$, per $s_1 = s$ e $s_2 = 1$, è la trasformata della biquadratica data $X(x)$ colla sostituzione $x = s + \xi$, si conchiude:

TEOREMA 3°. — *Quando la frazione continua di* HALPHEN, *che sviluppa un elemento nell'intorno di un punto* ξ, *è simmetrica impari, il valore* y *del parametro semi-centrale è radice dell'equazione di 3° grado, che si ottiene eguagliando a zero la terza polare di* ξ *rispetto al covariante sestico della biquadratica data* X (x).

Quando si faccia uso della forma normale per la frazione continua, chiamando v, u i valori dei coefficienti centrale e semicentrali, e ponendo $v_p = v$, $u_{p-1} = u_p = u$, dalle formole ricorrenti [(54), (55), § 1] si deduce:

$$(17) \qquad 4uv = q_3 - 2q_1 v, \qquad 2u^2 v = -2v^2 + 2q_2 v + q_4 .$$

Da queste, eliminando una volta u, l'altra volta v, si ricavano le equazioni seguenti:

$$(18) \qquad 16v^3 + 4(q_1^2 - 4q_2)v^2 - 4(q_1 q_3 + 2q_4)v + q_3^2 = 0,$$

$$(19) \qquad 4q_3 u^3 + 2(q_1 q_3 - 4q_4)u^2 - 4(q_2 q_3 + 2q_1 q_4)u + \\ + (q_3^2 - 2q_1 q_2 q_3 - 2q_1^2 q_4) = 0;$$

la prima di queste determina i valori che può avere il coefficiente centrale v_p nel caso di simmetria impari; mentre alla seconda soddisfano i coefficienti semi-centrali $u_{p-1} = u_p$.

Talora è conveniente fare la sostituzione: $w = q_3 u - q_4$; allora la prima delle (17) diventa:

$$(c) \qquad 4vw = q_3^2 - 2Jv,$$

e dalla seconda delle (17), combinata con questa, si ricava:

$$(d) \qquad w^2 = -q_3^2 v + K.$$

Ora, se dalle (c), (d) si elimina w e si tien presente la relazione $J^2 - 4K = q_3^2 I$, si deduce:

$$(18^{bis}) \qquad 16v^3 + 4Iv^2 - 4Jv + q_3^2 = 0,$$

che coincide colla (18). — Se poi dalle (*c*), (*d*) si elimina v, si ottiene l'equazione:

$$(20) \qquad 4w^3 + 2Jw^2 - 4Kw + q_3^4 - 2JK = 0,$$

la quale coincide colla trasformata della (19) mediante $w = q_3 u - q_4$.

Osserviamo ancora che se nella (18^{bis}) sostituiamo a v la espressione (14), essa si deve trasformare nella equazione risolvente (13). Ciò si verifica facilmente, tenendo presenti le espressioni degli invarianti i, j mediante le quantità I, J date dalle [(74), (77), § 1].

Conseguenza importante del Teorema 2° è la proposizione seguente:

Condizione necessaria affinchè una frazione continua di Halphen *sia simmetrica, con simmetria impari, è che l'equazione risolvente* (13) *ammetta una radice appartenente al campo di razionalità determinato dai coefficienti di* X, *e delle quantità assegnate* ξ, y, $\frac{\sqrt{Y}}{\sqrt{p_0}}$. Tale corollario risulta dalla stessa osservazione, che si è fatta in fine al N. precedente.

4. Scomposizione della biquadratica nella somma di due quadrati. — Dal Teorema 2° si deduce un'altra notevole conseguenza. Tengasi presente la relazione [(6), § 1] che quando si usa la variabile x si scrive:

$$X(x) = A^2 + B_0(x - \xi)^2 (x - y)(x - y_1).$$

Se ξ è arbitrario e y è una radice della terza polare di ξ rispetto al covariante sestico di $X(x)$, in virtù del Teorema 2°, risulta $y_1 = y$ e si ha:

$$X(x) = A^2 + B_0 (x - \xi)^2 (x - y)^2;$$

questo risultato si può enunciare nel modo seguente:

Teorema 4°. — *Una biquadratica* X(x) *si può in infiniti modi decomporre nella somma dei quadrati di due polinomi di 2° grado in* x, *dei quali uno ha per radici due punti* (ξ, y), *che appartengono l'uno alla terza polare dell'altro rispetto al covariante sestico di* X.

Fissato ad arbitrio ξ, *restano possibili per* y *tre valori; questi si calcolano razionalmente, qualunque sia* ξ, *appena sia risoluta l'equazione invariante* (13), *che è indipendente da* ξ; a questo scopo si trova dapprima λ colla formola (12), dove a l va sostituita una radice della (13) e p_0, p_2 sono calcolati per il valore dato ξ; poi si ricava il valore di t da una qualunque delle (11); infine si ha: $y = \xi + t$.

Per quanto riguarda il polinomio A, esso è espresso da

$$A = \sqrt{p_0}\,(1 + q_1 s + \lambda s^2).$$

È notevole il caso particolare in cui ξ è radice del covariante sestico T della biquadratica data X; allora una delle radici della terza polare di ξ rispetto a T è la stessa ξ; e si ha la scomposizione seguente:

$$X = A^2 + k(x - \xi)^4.$$

Introducendo la variabile $s = x - \xi$, si ha: $q_3 = 0$ [V. N. 9, § 1]. Allora, posto per semplicità $p_0 = 1$, X è della forma:

$$X = (1 + 2\alpha s + \beta s^2)^2 + \gamma s^4, \tag{21}$$

e si ha:

$$q_1 = 2\alpha, \qquad q_2 = \beta, \qquad q_3 = 0, \qquad q_4 = \frac{1}{2}\gamma,$$
$$I = 4(\alpha^2 - \beta), \qquad J = \gamma.$$

Or bene, da quanto si è visto sopra, X si può in tre modi scomporre nella somma di due quadrati della forma:

$$X = A^2 + ks^2(s - t)^2; \tag{22}$$

uno di questi modi, dipendentemente dalla forma (21), già presupposta di X, consiste nell'assumere: $\lambda = \beta$, $k = \gamma$, $t = 0$; di qui si deduce poi lo sviluppo in frazione continua di $\sqrt{X}$ che si è studiato al [N. 14]. Volendo stabilire gli altri due modi di scomposizione, scriviamo l'equazione (18); questa nel nostro caso è:

$$4v^3 + 4(\alpha^2 - \beta)v^2 - \gamma v = 0.$$

Posto: $\delta = \sqrt{(\alpha^2 - \beta)^2 + \gamma}$, le sue radici sono:

$$v = 0, \qquad v' = \frac{1}{2}(\beta - \alpha^2 + \delta), \qquad v'' = \frac{1}{2}(\beta - \alpha^2 - \delta).$$

Assumendo $v = 0$, si ha: $\lambda = q_2 = \beta$ e si ritorna alla (21).

Assumendo $v \neq 0$, la prima delle (17) dà: $u = -\alpha$; quindi:

$$t = -\frac{1}{\alpha}, \qquad \lambda' = q_2 - 2v' = \alpha^2 - \delta, \qquad \lambda'' = q_2 - 2v'' = \alpha^2 + \delta;$$

la (22) è soddisfatta identicamente, in due modi, assumendo:

$$t = -\frac{1}{\alpha}, \qquad A = 1 + 2\alpha s + (\alpha^2 \mp \delta)\, s^2, \qquad k = 2\,(\beta - \alpha^2 \pm \delta).$$

Nel sotto caso $\gamma = 0$, si ha l'identità:

$$(1 + 2\alpha s + \beta s^2)^2 = \{1 + 2\alpha s + (2\alpha^2 - \beta)\, s^2\}^2 + 4\,(\beta - \alpha^2)\, s^2 (1 + \alpha s)^2.$$

Da quanto precede risulta eziandio che, quando $q_3 = 0$ ed al parametro t si dà il valore $-\frac{1}{\alpha} = -\frac{2}{q_1}$, si ha il seguente sviluppo in frazione continua:

$$(23) \qquad \frac{1}{2\sqrt{p_0}}\,\frac{\sqrt{X} - \sqrt{Y}}{s - t} = q_1 + \lambda_0 (s + t) + \frac{v' s^2 |}{|1 + \alpha s} + \frac{v'' s^2 |}{|1 + \alpha s} + \frac{v' s^2 |}{|1 + \alpha s} + \cdots$$

essendo: X della forma (21) e inoltre:

$$t = -\frac{1}{\alpha}, \qquad \sqrt{Y} = \frac{\delta}{\alpha^2}, \qquad \lambda_0 = \alpha^2 + \delta.$$

Ora la frazione continua non solo è periodica, con un periodo di due frazioni parziali, come accade sempre quando $q_3 = 0$ [N. 9], ma di più è simmetrica rispetto ad uno qualunque dei suoi numeratori; inoltre i suoi parametri t_i sono tutti eguali a $-\frac{1}{\alpha}$.

Più particolarmente ancora può essere $v' = v''$ e allora il periodo consta di una sola frazione parziale. Ma in tal caso si ha: $\delta = 0$, $\gamma = -(\alpha^2 - \beta)^2$ ed X ha, come presto si vede, un fattore $1 + 2\alpha s + \alpha^2 s^2$, che è un quadrato esatto; e precisamente il parametro $-\frac{1}{\alpha}$ è radice doppia di X.

5. Quando la frazione continua di Halphen è periodica, col periodo di una frazione parziale. — Il risultato, a cui ora siamo arrivati nell'ipotesi $q_3 = 0$, è vero in generale, cioè:

Teorema. — *Condizioni necessarie e sufficienti, affinchè una frazione continua di* Halphen *sia periodica, col periodo di una*

frazione parziale, sono che il polinomio dato X abbia radice doppia e che il valore di questa si assuma come parametro dell'elemento.

Il teorema è stato dimostrato quando $q_3 = 0$; resta che lo dimostriamo per $q_3 \neq 0$.

Supposto che siano tra loro eguali tutti i coefficienti v e pure tra loro eguali tutti i coefficienti u, ognuno di essi è un coefficiente centrale; allora devono coesistere le due equazioni (a), (b), N. 2 e le due equazioni (c), (d), N. 3 rispetto alle due incognite v, w. Or bene queste 4 equazioni si riducono a 3 indipendenti. Infatti, scrivendole nell'ordine seguente:

$$w - 2v^2 = 0, \tag{24}$$

$$2Jv - q_3^2 + 4vw = 0, \tag{25}$$

$$K - q_3^2 v - w^2 = 0, \tag{26}$$

$$2q_3^2 v - w^2 - Jw - K = 0, \tag{27}$$

moltiplicando ordinatamente i primi membri per q_3^2, w, $2v$, $2v$ e sommando, si ha un risultato identicamente nullo.

Dopo ciò, scriviamo le (25), (27) nel modo seguente:

$$2(2w + J)v = q_3^2, \qquad w^2 + Jw + K = 2q_3^2 v$$

e moltiplichiamole membro a membro, otteniamo:

$$(2w + J)(w^2 + Jw + K) - q_3^4 = 0;$$

osserviamo che questo risultato coincide con quello che si ha derivando la equazione

$$(w^2 + Jw + K)^2 - 2q_3^4 w = 0,$$

e concludiamo che, se il sistema di equazioni (24)-(27) ammette una soluzione (v, w), sarà w radice doppia dell'ultima equazione; questa poi non è altro che la (10), che si deduce trasformando l'equazione $X(t) = 0$ colle sostituzioni:

$$w = q_3 u - q_4, \qquad u = -q_1 - \frac{1}{t};$$

dunque il polinomio X ha radice doppia, e questa è il parametro t.

Che le condizioni del teorema siano sufficienti, si vede subito. Si scrive la frazione continua:

$$\cdots + \frac{vs^2|}{|1 - us} + \frac{vs^2|}{|1 - us} + \cdots,$$

e si pone:

$$Q = \frac{vs^2}{1 - us + Q},$$

donde:

$$Q = -\frac{1}{2}(1 - us) + \frac{1}{2}\sqrt{(1 - us)^2 + 4vs^2}.$$

Segue che, dato un polinomio di 2° grado Ξ scritto nella forma:

$$\Xi = (1 - us)^2 + 4vs^2,$$

per esso si ha lo sviluppo in frazione continua di HALPHEN:

$$\frac{1}{2}\sqrt{\Xi} = \frac{1}{2}(1 - us) + \frac{vs^2 |}{|1 - us} + \frac{vs^2 |}{|1 - us} + \dots$$

la quale è periodica, col periodo di una frazione parziale; mentre il primo membro si può ritenere che sia l'elemento $\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{X} - \sqrt{Y}}{s - t}$, dove X è la biquadratrica $\Xi(s - t)^2$, che ha t per radice doppia, quindi $Y = 0$.

Dalle considerazioni svolte segue che il risultante delle equazioni (24), (25), (26) deve coincidere (a meno di un fattore) col discriminante della biquadratica data; ciò si può verificare. Invero, eliminando w dalle tre equazioni sopradette, si ottengono le due seguenti in v:

$$(28) \qquad 8v^3 + 2Jv - q_3^2 = 0, \qquad 4v^4 + q_3^2 v - K = 0,$$

le quali si ottengono anche dalle [(65), (66) § 1], ponendo in queste $v_{i-1} = v_i = v_{i+1} = v$.

Combinando opportunamente le (28), si ricavano le

$$\begin{aligned} 2Jv^2 - 3q_3^2 v + 2K &= 0, \\ 12\,v^2 + 2Iv - J &= 0, \\ 4Iv^2 - 8Jv + 3q_3^2 &= 0; \end{aligned}$$

si conchiude che il risultante delle (28) è:

$$\begin{vmatrix} 12 & 2I & -J \\ 2I & -4J & \frac{3}{2}q_3^2 \\ -J & \frac{3}{2}q_3^2 & -K \end{vmatrix} = 48KJ - 6IJq_3^2 - 27q_3^4 + 4J^3 + 4I^2K;$$

qui, sostituendo: $4K = J^2 - Iq_3^2$, si vede facilmente che tale risultante (a meno del fattore p_0^6) coincide col secondo membro della [(79), § 1)], che è uguale al discriminante della biquadratica data.

6. Primi casi di periodicità di frazioni continue di Halphen regolari. — In quel che segue supponiamo sempre che la biquadratica data X non abbia radici multiple; per guisa che le frazioni continue di Halphen (regolari) che si considerano non presentano mai il caso di periodicità col periodo di una frazione parziale. Allora abbiamo i teoremi seguenti:

Teorema 1°. — *La condizione necessaria e sufficiente, affinchè una frazione continua regolare abbia un periodo di 2 frazioni parziali, è* $q_3 = 0$.

Che la condizione sia sufficiente si è già stabilito al [N. 9], come conseguenza delle equazioni ricorrenti [(54), (57), § 1]; con queste si mostra altresì che la condizione è sufficiente. Invero supponiamo che esista un periodo di due frazioni parziali, quindi: $v_{i-1} = v_{i+1}$, $u_{i-1} = u_{i+1}$; se nel tempo stesso fosse $q_3 \neq 0$, dalle relazioni:

$$2v_{i-1}\,v_i = q_3 u_{i-1} - q_4\,, \qquad 2v_{i+1}\,v_i = q_3 u_i - q_4,$$

sottraendole, per essere $v_i \neq 0$ e $q_3 \neq 0$, si dedurrebbe: $u_{i-1} = u_i$. Similmente dalle relazioni:

$$u_{i-1} + u_i + q_1 = \frac{q_3}{2v_i}\,, \qquad u_{i+1} + u_i + q_1 = \frac{q_3}{2v_{i+1}}$$

si dedurrebbe $v_i = v_{i+1}$. Si conchiuderebbe: $u_{i-1} = u_i = u_{i+1}$ e $v_{i-1} = v_i = v_{i+1}$, e quindi il periodo sarebbe di una sola frazione parziale, contro l'ipotesi.

Teorema 2°. — *La condizione necessaria e sufficiente, affinchè una frazione continua regolare abbia un periodo di 3 frazioni parziali, è* $K = 0$.

La condizione è sufficiente. — Infatti, quando $K = 0\,(q_3 \neq 0)$, in virtù delle [(66), § 1], si ha:

$$4v_i\,v_{i+1}\,v_{i+2} = -\,q_3^2\,, \qquad 4v_{i+1}\,v_{i+2}\,v_{i+3} = -\,q_3^2\,;$$

donde: $v_i = v_{i+3}$; in modo analogo, facendo uso della [(70) § 1], si dimostra che $u_i = u_{i+3}$.

La condizione è necessaria. — Infatti dalla [(66) § 1] e da quella che se ne ricava scambiando i con $i+1$, se si fa l'ipotesi $v_{i-1}=v_{i+2}$, si deduce $\frac{K}{v_i}=\frac{K}{v_{i+1}}$; similmente dalla [(70) § 1)], se si fa l'ipotesi $w_{i-1}=w_{i+2}$, si deduce $Kw_i=Kw_{i+1}$; quindi, se fosse $K \neq 0$, si avrebbe $v_i=v_{i+1}$ e $w_i=w_{i+1}$; cioè la frazione continua avrebbe un periodo di una sola frazione parziale, contro l'ipotesi.

Esempio:

$$X=16+72s+9s^2-130s^3+177s^4; \qquad t=1;$$

$$\sqrt{Y}=12; \quad q_1=\frac{9}{4}, \quad q_2=-\frac{9}{4}, \quad q_3=1, \quad q_4=\frac{3}{4}; \quad K=0;$$

$$-\frac{1}{8}\,\frac{\sqrt{X}-12}{s-1}+1-\frac{s}{8}=$$

$$=\left|\frac{-s^2}{1-\frac{1}{2}s}\right|+\left|\frac{\frac{1}{8}s^2}{1-\frac{5}{4}s}\right|+\left|\frac{2s^2}{1+\frac{13}{4}s}\right|+\left|\frac{-s^2}{1-\frac{1}{2}s}\right|+\dots.$$

Teorema 3°. — *La condizione necessaria e sufficiente, affinchè una frazione continua regolare abbia un periodo di 4 frazioni parziali, è* $q_3^4-2JK=0$.

Infatti, dalla [(65) § 1] e da quella che se ne ricava scambiando i con $i+2$, sottraendole e facendo l'ipotesi $v_{i-1}=v_{i+3}$, si deduce:

$$[2Jv_iv_{i+2}-q_3^2(v_i+v_{i+2})](v_i-v_{i+2})=0;$$

similmente operando colla [(66) § 1], si deduce:

$$[q_3^2v_iv_{i+2}-K(v_i+v_{i+2})](v_i-v_{i+2})=0;$$

donde si conclude: $2JK-q_3^4=0$, oppure: $v_i=v_{i+2}$.

Inoltre dalla [(71), § 1] e da quella che se ne ricava scambiando i con $i+2$, facendo l'ipotesi $w_{i-1}=w_{i+3}$, si deduce: $2JK-q_3^4=0$, oppure: $w_i=w_{i+2}$.

Ora, se non fosse $2JK-q_3^4=0$, dovrebbero essere insieme $v_i=v_{i+2}$ e $w_i=w_{i+2}$; la frazione continua avrebbe un periodo di 2 frazioni parziali; per l'esistenza di un periodo fondamentale di 4 frazioni parziali è dunque necessario: $2JK-q_3^4=0$. Che questa condizione sia anche sufficiente è facile a vedere;

invero, se la condizione è verificata, combinando le [(65), (66)], si ha:

$$2Jv_{i-1}\, v_{i+1} - q_3^2(v_{i-1} + v_{i+1}) = 0,$$

mentre la [71] dà:

$$w_{i-1}\, w_{i+1} = - K;$$

da queste poi, scambiando i con $i+2$, si deducono altre due equazioni e da tutte e quattro si ricava: $v_{i-1} = v_{i+3}$, $w_{i-1} = w_{i+3}$, donde segue un periodo di 4 frazioni parziali.

Dai teoremi precedenti risulta che, quando è soddisfatta una delle condizioni

$$q_3 = 0\,, \qquad K = 0, \qquad 2JK - q_3^4 = 0,$$

la frazione continua supposta regolare è periodica, con un periodo rispettivamente di 2, 3, 4 frazioni parziali, qualunque siasi il valore che si assegna al parametro t.

Per la periodicità, con un periodo di $r > 4$ frazioni parziali, la condizione dipende anche dal valore del parametro.

7. Primi casi di periodicità di frazioni continue di Halphen **irregolari.** — In quel che segue studieremo il caso in cui questo valore è $t = 0$ (o uno dei valori associati a $t = 0$); ci occuperemo cioè della periodicità delle frazioni continue irregolari. A proposito di queste, ricordiamo i risultati seguenti ottenuti al [§ 2]:

1°) quando $q_3 = 0$ $(q_4 \neq 0)$ [N. 14], la frazione continua è periodica col periodo di una sola frazione parziale irregolare che è:

$$\left.\frac{\frac{1}{2}\, q_4 s^4}{|1 + q_1 s + q_2 s^2}\right| \;;$$

2°) quando $K = 0$ $(q_3 \neq 0)$ [N. 15 d], la frazione continua ha un periodo di 2 frazioni parziali irregolari, che sono:

$$\left.\frac{\frac{1}{2}\, q_3 s^3}{\left|1 - \frac{q_4}{q_3}\, s\right.}\right| + \left.\frac{\frac{1}{2}\, q_3 s^3}{|1 + q_1 s + q_2 s^2}\right| \;;$$

è notevole il sottocaso $K = 0$, $q_2 = 0$; allora $q_1\, q_3 + q_4 = 0$;

X è di 3° grado; questo sottocaso si è incontrato al [N. 13] e al [N. 15 c]; la frazione continua ha un periodo di 1 frazione parziale irregolare, che è:

$$\frac{\frac{1}{2}\, q_3 s^3 \,|}{|\, 1 + q_1 s}.$$

Quando in una frazione continua irregolare consideriamo la periodicità (e supponiamo $q_3 \neq 0$), terremo presenti le proprietà generali esposte ai [NN. 5, 6], colla seguente avvertenza per contare il numero delle frazioni di un periodo: ogni coppia di frazioni irregolari va contata per tre frazioni regolari, nel senso spiegato al [N. 11]. Sia ad es. [3]:

$$X = (x^2 + ax + b)^2 - 4abx;$$

si ha:

$$q_1 = -\frac{a}{b}, \qquad q_2 = \frac{1}{b}, \qquad q_3 = \frac{2a}{b^2}, \qquad q_4 = \frac{2a^2}{b^3},$$

$$J = \frac{2a^2}{b^3}, \qquad K = \frac{4a^2}{b^5}; \qquad \text{e quindi: } 2JK - q_3^4 = 0.$$

La frazione continua, che sviluppa un elemento generico, è periodica con un periodo di 4 frazioni parziali; ma la frazione continua (irregolare), che sviluppa $\sqrt{X}$, ha un periodo di 3 frazioni parziali, due delle quali sono irregolari; ciò che si verifica, applicando la formola [(32) § 2]. Si ha:

$$\frac{q_4}{q_3} = \frac{a}{b}, \qquad v_2 = \frac{1}{b}, \qquad u_2 = \frac{a}{b};$$

e quindi [4]:

$$\frac{1}{2}\left[\sqrt{X} - (b - ax + x^2)\right] =$$

$$= \frac{ax^3 \,|}{|\, b - ax} + \frac{bx^2 \,|}{|\, b - ax} + \frac{ax^3 \,|}{|\, b - ax + x^2} + \frac{ax^3 \,|}{|\, b - ax} + \ldots$$

---

(3) V. Halphen, *F. E.*, t. II, p. 629.

(4) In Halphen il numeratore della 2ª frazione parziale è per errore bx^3 invece di bx^2.

Sui prodotti infiniti

$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots$ e $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\dots$

Nota di ALBERTO TANTURRI

Lo sviluppo del prodotto infinito $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots$, in serie di potenze di x, intuito da EULERO verso l'anno 1741, e da lui adoperato, più volte, senza dimostrazione, negli scritti degli anni immediatamente posteriori, " *est* ", com'egli dice, " *id ipsum quod solida demonstratione confirmare non possum* ", ancora nella Memoria: *Observatio de summis divisorum*, del t. V (1754-55) *Novi Comm. Petrop.*, ma è dimostrato in un'altra, posposta subito a quella, nello stesso t. V. Il 1780, EULERO ne faceva argomento d'un lavoro: *Evolutio producti infiniti in seriem simplicem,* in *Acta Acad. Petrop.*, con due dimostrazioni; una dimostrazione più semplice fu data da LEGENDRE, in uno speciale capitolo della *Théorie des nombres*; cinque dimostrazioni, di cui tre con funzioni ellittiche, son dovute a JACOBI; nè manca qualche dimostrazione recente: e, chi voglia, troverà le indicazioni nelle pag. 76 e 278 del t. I, *Premier volume,* dell'*Encyclop. des Sc. Mathém.*.

In questa Nota, do, prima di tutto, una nuova dimostrazione di quello sviluppo; ed esprimo poi, coi comuni simboli algebrici, il coefficiente del termine generale.

Anche lo sviluppo, in serie di potenze di x, del prodotto infinito $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\dots$, fu studiato da EULERO, che indicò una via indiretta per il calcolo dei coefficienti. Per il calcolo diretto può servir la formula, che chiude questo scritto, e a cui si giunge con una semplice modificazione del procedimento euleriano.

Il teorema di Eulero sul prodotto $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots$

1. — Coi simboli del *Formulario Mathematico*, il teorema di Eulero si può scrivere così:

$$\text{I} \qquad x \epsilon -1\bar{\ }1 . \supset . \Pi[(1-x^n)|n, N_1] = \\ = 1 + \Sigma[(-1)^n x^{n(3n-1)/2}(1+x^n)|n, N_1].$$

Si legge: " se x è un numero reale, minore, in valore assoluto, di 1, il prodotto infinito $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots$ è uguale alla serie

$$1 - x(1+x) + x^5(1+x^2) - x^{12}(1+x^3) + \ldots \text{"}.$$

Gli esponenti dei fattori x esterni alle parentesi sono i numeri pentagonali: 1, 5, 12, 22, 35, ...; cioè del tipo $n(3n-1)/2$, quando n varia nella classe dei numeri naturali (: 1, 2, 3, ...).

2. — Come Legendre, parto dal teorema: " se x è un numero reale, minore, in valore assoluto, di 1, il prodotto infinito $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots$

$$= 1 - x/(1-x) + x^3/(1-x)(1-x^2) - \\ - x^6/(1-x)(1-x^2)(1-x^3) + \ldots;$$

dove gli esponenti dei numeratori sono i numeri triangolari ": teorema che discende da uno più generale, dato da Eulero con una dimostrazione semplicissima (*).

(*) Se x e z sono numeri reali, e x è minore, in valore assoluto, di 1:

$$(1+xz)(1+x^2z)(1+x^3z)\ldots \\ = 1 + x/(1-x) \times z + x^3/(1-x)(1-x^2) \times z^2 + x^6/(1-x)(1-x^2)(1-x^3) \times z^3 + \ldots.$$

Eulero pone che il primo membro $= 1 + Pz + Qz^2 + Rz^3 + \ldots$; e, mutando z in xz nell'uguaglianza così ottenuta, determina i coefficienti P, Q, R, ... V. *Introductio in analysin infinitorum*, 1748, t. I, p. 258.

Decompongo convenientemente i fattori $1/(1-x)$, $1/(1-x^2)$, $1/(1-x^3)$, ..., dei termini secondo, terzo, quarto, ..., della serie; scrivendola, per l'appunto, così:

$$1 - x \times \{ 0 + x^0 \times (1+x) + x^2/(1-x) \times 1 \}$$
$$+ x^3/(1-x) \times \{ 1 + x^2 \times (1+x^2)(1-x) + x^3/(1-x^2) \times [1 + x^3(1-x)] \}$$
$$- x^6/(1-x)(1-x^2) \times \{ [1 + x^3(1-x)] + x^6 \times (1+x^3)(1-x)(1-x^2)$$
$$+ x^4/(1-x^3) \times [1 + x^4(1-x) + x^8(1-x)(1-x^2)] \} + \ldots .$$

Osservo che, per ciascuna graffa, il prodotto del fattore esterno per il terzo dei tre termini interni, si distrugge col prodotto del fattore esterno per il primo dei tre termini interni alla graffa seguente; e concludo che quella serie

$$= 1 - x \times x^0 \times (1+x) + x^3 \times x^2 \times (1+x^2) - x^6 \times x^6 \times (1+x^3) + \ldots .$$

Nel termine generale, il fattore esterno alla parentesi

$$= x^{n(n+1)/2} \times x^{n(n-1)}, \qquad \text{cioè a} \qquad x^{n(3n-1)/2};$$

e così il teorema è dimostrato.

3. — Qui do, in generale, la decomposizione su cui posa il ragionamento precedente.

Sia perciò x un numero reale diverso da 1. Se

$$P_1 x = 0, \qquad P_2 x = 1,$$

e, per ogni numero naturale, n, maggiore di 2,

$$P_n x = 1 + x^n(1-x) + x^{2n}(1-x)(1-x^2) + \ldots$$
$$+ x^{(n-2)n}(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^{n-2}),$$

allora, per ogni numero naturale n:

$$(a) \qquad 1/(1-x^n) = P_n x$$
$$+ x^{n(n-1)} \times (1+x^n)/(1-x^n) \times (1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^n)$$
$$+ x^{n+1}/(1-x^n) \times P_{n+1} x .$$

La (a) è evidente quando $n=1$. In ogni altro caso:

$$\begin{aligned} P_n x - P_{n+1} x \times x = [&(1-x) + x^n (1-x)(1-x^2) + \\ &+ x^{2n}(1-x)(1-x^2)(1-x^3) + \dots \\ &+ x^{(n-2)n}(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^{n-1})] \\ &- x^{n^2}(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^{n-1}). \end{aligned}$$

E poichè la parentesi quadra, moltiplicata per x^n, dà: $P_n x - 1 +$ il prodotto per x^n del suo ultimo termine, potrò scrivere che:

$$\begin{aligned} (P_n x - P_{n+1} x \times x) x^n = P_n x - 1 + x^{(n-1)n} \times (1-x)(1-x^2)\dots(1-x^{n-1}) \\ - x^{n(n+1)} \times \quad \text{''} \quad \text{''} \quad \text{''} \quad . \end{aligned}$$

Negli ultimi due termini metto ora in evidenza il fattor comune

$$x^{n(n-1)}(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^{n-1});$$

e trasporto poi il termine -1, isolandolo nel primo membro. Avrò una relazione; dalla quale, semplificando, e dividendo per $1-x^n$, si ottiene la (a).

I coefficienti dello sviluppo euleriano.

4. — Si consideri l'espressione $n(3n-1)/2$: la quale dà un numero naturale, i, quando n sia un numero naturale col segno; e, per l'appunto, quando:

$$\text{dà} \quad \begin{array}{l} n = \dots -3 \quad -2 \quad -1 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \dots, \\ i = \dots \quad 15 \quad 7 \quad 2 \quad 1 \quad 5 \quad 12 \dots. \end{array}$$

E si ponga $A_i = (-1)^{n-1}$, per ognuno di questi i: 1, 2, 5, 7, 12, 15, ...; e, per ogni altro numero naturale, i, si ponga $A_i = 0$. In simboli:

$$\text{II} \left\{ \begin{array}{l} i \in N_1 . \quad \exists (\pm N_1) \frown n \ni [i = n(3n-1)/2] . \supset . A_i = (-1)^{n-1} \\ \text{''} \; . \sim \quad \text{''} \quad \text{''} \quad \text{''} \quad . \supset . \text{''} = 0 \qquad \text{Def.} \end{array} \right.$$

Al posto di $\pm N_1$, si può leggere il simbolo n dei numeri interi col segno (: ..., -2, -1, 0, 1, 2, ...): e i numeri 1, 2, 5, 7,

12, 15, ..., sono, del resto, i numeri del tipo $n(3n\mp1)/2$, quando n varia nella classe dei numeri naturali.

Allora la I si può scrivere così:

$$\text{III} \qquad x\epsilon -1^{-}1 \,.\, \supset .\, \Pi[(1-x^n)|n, N_1] = 1 - \Sigma(A_i x^i | i, N_1)$$
$$= 1 - A_1 x - A_2 x^2 - A_3 x^3 - A_4 x^4 - A_5 x^5 - \ldots$$

I numeri A_i si presentano, come accenneremo appresso, nella teoria della partizione dei numeri; e anche in quella della divisibilità (*): e qui li esprimo cogli ordinari simboli algebrici, e col simbolo $\in$, definito dalla:

$$\text{IV} \qquad x\epsilon q \,.\, \supset .\, \in x = Ex + E(-x) + 1 \qquad \text{Def.};$$

la quale dice che, se x è un numero reale, $\in x = 1$ o a 0, secondochè x è un numero intero o no.

5. — Sia perciò i un numero naturale.

Comincio dall'osservare che, se esiste un numero naturale, n, tale che $i = n(3n-1)/2$, $24i+1$ è un quadrato perfetto, come numero successivo dell'ottuplo d'un numero triangolare; precisamente, $=(6n-1)^2$: e, parimenti, se esiste un numero naturale n, tale che $i = n(3n+1)/2$, $24i+1$ è un quadrato perfetto; che $= 6(n+1)^2$. Reciprocamente, se $24i+1$ è uguale al quadrato d'un numero naturale k, necessariamente dispari, $24i = (k-1)(k+1)$; e quindi, scrivendo h al posto di $(k-1)/2$, $6i = h(h+1)$: cioè $3i$ è un numero triangolare, che, come multiplo di 3, sarà del tipo $3n(3n-1)/2$, o del tipo $3n(3n+1)/2$; il che ci dà per i il tipo $n(3n-1)/2$, o il tipo $n(3n+1)/2$, quando, s'intende, n varia nel campo dei numeri naturali. In una: $24i+1$ è un quadrato perfetto, solo quando i è del tipo $n(3n\mp1)/2$.

(*) Per l'appunto, la "*lex mirabilis*", scoperta da Eulero in un lavoro che ho già citato, dice che, se Sn è la somma dei divisori del numero naturale n:

$$Sn = S(n-1) + S(n-2) - S(n-5) - S(n-7) + S(n-12) + \ldots = \sum_1^n{}_i A_i S(n-i);$$

avvertendo però, come dice Eulero, che $S(n-n) = n$.

Come conseguenza: il valore assoluto di $A_i = \in[\sqrt{(24i+1)}]$; perchè questa funzione $= 1$ o a 0, secondochè i è o no del detto tipo.

Riman da determinare il segno. Esso è $+$, se $i = 1$ o a 2; è $-$, se $i = 5$ o a 7; è $+$, se $i = 12$ o a 15; .... Vale a dire: è $+$, se $\sqrt{(24i+1)} = 5$ o a 7; è $-$, se quella radice $= 11$ o a 13; è $+$, se la stessa radice $= 17$ o a 19; ...: cioè, in breve, è $+$ o $-$, secondochè è pari o dispari il numero intero $E\{[\sqrt{(24i+1)} - 5]/6\}$.

Concludo:

$$\text{V} \qquad i \in N_1 \,.\, \supset \,.\, A_i = (-1)^{E\{[\sqrt{(24i+1)}-5]/6\}} \in [\sqrt{(24i+1)}] \quad (*).$$

6. — Appresso, servirà lo sviluppo, in serie di potenze di x, del prodotto infinito $(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)\ldots$; che si deduce subito dallo sviluppo precedente. Le potenze dispari di x avranno per coefficiente zero; e le pari, $x^2, x^4, x^6, \ldots$, avranno per coefficienti $A_1, A_2, A_3, \ldots$ Se poniamo dunque:

$$\text{VI} \qquad i \in N_1 \,.\, \supset \,.\, B_i = \text{rest}\,(i+1, 2) \times A_{E(i/2)} \qquad \text{Def.},$$

potremo scrivere:

$$\text{VII} \qquad x \in -1^{\frown}1 \,.\, \supset \,.\, \Pi[(1-x^{2n}) \,|\, n, N_1] = 1 - \Sigma(B_i x^i \,|\, i, N_1).$$

(*) Il numero A_i è l'i^{mo} termine della tabella

```
1 1
0 0  -1 0  -1
0 0   0 0   1 0 0 1
. . . . .
```
,

la legge della quale si scrive facilmente. Cominciando dall'esprimere l's^{mo} termine dell'r^{mo} rigo, si può dimostrare la proposizione:

$$i \in N_1 \,.\, r = E\{[5 + E\sqrt{(24i-23)}]/6\} \,.\, s = i - (r-1)(3r-2)/2 \,.\, \supset \,.$$
$$A_i = (-1)^{r-1}\{\in[(s+1)/2r] + \in[(s+1)/3r]\}.$$

Sullo sviluppo di $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\dots$

7. — Poniamo le definizioni:

VIII $n \,\varepsilon\, \mathrm{N}_1 \,.\, \supset .$

$\mathrm{G}\,n = \mathrm{num}\,[\mathrm{Cls'N}_1 \cap x \ni (\mathrm{num}\, x \,\varepsilon\, \mathrm{N}_1 \,.\, \Sigma x = n)]$.

$\mathrm{G}'n = $ „ $\{(\mathrm{N}_0 \mathrm{F} 1 \cdots n)\, \mathrm{cres}_0 \cap x \ni [\Sigma(x, 1 \cdots n)] = n\}$ Def.

Cioè: “ se n è un numero naturale, Gn è il numero delle classi (non vuote), formate da numeri naturali, distinti, e aventi per somma n; e G$'n$ è il numero delle soluzioni in interi x della

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = n,$$

con la condizione:

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$$ „ (*).

Poniamo inoltre: $\mathrm{G}0 = \mathrm{G}'0 = 1$.

Allora (v. Eulero, *Introductio,* t. I, pag. 255 e 270):

IX $x \,\varepsilon\, -1\,\overline{\ }\,1 \,.\, \supset .\ \Pi[(1+x^n)\,|\,n, \mathrm{N}_1] = \Sigma[(\mathrm{G}n \times x^n)\,|\,n, \mathrm{N}_0]$.

$1/\Pi[(1-x^n)\,|\,n, \mathrm{N}_1] = \Sigma[(\mathrm{G}'n \times x^n)\,|\,n, \mathrm{N}_0]$.

Quest'ultima uguaglianza dice che, se x è un numero reale, minore, in valore assoluto, di 1, la funzione fratta $1/(1-x)$

(*) Con parole di Eulero, Gn “ *indicat quot variis modis numerus* n *ex terminis diversis Seriei* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, etc., *per additionem emergere possit: ubi notandum est numerum propositum ipsum simul computari debere, quia numerus terminorum non definitur, ideoque unitas inde non excluditur* „. E G$'n$ “ *indicat quot variis modis numerus* n *per additionem ex numeris integris oriri queat* „.

Il numero G$'n$, al quale Eulero dà importanza preponderante, ha pure altri significati. È il numero delle soluzioni, in interi y da 0 a n, della $y_1 + 2y_2 + \dots + ny_n = n$. È il numero dei modi nei quali $n + n(n+1)/2$ può esser diviso in n parti disuguali; è il numero dei modi nei quali $2n$ può esser diviso in n parti disuguali o uguali: anzi, se p è un qualunque intero non minore di n, è il numero dei modi nei quali $n + p(p+1)/2$ può esser diviso in p parti disuguali, ovvero il numero dei modi nei quali $n+p$ può esser diviso in p parti disuguali o uguali.

$(1-x^2)(1-x^3)\ldots$, ossia $1/(1-A_1x-A_2x^2-A_3x^3-\ldots)$, è uguale alla serie: $G'0+G'1\times x+G'2\times x^2+G'3\times x^3+\ldots$; che si può pensare come una serie ricorrente d'ordine infinito. Sarà: $A_1, A_2, A_3, \ldots$, la scala di relazione, secondo la nomenclatura adottata da EULERO; cioè:

$$G'1=A_1G'0,$$
$$G'2=A_1G'1+A_2G'0,$$
$$G'3=A_1G'2+A_2G'1+A_3G'0, \ldots; \text{ e in generale:}$$

X $$n\,\epsilon\,N_1 \,.\, \supset \,.\, G'n=\Sigma\,[A_iG'(n-i)\,|\,i, 1\cdots n].$$

Così, per l'appunto, si calcolano i successivi numeri $G'n$.

8. — Venendo ai numeri Gn, EULERO li deduce dai $G'n$, servendosi della semplicissima relazione:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\ldots=(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)\ldots \times 1/(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots,$$

che è valida per ogni numero reale compreso tra -1 e $+1$. Sviluppo il primo membro con la IX, e i due fattori del secondo membro con la VII e la IX; immagino eseguito il prodotto, e uguaglio i coefficienti delle potenze uguali di x. Avrò (v. *Introductio*, t. I, pag. 272):

XI $$n\,\epsilon\,N_1 \,.\, \supset \,.\, Gn=G'n-\Sigma\,[B_iG'(n-i)\,|\,i, 1\cdots n] =\Sigma\,[(A_i-B_i)\,G'(n-i)\,|\,i, 1\cdots n].$$

Ma gli stessi numeri si possono ottenere, direttamente, con lo stesso procedimento, dalla:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\ldots\times(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots =(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)\ldots;$$

ricorrendo alla IX, alla III, e alla VII. Si avrà subito:

XII $$n\,\epsilon\,N_1 \,.\, \supset \,.\, Gn=\Sigma\,[A_iG(n-i)\,|\,i, 1\cdots n]-B_n.$$

Influenza del movimento di uno specchio o della sorgente sulla propagazione della luce

Nota del Socio nazionale residente QUIRINO MAJORANA

---

1. Premessa. — La velocità di propagazione della luce, emessa da una sorgente fissa sulla superficie della terra, apparisce costante in tutte le direzioni, malgrado il movimento della terra di circa 30 Km. a 1″, lungo l'eclittica, e quello di tutto il sistema solare. Ciò risulta dalla classica esperienza di Michelson e Morley, che fu il punto di partenza per la formulazione della teoria della relatività ad opera di Lorentz, Einstein, Minkowski.

Questa teoria, che, dopo aver subìto una crisi, sembra ora risorgere fondandosi su più solide basi, ammette appunto il postulato della costanza assoluta della velocità di propagazione della luce nel vuoto, indipendentemente da qualsiasi contingenza di moto traslatorio uniforme della sorgente e dell'osservatore. Tale postulato non scaturisce però, necessariamente e con pieno rigore logico, dai fatti sperimentali osservati; ma piuttosto esso è una ardita ipotesi che, reciprocamente, dà ragione dei fatti stessi. In altri termini, non è da escludersi che altra teoria sorga al posto di quella relativistica, e che sia capace di interpretare i fenomeni da noi osservati. Certamente, se ciò accadesse, e se la nuova teoria fosse tale, p. e., da non modificare la meccanica di Newton, essa sarebbe ben più accetta.

Da ciò si deduce, prescindendo da osservazioni di carattere astronomico, la opportunità di ricerche sperimentali che possano in un caso offrire controllo, o meglio prova assoluta del postulato suddetto; od, in caso contrario, condurre al rigetto di questo. Disgraziatamente è ben difficile tanto l'immaginare, quanto l'attuare tali esperienze. La essenza della teoria relati-

vistica è tale che questa, sinora, si adatta a tutto ciò che noi osserviamo, senza che si possa essere indotti a ritenerla del tutto indispensabile. Peraltro, anche se qualche esperienza può immaginarsi, essa o è intraducibile praticamente, per la impossibilità di prescindere da talune contingenze alle quali forzatamente dobbiamo adattarci, come la velocità del nostro sistema planetario, o l'eventuale ed incognita azione del campo di attrazione della terra e di tutto il sistema planetario; od, in ogni caso, la sua attuazione è particolarmente difficile, giacchè essa conduce alla necessità di osservare e misurare effetti almeno del prim'ordine, cioè dipendenti dal rapporto $\frac{v}{c}$ fra la velocità di corpi materiali e quella della luce. Inoltre, se in certi casi (come quando la velocità relativa tra osservatore o sorgente non è nulla e può venir cambiata a piacimento) quel rapporto entra nelle formule con la prima potenza, in altri (come nell'esperienza di Michelson e Morley) si tratta di misurare effetti dipendenti da v^2/c^2, il che è estremamente difficile.

Partendo dalle precedenti considerazioni, da circa due anni ho intrapreso una serie di ricerche le quali hanno per iscopo lo studio della velocità di propagazione della luce, quando *artificiali contingenze di moto* affettano variamente la materia necessaria alla *emissione*, *propagazione* ed eventualmente alla *osservazione* della luce. Ma sinora, di questi tre casi soltanto i primi due sono stati da me studiati; ed anzi il loro studio non è ancora terminato. Quando non mi sarà più possibile procedere oltre in esso, forse in causa di difficoltà sperimentali eccessive, o di impossibilità pratiche, vedrò se anche il terzo caso sia passibile di qualche controllo sperimentale, quantunque io ritenga essere il problema, sotto tal riguardo, assai più arduo. A chiarire il programma delle mie ricerche, è appena il caso di osservare che quando parlo di contingenze di moto intendo riferirmi a moto traslatorio uniforme. Si sa infatti che sull'esistenza del *moto rotatorio assoluto* non è possibile alcun dubbio, anche per quanto riguarda i fenomeni luminosi. Così ci si rende conto, p. e., dell'esperienza di Sagnac con l'interferografo rotante, e ciò tanto ammettendo la teoria dell'etere, come quella della relatività. Nelle esperienze che descriverò mi servirò, è vero, di congegni rotanti, ma la loro funzione si limita a lasciare

osservare effetti dipendenti dalla traslazione periferica istantanea di qualche congegno, messo appunto in rotazione. Con esse ho avuto sinora di mira lo studio dell'influenza del moto di una superficie riflettente o della sorgente, sulla velocità di propagazione della luce. E passo senz'altro a indicarne il principio, i particolari ed i risultati.

2. Principio della ricerca. — Consideriamo una sorgente luminosa S (fig. 1) emettente onde di lunghezza λ e di frequenza n, che si muova con velocità v verso l'osservatore fisso O. Supponiamo dapprima che le onde si trasmettano a traverso un etere fisso. Le n onde emesse in $1''$ si troveranno distribuite nel tratto $S'A = c - v$.

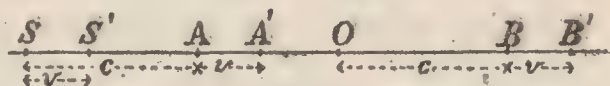



Fig. 1.

Nello stesso tempo arriveranno ad O tutte le onde n' entranti nel tratto $OB = c$, per cui $(c - v)/n = c/n'$; ossia $n' = nc/(c - v)$. Facendo $v/c = \beta$, e trascurando i termini superiori al primo in β, si ha $n' = n(1 + \beta)$.

La nuova lunghezza d'onda si ottiene tenendo conto che $c = n\lambda = n'\lambda'$, per cui $\lambda' = \lambda(1 - \beta)$.

Facciamo invece un'ipotesi di carattere balistico od emissivo, secondo cui la velocità della luce si verrebbe a sommare con quella della sorgente. In un secondo le n onde emesse da S si troveranno distribuite nel tratto $S'A' = c$; e in un tempo eguale arriveranno in O, n' onde che verranno a distribuirsi nel tratto $OB' = c + v$. Per cui $c/n = (c + v)/n'$, ossia $n' = n(1 + \beta)$. Tenendo conto poi che $c + v = n'\lambda'$, si vede che esattamente $\lambda' = \lambda$.

Per cui, mentre per quanto concerne la frequenza si arriva alle stesse conclusioni (salvo i termini in β^2) tanto con l'ipotesi eterea che con quella balistica, per la lunghezza d'onda si avrebbero valori diversi nelle due ipotesi, e tali valori differirebbero per un termine del primo ordine in β.

Supponiamo ora di aver realizzato un metodo per la misura dell'effetto Doppler. Se esso è basato sull'osservazione di fenomeni dipendenti dal variato valore della lunghezza d'onda, come avviene nei casi di interferenza o di diffrazione, l'ipotesi dell'etere fisso, od anche la teoria della relatività porterebbero ad un risultato positivo; l'ipotesi balistica, pur conducendo an-

ch'essa ad ammettere la variazione della frequenza, non darebbe risultato apprezzabile (salvo i termini in β^2).

Osservazioni astronomiche varie sono state eseguite da tempo sull'effetto Doppler, e ciò tanto servendosi di prismi quanto di reticoli di diffrazione. Inoltre, in laboratorio, l'effetto Doppler è stato verificato da Belopolski, Galitzin e Wilip, con specchi in moto, da Stark e Paschen con i raggi canale. Più recentemente, altre verifiche sono state ottenute ad opera di Michelson e di Fabry e Buisson (1).

Mancavano sinora, a quanto mi consta, esperienze dirette sull'influenza del moto della sorgente. Prescindendo dai lavori citati, che non lasciano alcun dubbio sul fatto sperimentale della nessuna influenza del moto di una superficie riflettente sulla velocità della luce, ho voluto realizzare una disposizione capace di mettere in evidenza il cambiamento di lunghezza d'onda dovuto all'effetto Doppler, e che è indizio di quel fatto; di tale disposizione mi servo, oltre che per controllare l'effetto dello specchio mobile, per studiare una sorgente in moto.

Per sorprendere il mutato valore di λ, mi sono servito di un metodo interferenziale con ordine di interferenza assai elevato, analogamente a quanto avviene negli apparecchi usati per la spettroscopia interferenziale.

Ma è chiaro che così operando, e volendo ottenere risultati netti, occorre una sorgente di luce il più possibilmente monocromatica; in caso diverso non sarebbe possibile alcuna osservazione di fenomeni di interferenza. Inoltre, per le ragioni che si comprenderanno in seguito, la stessa sorgente deve possedere un grado di intensità luminosa notevole. Fortunatamente, si può disporre di una sorgente (e forse di una sola) che soddisfi a questa duplice condizione: il vapore di mercurio a bassa pressione, reso incandescente elettricamente ed esaminato nella sua riga verde. Per di più questa riga è tanto intensa rispetto alle altre emesse dallo stesso vapore, da rendere spesso non neces-

(1) MICHELSON, *Effect of reflection from a moving mirror on the velocity of light*, " Astrophysical Journal ", XXXVII, p. 190, 1913. FABRY et BUISSON, *Vérification expérimentale du principe Doppler-Fizeau*, " C. R. ", 158, p. 1498, 1914. Questi lavori, condotti con metodi differenti, sono venuti a mia conoscenza solo dopo la pubblicazione di una parte delle mie ricerche.

saria la soppressione di quelle, mediante assorbimento o rifrazione. Questa sorgente, in una prima serie di esperienze, era fissa, e la sua luce riflessa da specchi mobili ed esaminata con l'apparecchio interferenziale. Nelle esperienze più recenti da me eseguite ho poi, con questo stesso apparecchio, esaminato quella stessa sorgente, posta in rapido movimento.

3. La sorgente luminosa. — Affinchè il vapore di mercurio incandescente emetta radiazioni della maggior purezza possibile, occorre operare a pressione bassa; donde l'opportunità di servirsi di tubi a gas rarefatti. Ora di questi (per il caso del mercurio) ve ne sono di due specie; quelli che funzionano al passaggio di una scarica elettrica brusca, come i tubi di Geissler, e quelli in cui un vero arco voltaico si forma sotto bassa tensione (almeno 70 volt). Michelson, nell'esame minuto delle varie sorgenti luminose fatto in occasione del campionamento del metro in lunghezze d'onda (1), adopera tubi a vuoto della prima specie. Ma così operando ci si deve accontentare di una luminosità relativamente debole, od altrimenti, con scariche più intense, si rischia di sciupare rapidamente i tubi di scarica. Ho inoltre osservato che eccitando i tubi di scarica con rocchetto munito di condensatori al secondario, si ha effettivamente un effetto luminoso assai brillante, ma le radiazioni emesse non rispondono più alle condizioni di purezza richieste dalle presenti ricerche. Questo fatto va interpretato pensando alle mutate condizioni di temperatura, e per conseguenza anche di pressione, del vapore eccitato in cosifatta guisa.

Ora nelle esperienze di Michelson la intensità luminosa aveva, relativamente, poca importanza, trattandosi di osservazioni fatte con congegni fissi. Qui si deve provvedere ad accrescere quella intensità, giacchè di essa, per le speciali modalità delle esperienze attuali, solo una piccola parte arriva all'occhio dell'osservatore. Per cui, dopo varii infruttuosi tentativi con tubi di scarica azionati da rocchetti, ho scelto come sorgente quella dell'arco voltaico fra elettrodi di mercurio, nel vuoto.

---

(1) *Travaux et Mémoires*, b. int. p. et m. XI, 1895.

Il modello di lampada da me impiegato è costituito da un'ampolla o tubo di vetro contenente mercurio, a due o tre elettrodi *A*, *B*, *E* (fig. 2), da cui è stata estratta l'aria sino ad una pressione di circa quattro millesimi di m/m di mercurio. Durante la vuotatura il tubo è tenuto quasi alla temperatura di ebollizione del mercurio, per cui il valore vero, a freddo, di quella pressione risulta molto minore. La quantità di mercurio contenuta dal tubo, è tale da poter ricoprire gli elettrodi *A*, *B* quando esso è posto con tali elettrodi in basso. Quando il tubo è posto in circuito con corrente continua a 70 v. e con una resistenza di circa 20 ohm, basta scuoterlo lievemente, per portare in contatto i due serbatoi di mercurio ed eccitare l'arco. Ma in certi modelli di tubo, e più propriamente in quelli che effettivamente portano il terzo elettrodo *E*, la quantità di mercurio è ridotta alquanto e si eccita l'arco con scarica sussidiaria di un rocchetto d'induzione.

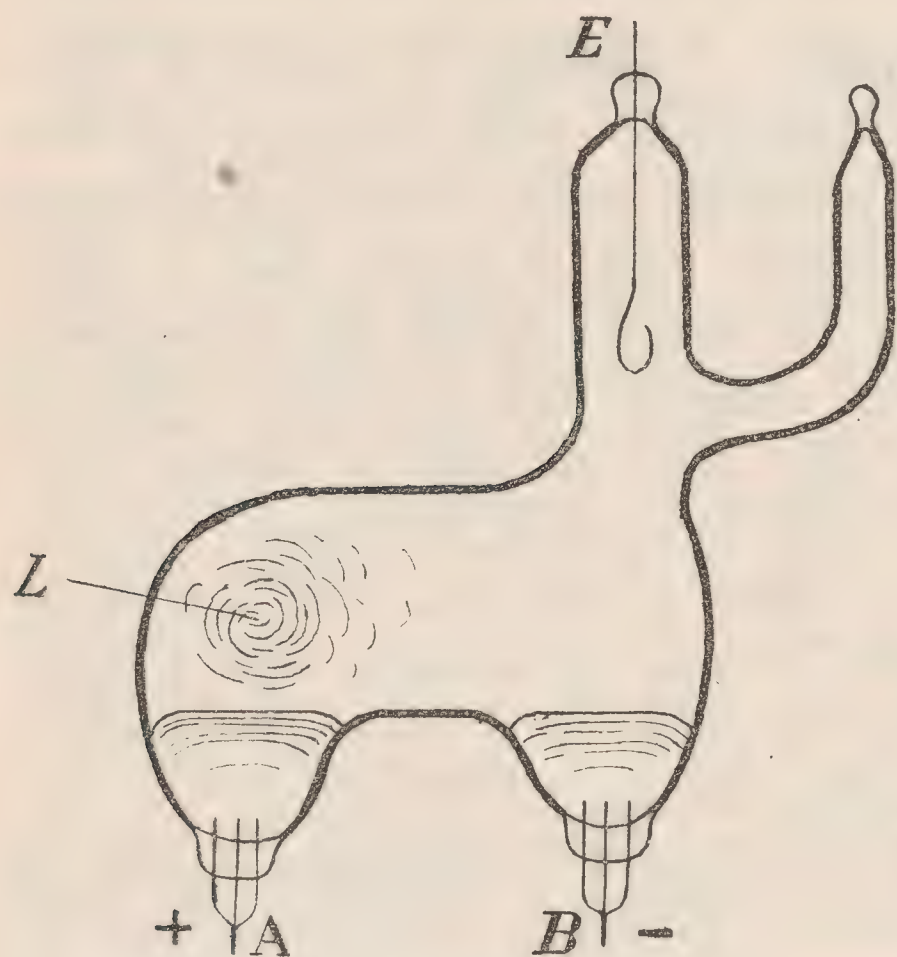



Fig. 2.

Quando il tubo è eccitato, si forma un focolare luminoso principalmente in vicinanza del polo positivo, in *L*; per cui questo lato è di preferenza rivolto verso l'interferometro.

Se la sorgente, così costituita, è destinata a rimaner fissa, non occorre sia notevolmente piccola; il tubo, sfornito di terzo elettrodo *E*, ha una dimensione massima di 7 od 8 cm.; il suo peso è di circa 200 gr. Ma se la sorgente deve essere posta in moto, anche per ridurre la massa di mercurio, la dimensione massima è di 3 o 4 cm., il suo peso non più di 35 gr.

4. L'interferometro. — Esso è quello di Michelson. Quantunque per lo scopo attuale non sarebbe stato necessario adoperare due raggi interferenti propagantisi in direzioni normali,

ho preferito servirmi di questo apparecchio, per la comodità del suo uso, e per la facilità con cui esso si presta al cambiamento della differenza di cammino fra i raggi interferenti. Esso è indicato schematicamente nella figura 3. S_1, S_2 sono specchi completamente argentati, ed S_3 parzialmente sulla faccia superiore. C è il cannocchiale con un micrometro oculare, il cui ingrandimento è di solo 2 diametri circa. Come si vede, è abolita la lamina di vetro compensatrice non argentata dell'originale apparecchio di Michelson; essa, nel caso della figura, dovrebbe essere posta parallelamente a S_3, fra questa ed S_1. Ma dovendo misurare sempre delle differenze di cammino nell'aria, mi son limitato a determinare lo spostamento fra la posizione dello specchio S_1 segnata in figura, e l'altra P per cui appariscono le frangie anche in luce bianca, e quindi colorate. P è la posizione simmetrica otticamente di S_2 rispetto alla faccia lievemente argentata di S_3; la distanza $S_1 P$ rappresenta la metà della differenza di cammino dei raggi interferenti. Ciò non è esatto per tutte le lunghezze d'onda, in conseguenza della dispersione di S_3. Ma per le presenti ricerche le incertezze derivanti da ciò non sono da temersi. Inoltre, come sarà detto, senza adoperare la lamina compensatrice, ho potuto procedere alla misura dello spostamento delle frangie con l'approssimazione di circa l'1 $^0/_0$, più che sufficiente allo scopo delle attuali ricerche.

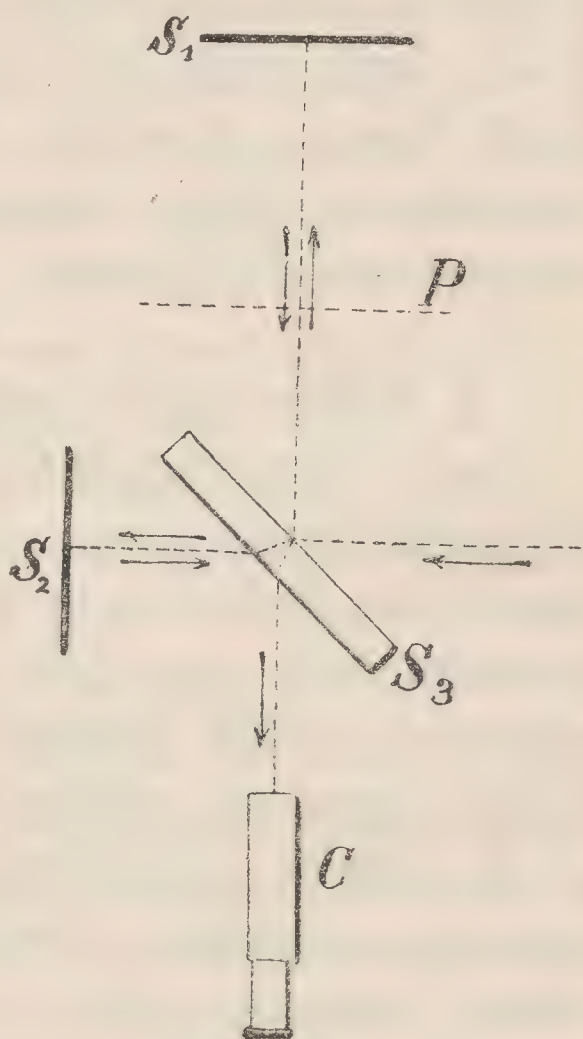



Fig. 3.

L'apparecchio in parola fu da me ottenuto trasformando opportunamente una buona macchina da dividere; la vite di questa (passo 1 m/m) serve ad ottenere gli spostamenti dello specchio S_1. I tre specchi S_1, S_2 ed S_3 furono scelti fra le parti costituenti altri apparecchi ottici; l'esattezza di lavorazione delle loro faccie è otticamente perfetta, non presentando che errori inferiori a $^1/_{10}$ di λ circa. La posizione e l'orientamento di ciascuno di S_1, S_2, S_3 possono regolarsi manovrando

le viti micrometriche, contrastate da robuste molle, che sostengono ciascuna lamina di vetro (tre per lamina).

A vero dire questo, istrumento, così preparato, offre l'inconveniente di una non grande esattezza del banco di ghisa rettilineo su cui scorre S_1, comandato dalla vite. Adoperandolo infatti si è costretti a ritoccare continuamente la posizione di S_2, perchè la sua immagine risulti coincidente o parallela ad S_1. Ma in ogni modo non si hanno mai salti bruschi nell'aspetto delle frangie spostando S_1, e si può, con un po' di pazienza, mantener quelle in buone condizioni di visibilità, man mano che la posizione di S_1 muta.

5. Esame della sorgente in quiete con l'interferometro. — Esaminiamo anzitutto la luce dell'arco fra mercurio con l'interferometro. Come si è detto, la intensità luminosa della riga verde (0,546 μ) di questa sorgente è talmente forte rispetto a quella delle due righe gialle, e della bleu, da rendere praticamente inutile qualsiasi artificio per filtrarla da queste: le frangie appaiono nettamente, quando si proiettino direttamente su S_3 tutte le radiazioni emesse dal tubo. Solo è adoperato un opportuno sistema di lenti, per render queste sensibilmente parallele. Qualche volta ho interposto sul loro percorso delle vaschette contenenti soluzioni acquose di cromato potassico (per assorbire la riga bleu) e di cloruro di nichel o meglio di rame (per assorbire le gialle). Ma il vantaggio è stato con ciò minimo; anzi, talvolta, questo artificio è stato riconosciuto dannoso, giacchè inevitabilmente esso conduceva ad indebolimento anche della intensità luminosa della riga verde. Meno opportuno poi sarebbe stato l'uso di prismi, per cercar di separare per rifrazione questa riga dalle altre; infatti essa è troppo vicina alle due righe gialle, perchè la separazione possa avvenire facilmente e senza eccessiva perdita di luce. E per il carattere di queste ricerche occorre evitare possibilmente ciò.

Ho così incominciato a cercar di determinare la *curva di visibilità* delle frangie circolari osservate col cannocchiale puntato all'infinito, quando la differenza di cammino fra i due raggi interferenti varia. Questa differenza, che è uguale a due volte la distanza PS_1, si misura agevolmente sull'interferometro mediante una scala laterale, partendo dalla posizione delle frangie

colorate, in luce bianca. Ho tenuto presenti in questa ricerca i risultati di Michelson. Come è noto, questo fisico trova per la riga verde del mercurio la curva di visibilità più lunga che con qualsiasi altra sorgente (1), quantunque la struttura di essa sia molto complessa. Persino con una differenza di cammino $l = 40$ cm., sarebbe ancora possibile osservare le frangie; ma effettivamente, con la mia disposizione, non ho potuto mai verificar ciò. Questo risultato può in parte dipendere dalle imperfezioni costruttive del mio interferometro, quali quelle che riguardano la lavorazione del banco di scorrimento, le viti di orientamento degli specchi, l'argentatura di questi. Ma, più probabilmente, esso devesi attribuire alla diversità della sorgente da me usata, nella quale, cioè, il vapore di mercurio è eccitato con arco elettrico, anzichè con le scariche brusche di un rocchetto d'induzione. Michelson fa vedere infatti che la curva di visibilità nel suo caso varia notevolmente con la pressione interna del tubo stesso, tanto che p. e. con $l = 232$ m/m si ha un massimo di visibilità per pressione bassissima, e, contrariamente, un minimo per la pressione di 2 m/m. Nel caso dell'arco fra mercurio, è dunque possibile che altre cause si aggiungano per dar luogo ad una curva di visibilità ancora differente. Sarebbe quindi stato desiderabile, che io avessi determinato effettivamente questa, nelle condizioni del mio esperimento; ma disgraziatamente l'interferometro da me realizzato non si presta facilmente a ciò. Infatti, specie per grandi valori di l, è assai laborioso mantenere nelle migliori condizioni di visibilità le frangie. Al di là di $l = 10$ cm., le frangie sono di solito poco visibili, e spariscono in conseguenza del più piccolo errore di posizione degli specchi. Questa viene corretta con la manovra delle viti di orientamento; ma talvolta basta girare solo di pochi secondi la testa di una di queste, per far sparire o ricomparire le frangie. Per grandi valori di l, non è poi possibile ritrovare direttamente queste, vale a dire conducendo al parallelismo S_1 e la sua immagine P. Infatti un oggetto, sia pure situato a grande distanza dall'interferometro, puntato col cannocchiale C, dà luogo a due immagini riflesse da S_1 ed S_2 che

(1) T. et M., loc. cit., p. 146.

non sono esattamente identiche per grandezza, e quindi non è possibile portarne a coincidenza tutti i punti. È vero che basterebbe far coincidere quei particolari di esse che poi risulterebbero sovrapposti col centro delle frangie circolari; ma spesso la posizione di questo centro o punto polare (1) non può essere *a priori* localizzata nel piano focale dell'oculare. Per cui si deve cominciare a ricercare le frangie per un piccolo valore di l (di qualche millimetro o meno ancora), e poi non perderle mai di vista spostando S_1 colla manovra della lunga vite. Contemporaneamente occorre ritoccare, talvolta ogni millimetro od anche meno, al crescere di l, qualcuna delle teste delle viti di orientamento. Tenendo poi conto del fatto che colla mia disposizione, e per certe differenze di cammino, le frangie sono praticamente invisibili, si comprende quanto penosa sia stata talvolta la loro ricerca. Basti dire che, per valori di l superiori ai 15 cm., impiegavo in ciò frequentemente più ore.

In queste condizioni non mi è stato possibile costruire completamente una curva di visibilità e mi sono limitato a individuare qualche valore di l, possibilmente grande, per cui le frangie appaiono sufficientemente nitide. Al riguardo noto che, per il valore massimo di $l = 232$ m/m già citato, ho potuto constatare un massimo di visibilità: le frangie cioè sono meno visibili per l più piccolo, e al di là di quel valore si indeboliscono assai o scompaiono del tutto. Esso è stato dunque adottato per le ultime mie ricerche, di cui dirò appresso.

Ammettendo per un momento che la curva di visibilità data da Michelson per bassissime pressioni, possa applicarsi anche al caso delle mie esperienze (2), si dovrebbe concludere che la pressione del vapore di mercurio nei tubi da me impiegati sia estremamente ridotta. Ciò non è inverosimile, tenendo conto del modo già detto con cui questi sono stati preparati; oltre a ciò l'osservazione seguente corrobora tale ipotesi: la visibilità delle frangie è massima quando il tubo non è molto caldo, cioè quando è cimentato con corrente non superiore a 2 ampère

---

(1) Come è noto essa, corrisponde al piede della perpendicolare abbassata dall'occhio dell'osservatore sui piani paralleli S_1 e P.

(2) Effettivamente non ho sufficienti dati sperimentali per poter ritenere ciò esatto.

circa, e meglio ancora quando una corrente d'aria esterna ne raffredda le pareti. Ma si comprende quanto l'esame del fenomeno, sotto questo aspetto, debba essere complesso, giacchè, oltre il valore della pressione, anche quello della temperatura delle particelle luminose, e lo scuotimento dovuto al campo elettrico (diverso da caso a caso) possono avere evidentemente influenza sull'emissione.

Per cui, si può concludere che la vera curva di visibilità, nel mio caso, non possa essere esattamente rappresentata da una di quelle date da Michelson; solo disponendo di un istrumento più perfezionato, si potrebbe con maggior successo procedere alla esatta determinazione di essa.

Per lo scopo di queste ricerche, è peraltro ampiamente sufficiente avere a propria disposizione soltanto qualche massimo di visibilità, per valori notevoli di l; e avendo infatti ciò ottenuto, ho tralasciato di perfezionare, da questo lato, la mia disposizione.

6. Distribuzione delle frangie circolari. — Come è noto, se la differenza l fra i cammini dei raggi interferenti è nulla o quasi, si hanno delle frangie, o bande, molto larghe parallele alla intersezione del piano di S_1 con P (fig. 3), ed esse sono visibili anche in luce bianca. La colorazione delle frangie sarebbe analoga a quella degli anelli di Newton se S_3 non fosse argentato lievemente. Ma se questo non è il caso, vale a dire se, per avere maggiore intensità nel fenomeno luminoso, si ricopre la faccia superiore di S_3 di uno strato semitrasparente di argento (come io ho fatto), i colori che si osservano sono i complementari. Ciò avviene perchè alla riflessione vitrea sulla faccia superiore di S_3 è sostituita la metallica. La frangia centrale è dunque, per una differenza di fase nulla, bianca, e per l'opposizione di fase, nera.

L'apparizione delle frangie colorate (che sono localizzate nel piano P) individua con sufficientissima approssimazione il punto di partenza nel computo della differenza di cammino dei raggi interferenti, man mano che si procede, in seguito, allo spostamento di S_1. Occorre infatti che l non sia superiore a qualche lunghezza d'onda media, perchè si possano vedere le frangie colorate in luce bianca, mentre l'approssimazione suffi-

ciente per queste ricerche dell'1 % (cioè anche per $l = 10$ cm., di 1 m/m) è di gran lunga minore. Crescendo l notevolmente, le frangie vanno a localizzarsi all'infinito e diventano circolari concentriche. Interessa ora, per il computo degli spostamenti di cui sarà detto appresso, studiare preventivamente la distribuzione di queste frangie circolari. Sia n_0 l'ordine di interferenza del centro di esse; i punti circostanti, visti sotto l'angolo α con la normale sul centro, saranno sedi di interferenza di ordine:

$$n = n_0 \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right);$$

cioè l'ordine di interferenza va decrescendo con l'allontanarsi del fenomeno dal centro (1).

Essendo l'ordine di interferenza al centro dato da l/λ si ha

$$n = \frac{l}{\lambda}\left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right).$$

Vale a dire che, rispetto al centro, l'ordine di interferenza muta secondo la relazione

$$n = \frac{l}{\lambda} \frac{\alpha^2}{2},$$

intendendo che, al crescere di α, la grandezza n va sottratta al valore dell'ordine di interferenza al centro. La precedente espressione dice che così intesa la grandezza n è zero per $\alpha = 0$. Ma effettivamente, attribuendo alle circonferenze mediane delle successive *frangie luminose* degli ordini di interferenza interi, non si può dire precisamente se al centro di tutto il sistema di frangie competa un ordine veramente nullo. Più propriamente il fenomeno della variazione di quest'ordine può essere espresso da una equazione della forma

$$n = A + B\alpha^2$$

(1) Vedi: T. et M., l. c., p. 12; Chwolson, *Traité de Physique*, II, p. 600, 1907.

dove A rappresenta già un ordine di interferenza, al più uguale ad 1, caratteristico del centro.

Le costanti A e B variano al variare di l, e di esse inoltre A è variabile colla fase al centro delle frangie; il fenomeno per l sensibilmente costante, può essere dunque rappresentato da una parabola il cui vertice può essere variamente spostato rispetto all'origine delle coordinate n ed α.

Per determinare in qualche caso delle mie esperienze le costanti A, B, si sarebbe potuto procedere, tenendo conto delle varie costanti dell'apparecchio; ma ho preferito ricavare i valori di quelle, da osservazioni dirette dei diametri delle frangie stesse. Mi riferisco ad un caso pratico, tanto più che esso ha poi servito nelle esperienze definitive. Esso riguarda la differenza di cammino $l = 232$ m/m di cui già ho detto. Il numero delle frangie visibili, contato a partire dal centro, è allora limitato: 7 od 8. Si regola la tensione di una molla agente sullo specchio S_2 in guisa che incominci a formarsi al centro la macchia luminosa (questa, se completamente sviluppata, corrisponderebbe alla differenza di fase nulla); non ha peraltro alcuna importanza far ciò con precisione. Indi col filo del reticolo micrometrico del cannocchiale si puntano successivamente i bordi esterni delle frangie nere. Così si possono ricavare, espressi in duecentesimi di m/m nel campo del cannocchiale, i valori dei tratti AB, CD, EF, GH (fig. 4). È difficile leggere i diametri delle frangie superiori alla quarta, in causa del piccolo ingrandimento del cannocchiale e del fatto che esse si vanno rapidamente addensando, al crescere di α. D'altra parte non conviene accrescere quell'ingrandimento, venendo con ciò a diminuire la visibilità e la nettezza dei bordi. L'operazione di misura è ripetuta a più riprese e sempre andando prima dal centro alla periferia e poi di nuovo al centro, al fine di eliminare gli errori dovuti a variazioni di temperatura, e all'assestamento dell'interferometro. Le letture fatte possono ritenersi proporzionali ai doppi angoli visuali α; dividendole per

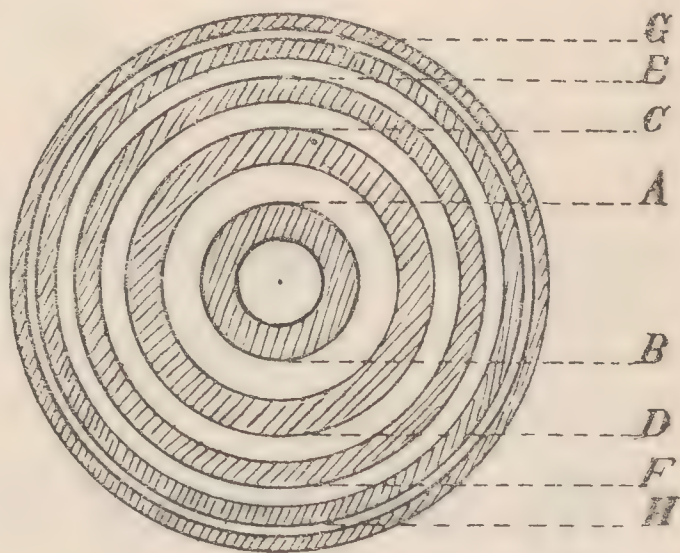



Fig. 4.

due, ne sono poi riportate le 4 medie nella seconda riga della tabella:

	n	0,663	0,8	1,0	2	3	4	5
α	osservato	—	—	17,4	33,9	44,6	53,6	—
	calcolato	0	10,82	16,97	33,84	44,70	53,44	60,88.

I quattro valori suddetti danno modo di determinare i valori più probabili delle costanti A, B dell'equazione parabolica del fenomeno. Ciò facendo si ha

$$n = 0,663 + 0,00117\,\alpha^2.$$

Questa equazione corrisponde al diagramma della figura 5, da cui si rileva inoltre che le posizioni delle quattro determinazioni di α sono assai prossime alla curva. La concavità di questa

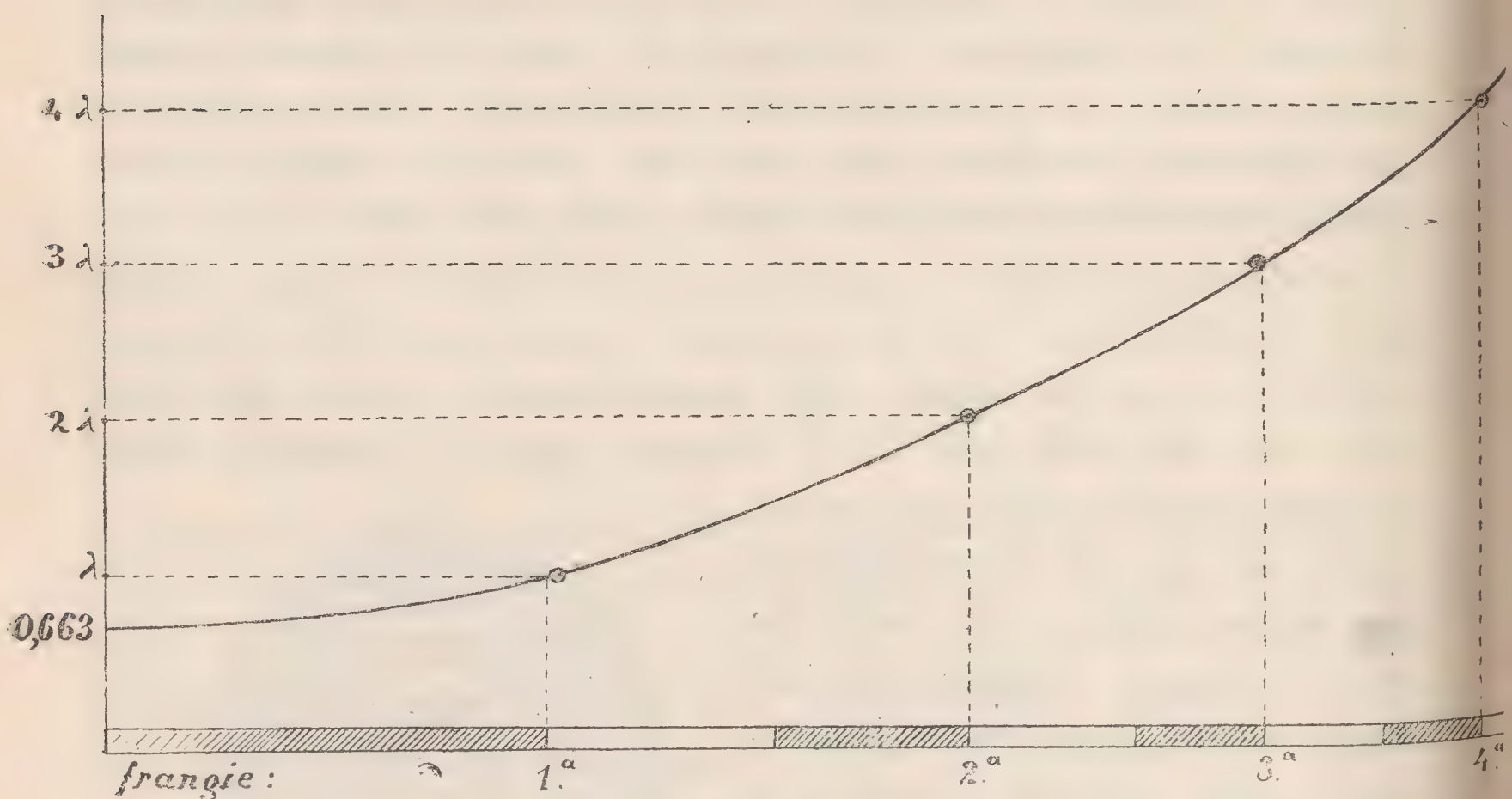



Fig. 5.

è nella figura rivolta in alto, ma non bisogna dimenticare che l'ordine di interferenza va decrescendo dal centro delle frangie alla periferia, per cui sarebbe stato forse più esatto costruire la curva stessa con delle ordinate negative, e quindi farla svolgere completamente al disotto dell'asse degli α. A maggior comprensione del significato del diagramma, in una zona alternativamente bianca o tratteggiata, ho voluto anche rappresen-

tare l'aspetto luminoso od oscuro delle successive frangie, partendo dal centro, e procedendo lungo un raggio; la frangia centrale è appena luminosa al centro in corrispondenza della fase 0,663.

È chiaro quale sia lo scopo delle considerazioni e delle misure fatte. Farò vedere che si avrà bisogno nel corso di queste ricerche di esprimere in lunghezza d'onda uno spostamento di una frangia. Si comprende che sarà anzitutto opportuno osservare col micrometro questo spostamento, per una frangia prossima al centro anzichè per una periferica, essendo la prima di diametro notevolmente diverso da quello delle contigue. Dato ora l'andamento non lineare, ma parabolico, del fenomeno (1), non è lecito interpolare con una semplice proporzione, per passare dagli α alle n. Servendoci della formula su riportata, si potrà ottenere una approssimazione superiore, ed è questo il metodo da me seguìto.

7. Previsione dello spostamento delle frangie. — Il numero di lunghezze d'onda λ, che entra nella differenza di cammino l dei raggi interferenti è $k = l/\lambda$. Se ora, ammettendo il postulato della costanza di velocità della luce, supponiamo che il fascio di luce monocromatica provenga da una sorgente, o da un'immagine di questa, mobile con la velocità v, poichè si è visto che la nuova lunghezza d'onda è data da:

$$\lambda' = \lambda \left(1 - \frac{v}{c}\right),$$

sarà:

$$k' = \frac{l}{\lambda}\left(1 + \frac{v}{c}\right)$$

il nuovo numero di lunghezze d'onda entranti in l. Per cui, al passaggio dalla quiete al movimento della sorgente o della sua immagine, si dovrà osservare uno spostamento nelle frangie corrispondente a

$$f = k' - k = \frac{l v}{\lambda c}.$$

---

(1) La curvatura del diagramma è già sensibile fra due osservazioni di diametri o raggi di frangie contigue, a cui si dovrebbe riferire con interpolazione lineare uno spostamento di una porzione di frangia.

Così, se $l = 232$ m/m, $v = 100$ m./sec., $\lambda = 0{,}546\ \mu$, sarà $f = 0{,}141$. E con l'inversione della velocità, si può prevedere uno spostamento doppio $2f = 0{,}282$.

Ora, effettivamente, al principio di queste ricerche, pensavo che questo spostamento potesse difficilmente venire apprezzato con precisione. Infatti, con l grande, le frangie appaiono piccole e poco distinte; non così avviene per esperienze in cui può essere fatto l prossimo a zero, come nella celebre esperienza di Michelson e Morley, in quella di Fizeau sul trascinamento della luce e in altre ancora. Ma poi, con la pratica acquistata e grazie al metodo di misura precedentemente descritto, sono arrivato ad apprezzare con sufficiente approssimazione quell'ordine di grandezza.

8. Influenza del moto di uno specchio. — Quando uno specchio mobile con la velocità v normale al suo piano riflette un raggio di luce incidente con l'angolo ϑ, di frequenza n, questa si muta in

$$n' = n \frac{1 + 2\beta \cos \vartheta + \beta^2}{1 - \beta^2}$$

dove $\beta = v/c$ (1); e trascurando i termini in β^2 si ha

$$n' = n(1 + 2\beta \cos \vartheta).$$

La formula diventa $n' = n(1 + 2\beta)$ nel caso della incidenza normale, e ci dice che per incidenza radente non si deve constatare alcun effetto. In una ricerca sperimentale del genere è bene dunque porsi almeno in vicinanza dell'incidenza normale; conviene poi, per esaltare l'effetto, fare riflettere più volte il raggio luminoso su specchi mobili, analogamente a quanto ha fatto Belopolski (2). Se dunque si fa riflettere il raggio k volte, l'effetto osservato sarà:

$$n' = n(1 + 2k\beta \cos \vartheta).$$

---

(1) Vedi p. e.: Harnack, " Ann. d. Phys. ", 39, p. 1053, 1912, e 46 p. 547, 1915.

(2) " Bulletin Ac. St-Pétersbourg ", 13, p. 461, 1900.

E la nuova lunghezza d'onda, ammettendo il principio della costanza di c:

$$\lambda' = \lambda (1 - 2k\beta \cos\vartheta).$$

Ora l'interferometro di Michelson, per convenienti valori di v e quindi di β, si presta egregiamente a rivelarci le corrispondenti mutazioni di λ. Si tratta solo di realizzare un'opportuna disposizione per mettere in moto degli specchi, come quella che ora vado a descrivere.

Una ruota di ottone R (fig. 6), orizzontale, di 35 cm. di diametro (spessore 6 m/m), capace di compiere sino a 80 giri a 1″, porta alla periferia 10 specchi (come M) piani, verticali, di vetro argentato posteriormente, rettangolari di 30 × 35 m/m. La velocità dei centri degli specchi, in corrispondenza della massima velocità di rotazione della ruota, risulta dunque di più che 100 m. a 1″. Il numero dei giri a 1″ della ruota è, in ogni esperienza, determinato acusticamente. Gli specchi, egualmente spaziati, sono inclinati ciascuno sul raggio di R passante per il proprio centro di un angolo $\alpha = 29°$. Essi sono fissati solidamente su R, mediante congegni a vite capaci di permetterne il rigoroso regolaggio. Il sostegno dei cuscinetti dell'asse di R porta altri specchi fissi, pure verticali come F, il cui numero è di 3 in figura; ma tale numero può a volontà essere ridotto, od accresciuto sino a 9. La posizione degli F e degli M è tale, che un fascio di luce parallela L, dopo un certo numero di riflessioni (7 in figura) sugli M e sugli F, può venire raccolta in L' quando R ha determinate posizioni angolari. Naturalmente la intensità di L' è notevolmente affievolita rispetto ad L; tale affievolimento è poi molto maggiore se R entra in rotazione, giacchè solo in certi brevi istanti (10 volte ogni giro) la luce arriva in L'. Praticamente ho osservato che le quattro riflessioni mobili, e le tre fisse della figura, consentono ancora di sperimentare con luce sufficientemente intensa in L', anche se R è in moto, e di osservare così ad occhio (senza bisogno di fotografie) il fenomeno luminoso.

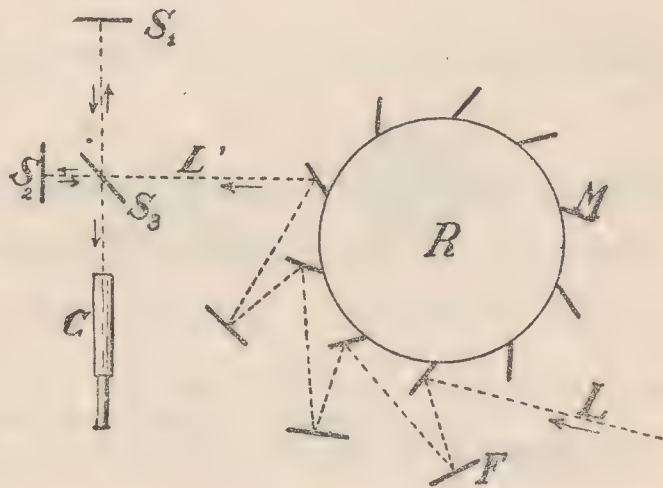



Fig. 6.

La sorgente luminosa è quella già descritta, a vapori di mercurio; l'apparecchio interferenziale, l'interferometro di Michelson. Nella fig. 7 è indicata la disposizione in iscala di tutte le varie parti dell'apparecchio, cioè della sorgente, della ruota a specchi, dell'interferometro. Quattro lenti di distanze focali indicate servono a rendere il fascio dei raggi cadenti sull'interferometro, sufficientemente intenso e sensibilmente parallelo. La distanza fra la ruota e l'interferometro è, così, di circa 7 metri, ed il fascio luminoso traversa un foro praticato in un muro divisorio, che ha l'ufficio, oltre che di difendere l'osservatore da possibili offese dovute a rotture per forza centrifuga

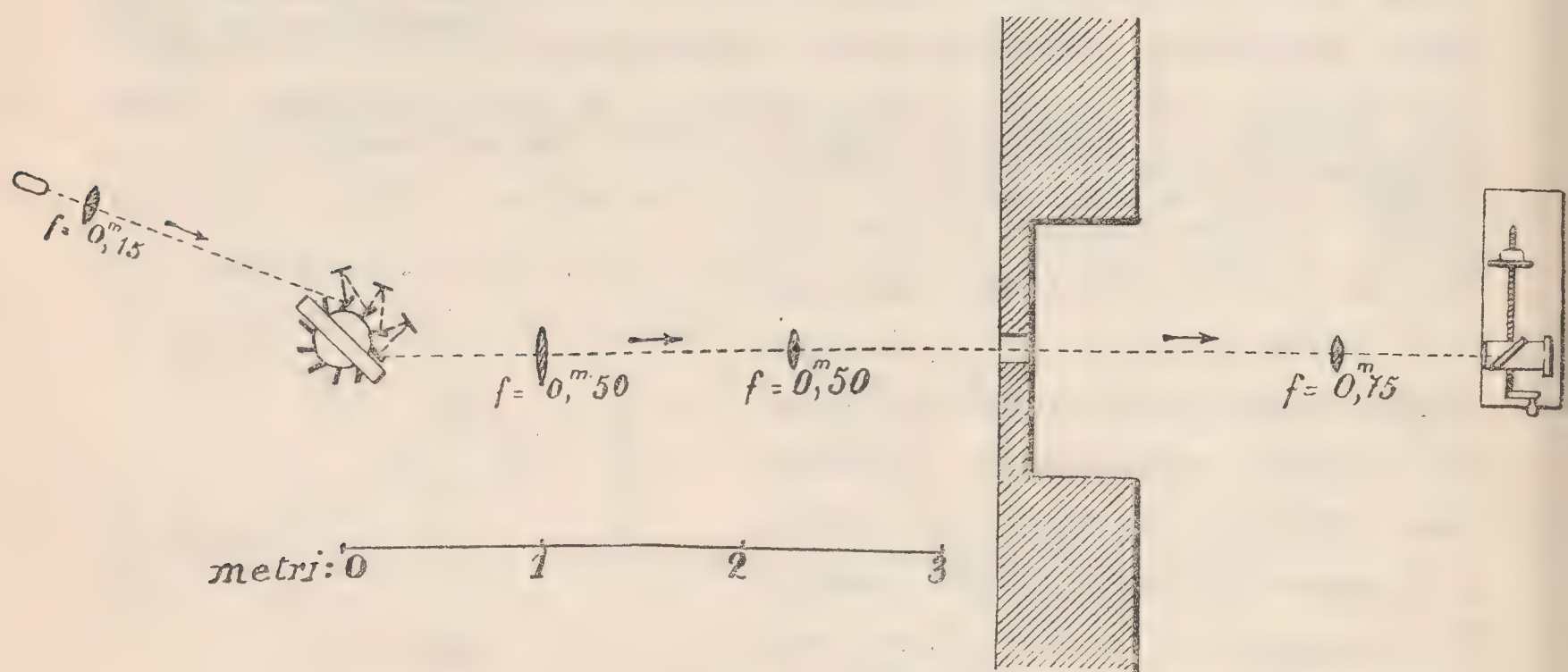



Fig. 7.

del congegno rotante, di attenuare le trepidazioni meccaniche prodotte da questo e propagantisi a traverso il suolo e l'aria. Peraltro, al fine di raggiungere meglio tale scopo, l'interferometro è montato su cuscinetti di caoutchouc.

Le 7 riflessioni che la luce della sorgente luminosa subisce in questo apparecchio rotante, oltre che le altre modalità dell'esperimento, indeboliscono tanto il fascio luminoso, che all'interferometro è difficile scorgere le frangie per una differenza l di cammino superiore ai 13 cm. circa. Poichè a questo valore corrisponde un massimo di visibilità, mi sono attenuto ad esso nelle osservazioni con tale apparecchio. L'esperienza veniva condotta facendo girare prima la ruota in un senso, con una certa velocità (di solito 60 giri a 1″) ed eseguendo subito una misura del diametro di una frangia prossima al centro, me-

diante l'oculare micrometrico. Subito dopo si invertiva il senso di rotazione e si leggeva il nuovo valore dello stesso diametro; si continuavano indi a ripetere le osservazioni, alternando i sensi di rotazione. Ho così potuto constatare che, passando dalla velocità corrispondente ad un allontanamento degli specchi dall'interferometro, alla velocità contraria, le frangie dell'interferometro si allargano (cioè qualche nuova frangia comincia ad uscire dal centro). Ciò vuol dire manifestamente che l'ordine di interferenza al centro, od in un punto qualunque del campo del cannocchiale, cresce. Per cui un maggior numero di λ entra nel tratto l, od, in altri termini, il valore di λ diminuisce; il che corrisponde alla teoria della costanza della velocità della luce, salvo a stabilire meglio il valore di questa diminuzione. Naturalmente uno spostamento di frangie inverso, e quindi un accrescimento di λ si osserva, invertendo l'ordine delle operazioni: passando cioè dalla velocità di avvicinamento a quella di allontanamento.

Cerchiamo ora di prevedere, in base alla citata teoria, quale debba essere lo spostamento delle frangie. Detto g il numero di giri a 1'' di R, e d il diametro di questa, contato fra i centri di due specchi M opposti, sarà πdg la velocità di traslazione istantanea di questi. Essendo poi essi inclinati per l'angolo α, sul raggio della ruota passante per ciascuno, la componente di quella velocità, normalmente al loro piano, sarà $v = \pi dg \cos\alpha$; e, per quanto si è già visto, lo spostamento per il passaggio dello specchio dalla quiete alla velocità v, sarà dunque:

$$f = \frac{l}{\lambda} \; \frac{2k\pi dg \cos\alpha \cos\vartheta}{c} .$$

Ora, nelle condizioni della mia esperienza, $d = 38$ cm., $\alpha = 29^\circ$, $\vartheta = 27^\circ$, $k = 4$, $\lambda = 0{,}546\,\mu$. In una serie di misure si ha $l = 13$ cm., $g = 60$ (giri compiuti prima in un senso e poi in senso opposto). Lo spostamento da osservare deve essere dunque $2f = 0{,}71$.

La media della serie di osservazioni citata, condotta con i criterii già esposti, è $2f = 0{,}75$, con un errore probabile del 5 $^0/_0$.

Rimane dunque confermato che, dentro i limiti della approssimazione raggiunta, e nelle condizioni dell'esperimento, la velocità della luce riflessa su specchi mobili, non muta.

9. Influenza del moto della sorgente. — Le esperienze di Michelson, di Fabry e Buisson e quella mia descritta nel precedente paragrafo, fanno vedere la immutabilità della velocità di propagazione della luce, per il caso della riflessione su superficie riflettenti mobili. Non mi consta che sia stato prima d'ora mai tentato realizzare una analoga esperienza, mettendo direttamente in moto la sorgente luminosa. Ciò dico, prescindendo non solo dalle numerose osservazioni astronomiche dell'effetto Doppler, fatte sia con prismi che con reticoli di diffrazione, ma anche dalle esperienze di Stark e Paschen sui raggi canali. Nel primo caso i corpi celesti osservati possono avere persino una velocità di traslazione di 80 km. al 1″, mentre nell'altro si può trattare di velocità anche di molto superiori a questo limite. Entrambe queste due categorie di osservazioni non tolgono però interesse ad una ricerca sperimentale, tendente a realizzare l'osservazione dell'effetto Doppler o la determinazione della velocità della luce, quando artificialmente si ponga in moto una sorgente. Questa ricerca, se possibile, presenterebbe il vantaggio del controllo diretto in laboratorio, della velocità della sorgente, il che non può sempre farsi negli altri casi citati. Oltre a ciò, è da notare, che l'esperimento di laboratorio si svolgerebbe in condizioni alquanto diverse da quelle astronomiche, giacchè qui sorgente ed osservatore si trovano in località, in cui le forze newtoniane si manifestano diversamente. E se questo fatto può non aver importanza per taluni sostenitori della nuova teoria della relatività, non deve essere trascurato nella indagine puramente obbiettiva dei fenomeni. Esso potrebbe inoltre servire di base in avvenire alla formulazione di nuove teorie, come in fondo si tentò di fare qualche tempo addietro, quando si parlava del trascinamento dell'etere in vicinanza della materia mobile.

Ora, volendo realizzare una esperienza come quella citata, si intende quali gravi difficoltà occorre superare. Una sorgente luminosa, mobile perchè posta p. e. in rotazione (e questo è il caso più facile a realizzarsi meccanicamente), costituisce un congegno di molto più delicato di un semplice specchio. Mentre questo può essere imprigionato in robuste armature metalliche, vincendosi con ciò la forza centrifuga e la resistenza dell'aria, una sorgente luminosa, costituita da un tubo a mercurio come

quello già descritto, è cosa assai fragile, e che inoltre ha di bisogno di speciali connessioni elettriche per funzionare. Oltre a ciò, mentre lo specchio conferisce alla immagine virtuale della sorgente (nel caso della incidenza normale) una velocità doppia della propria, e, come si è visto, è facile con riflessioni multiple accrescere ancora tale velocità, nel caso della sorgente mobile tutto ciò non è più vero o possibile. Così, mentre con gli specchi si può arrivare ad una velocità virtuale di circa 400^m a $1''$, con la sorgente mobile, a parità di velocità periferica, bisognerebbe contentarsi di un valore otto volte più piccolo.

Per contro, un esperimento con sorgente mobile può offrire dei vantaggi. Infatti nel caso degli specchi il fenomeno luminoso è relativamente debole, in dipendenza delle 7 riflessioni e della brevità degli istanti per i quali la luce arriva sull'interferometro. Nel caso di una eventuale sorgente mobile ruotante, è da sperare che la intensità luminosa possa essere maggiore sia per la eliminazione delle riflessioni, sia ancora perchè, esaminando tangenzialmente la traiettoria, un certo arco di questa (10 o 15 gradi) può essere considerato come rettilineo, e durante il tempo impiegato a percorrerlo la sorgente emette luce utilizzabile nell'esperimento. Per cui, se per gli specchi non si poteva facilmente sorpassare una differenza di cammino di 130 m/m fra i raggi interferenti, perchè troppo difficile diventava discernere le frangie, con la sorgente luminosa mobile è sperabile poter sperimentare con l più notevoli: la sensibilità del metodo ne verrebbe così a guadagnare. Ciò è tanto più vero, in quanto, con maggior luce, è più facile apprezzare spostamenti piccoli delle frangie.

Stabilii dunque il nuovo piano di esperienze, proponendomi di porre in rapida rotazione degli archi a mercurio come quelli della fig. 2, e di esaminare la luce tangenzialmente alla traiettoria, mediante l'interferometro. Il progetto di una simile esperienza era fatto in base al dato di conferire alla sorgente una velocità periferica di circa 100 m. a $1''$, e allora si presentava subito il bisogno di premunirsi contro gli effetti della forza centrifuga e della resistenza dell'aria. A combattere la prima vi ha convenienza di ingrandire, per quanto possibile, il diametro della traiettoria, e diminuire in corrispondenza il numero di giri a $1''$. Si sa infatti che, a parità di diametro, la forza cen-

trifuga cresce col quadrato di questo numero, e la velocità di spostamento come la prima potenza. Con una ruota di soli 40 cm. di diametro, simile a quella adoperata per gli specchi, si otterrebbe, per 60 giri a 1″, uno sforzo centrifugo di 3 kg. per grammo di materia. Un arco a mercurio, pesante circa 30 gr. (ed è difficile costruirlo più leggermente), sarebbe soggetto ad uno sforzo di 100 kg. circa. La forma data ai tubi ed il modo di sostenerli mi davano affidamento per la riuscita di una prova del genere, e in ciò fui confortato da un calcolo di resistenza preventivo. Ma all'atto pratico il congegno realizzato con tali criterii, se non subito, dopo qualche tempo andava inevitabilmente in pezzi.

Dopo varii tentativi fissai il diametro di sostegno dei tubi rotanti a due metri; dirò subito che con ciò la forza centrifuga cimentante i piccoli tubi di vetro costituenti gli archi a mercurio (pesanti ciascuno 35 gr.) risultò di 30 kg., per una velocità di soli 14 giri al 1″, in corrispondenza quindi di una velocità periferica di circa 90 metri. Con ciò le rotture non sono evitate del tutto, ma sono assai più rare.

Quanto alla resistenza dell'aria, questa viene ridotta al minimo adoperando sottili fili di acciaio ad alta resistenza meccanica, come connessioni dei tubi con l'albero rotante. Ciò malgrado l'apparecchio che ora descriverò, per la velocità di 14 giri a 1″, consumava circa 5 KW di potenza. Esso è indicato schematicamente, e non con la medesima scala in tutte le sue parti, nella fig. 8. O è l'albero verticale rotante connesso con puleggia e cinghia a un motore di circa 10 cavalli di potenza, e di velocità regolabile. Due tubi a vuoto a tre elettrodi, analoghi a quello già descritto (dimensione massima 4 cm.), sono meccanicamente collegati mediante apposite fasciature di ferro, fissate a fili di acciaio, con l'albero O. Questo è circondato da due anelli collettori K_1 e K_2 isolati, sui quali strisciano le spazzole P_1, P_2 adducenti corrente continua a 70 v. Gli anelli K_1, K_2 comunicano con gli elettrodi A e B di ciascun tubo. Due resistenze di 20 ohm ciascuna, sono interposte nei circuiti dei tubi per regolarne la intensità di corrente. Per forza centrifuga il mercurio, quando l'apparecchio è in rotazione, si dispone, come in figura, sugli elettrodi A, B. I due tubi che, come si vede dalla figura, sono in derivazione sulla linea a 70 v., potrebbero

adescarsi automaticamente, pel movimento di rotazione, se il mercurio fosse in quantità sufficiente per porre, a congegno fermo, in corto circuito gli elettrodi A e B. Ma i primi modelli di tubi così costruiti, dovendo contenere circa 50 gr. di mercurio, andavano inevitabilmente in pezzi. Ridussi allora il mercurio, e adottai il terzo elettrodo E, che, facendo capo a una linguetta L di alluminio, provvede all'adescamento del tubo, quando esso passa presso l'arco metallico M, connesso con il reoforo positivo di un rocchetto di induzione I; l'altro reoforo di questo è connesso al collettore K_1. Naturalmente il rocchetto I viene chiuso solo per brevi istanti, onde appena adescare gli archi. Debbo però osservare che il più delle volte è inutile servirsi di questo congegno, giacchè l'arco si adesca spontaneamente in conseguenza di ionizzazione del gas residuo dei tubi, prodotta dagli scuotimenti della rotazione.

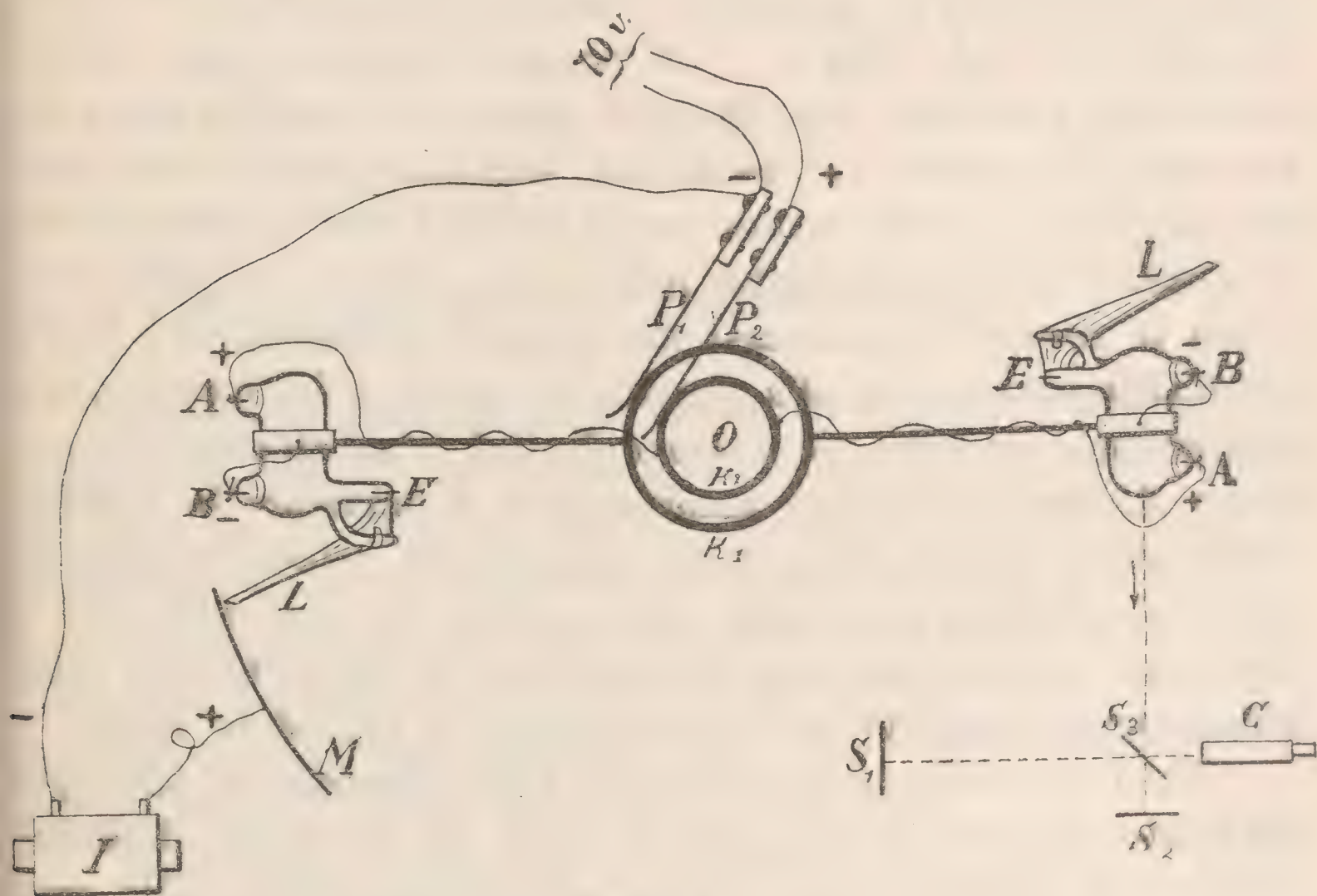



Fig. 8.

Oltre che dai collettori K_1 e K_2, l'albero O è circondato da una serie circolare di 45 blocchetti metallici, non segnati in figura, su cui striscia una terza spazzola. Questo congegno, a mo' di sirena elettrica, permette, mediante una pila e un telefono, di ascoltare un suono della altezza media di 500 v. a 1″,

dal che si può stimare, con sufficiente approssimazione, il numero di giri a 1″ dell'apparecchio. L'interferometro di Michelson è collocato, rispetto all'apparecchio rotante, come in figura; in guisa cioè da raccogliere luce tangenziale. La figura 7 può anche servire a far comprendere la disposizione generale degli apparecchi in questo caso: basta sostituire alla ruota a specchi quella a tubi di mercurio.

Per queste ricerche, come più volte ho detto, si è fissata la differenza di cammino l in 232 m/m, per il quale valore si ha il diagramma della fig. 5, e la già riportata equazione. In queste condizioni, ed animando l'apparecchio ruotante di una velocità da 8 a 14 giri a 1″, si scorge facilmente una variazione nella posizione delle frangie, quando la velocità passa da un verso all'opposto. Le condizioni dell'apparecchio sono tali che, eseguendo questa inversione di velocità, non si può lasciare la sorgente di luce adescata. Infatti, per piccole velocità, venendo il mercurio a staccarsi dai contatti di platino A e B, dà inevitabilmente luogo alla fusione di questi e in conseguenza alla rottura dei tubi: ciò avviene di preferenza all'elettrodo positivo A. Per cui bisogna accontentarsi di misurare lo spostamento delle frangie, dopo aver raggiunto la voluta velocità di rotazione. D'altra parte esso deve essere, in base alle previsioni, così piccolo che non vi è pericolo di errare nel suo computo, comprendendovi delle intere unità in più od in meno.

Ecco ora come si procede alla determinazione di tale spostamento. Si pone in rotazione la ruota in un senso determinato: p. e. quello corrispondente all'avvicinamento della sorgente all'osservatore. Si determina l'altezza del suono dato dalla sirena elettrica, riproducendolo con un sonometro precedentemente accordato con un diapason. Si regola la tensione della molla dello specchio S_2 in guisa da far comparire la macchia luminosa centrale (fase nulla o quasi). Si puntano indi rapidamente e successivamente i bordi esterni di tale frangia col filo del micrometro oculare del cannocchiale. Si hanno così due letture espresse in duecentesimi di m/m come 14 e 85. Si spengono gli archi; si inverte la velocità, si riaccendono gli archi, si ripuntano i bordi della frangia centrale e si hanno due nuove letture: 10 e 86. E così di seguito rapidamente ed alternativamente per un certo numero di volte, p. e. 7, con velocità

di allontanamento e 6 con quella di avvicinamento. Si determina indi il suono alla sirena. Una di queste serie di osservazioni è qui sotto riportata:

$l = 232$ m/m; suono sirena 585 *v. c.*; velocità sorgente m. 82,42.

Sorgente si allontana			Sorgente si avvicina		
		Diff.			Diff.
14	85	71	10	86	76
14	85	71	11	88	77
15	86	71	11	90	79
13	87	74	9	90	81
12	89	77	9	93	84
12	91	79	9	92	83
12	91	79			
	Medie:	74,6			80

Suono sirena 584 v. c.; velocità sorgente m. 82,29.

Secondo questa serie, lo spostamento delle frangie corrisponde dunque ad una variazione di diametro della prima frangia da 74,6 ad 80, cioè, del raggio, da 37,3 a 40. Sostituendo questi valori nella formula empirica già trovata, si ha $2f = n = 0,244$.

Ma questo valore è desunto dalle sole osservazioni riportate qui. Effettivamente conviene ripetere più volte tale serie di osservazioni. Così operando, con altre 8 serie, prendendo le medie trovo il valore $2f = 0,238$ (osservato).

Calcoliamo ora questo spostamento con l'ipotesi della costanza della velocità della luce. Si deve avere in tal caso:

$$f = \frac{l}{\lambda} \frac{v}{c}.$$

Il suono della sirena medio nelle 9 serie di osservazioni risulta di 566 v. c., al che corrisponde una velocità v periferica di $79^{m},77$ a $1''$. Per cui essendo $l = 232$ m/m, $\lambda = 0,546\ \mu$ si ha

$$f = \frac{232 \,.\, 79,77}{546 \,.\, 3} 10^{-2} = 0,113.$$

E quindi $2f = 0,226$ (calcolato).

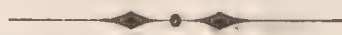
Il valore osservato risulta dunque superiore, di circa il 5 %, del previsto.

Per quanto io abbia esaminato attentamente le varie modalità in cui il descritto esperimento si svolge, non sono per ora riuscito a vedere se qualche errore sistematico possa giustificare tale scarto. Ma ciò potrà formare oggetto di ulteriori mie indagini.

L'ordine di grandezza dello spostamento osservato coincide però con il previsto; per cui, per ora, si può concludere che, con grande probabilità, il movimento di una sorgente luminosa non produce variazioni nella velocità di propagazione della luce, e ciò nelle condizioni dell'eseguito esperimento.

***

Dalle ricerche eseguite da Michelson, Fabry e Buisson e da me, risulta dunque che la velocità della luce non cambia per la riflessione su specchi. Da quelle ultime ora descritte, risulta ancora che la detta velocità non muta per l'artificiale movimento della sorgente. Questi fatti sono certamente d'accordo con la teoria della relatività; ma effettivamente, malgrado il loro evidente interesse, non possono, con pieno rigore logico, essere citati come sicura prova sperimentale di quella teoria. Non occorre dimenticare infatti due circostanze dell'esperimento, e cioè quella della materia traversata dai raggi che poi dànno luogo all'interferenza (aria, vetro, metallo) e quella del campo gravitazionale della nostra terra.

Mentre è possibile immaginare ancora esperimenti che prescindano dalla prima circostanza, non è prevedibile se ulteriori risultati sperimentali possano mettere in evidenza la influenza eventuale della seconda.

Ragguagli sopra gli ossami fossili trovati in una tomba presso Anteopolis (Monti di Gau, Alto Egitto)

Nota del Socio nazionale residente C. F. PARONA

Durante i lavori di esplorazione e di riescavo di una tomba nel deserto presso Anteopolis (Monti di Gau, Alto Egitto) il collega prof. E. SCHIAPARELLI trovò, frammischiati al materiale di riempimento dei pozzi e che ingombrava le sale, degli ossami fossili in gran numero, per lo più incompleti o in frammenti, ch'egli fece raccogliere. Soltanto in parte gli ossami adunati furono portati al Museo Egizio di Torino: tuttavia sono parecchie centinaia di pezzi, che il collega ebbe la cortesia di mettere a mia disposizione, invitandomi a comunicargli i risultati dell'esame che ne avrei fatto.

In generale sono frammenti troppo imperfetti o erosi per prestarsi a indagini conclusive; ma colla cernita fatta ne rimasero oltre duecento pezzi utili per lo studio, ciò che dà idea dell'abbondanza del materiale raccolto.

Risulta dalle informazioni che non si tratta di un giacimento fossilifero originario, bensì di un accumulo di ossami trasportati dall'uomo per uno scopo che tuttora rimane inesplicato; non potendosi ritenere che questi ossami fossero in qualche modo utilizzati, non presentando essi tracce evidenti di tagli intenzionali.

Al prof. SCHIAPARELLI venne il dubbio che il trasporto, l'accumulo e l'abbandono del materiale di scarto fossero da attribuire a precedenti esploratori dell'Alto Egitto; fors'anche agli scienziati della spedizione napoleonica. Ma nella grande opera relativa all'Egitto nulla trovai che potesse avvalorare il dubbio, avendone all'uopo consultate le parti e le tavole relative alle

raccolte di Storia Naturale ed alla descrizione fisica della regione (1).

Sono ossa fossilizzate e spesso, più propriamente, pietrificate e di peso assai rilevante; salvo rare eccezioni, sono di color nero, colla caratteristica superficie levigata, e come coperta da smalto lucente, proprio delle pietre dei deserti sabbiosi. Le porosità delle ossa sono infatti compenetrate da granuli arrotondati di quarzo, mentre le cavità contengono della ghiaietta che verisimilmente è traccia del deposito alluvionale, di origine dei fossili (2). Hanno dunque queste ossa un'impronta di alta

---

(1) *Description de l'Égypte, ou recueil des observations et des recherches qui ont été faites en Égypte pendant l'expédition de l'armée française* (Direct. de M. Jomard). Paris, 1809-1813, 1818-1828; Hist. Nat., vol. 2 text. et pl. Risultato negativo ebbi anche coll'esame della estesa, interessantissima opera di Lartet e C. Gaillard, *La faune momifiée de l'ancienne Égypte*, " Archiv. du Muséum d'Hist. Nat. de Lyon ", VIII, 1903; IX, 1907; X, 1909. Consultando questo lavoro, mi venne alla mente il dubbio, se può essere che gli Egiziani arcaici, i quali adoravano e mummificavano tutti gli animali che vivevano loro intorno, e non soltanto quelli sacri, nel desiderio di condurli seco nell'altro mondo, estendessero la loro attenzione e le loro cure agli avanzi fossili: ma non ho dati per risolverlo.

(2) Di queste ossa fossili preparai parecchie lastrine sottili per l'esame al microscopio e, avendole trovate interessanti, le comunicai unitamente a qualche frammento al prof. E. Artini, con preghiera di favorirmi le sue impressioni. Trascrivo qui la cortese quanto istruttiva risposta dell'amico e collega, che ringrazio.

" Trovo ben poco da modificare o aggiungere a quanto hai visto tu. Non mi fermo sulla superficie levigata e imbrunita, e sui granuli e ciottolini silicei, con tipica superficie desertica, che si trovano annidati nelle concavità superficiali dei frammenti d'ossa, perchè poco c'è da dire. Che la patina e l'infiltrazione nera o nerastra, nonchè le dendriti che si osservano al microscopio, siano di ossidi di ferro e di manganese, non v'ha dubbio; con biossido di piombo e acido nitrico diluito, a caldo, la reazione del manganese è estremamente energica; nè v'ha dubbio che si tratti qui del solito fenomeno desertico, ormai descritto da mille osservatori — benchè ancora, a parer mio, poco chiaro nelle sue cause vere.

" Talora la mineralizzazione è ristretta a questo annerimento o imbrunimento superficiale, con formazione di quantità varie di ossidi idrati di Fe e Mn, bruni o neri, nell'interno delle cellette; in qualche campione anche i vani lasciati dagli osteoblasti sono tutti neri. Abbastanza spesso, e particolarmente nelle parti più compatte delle ossa lunghe, l'interno è abbastanza ben conservato, anche chimicamente, oltre che istologicamente: sotto la crostina superficiale, bruna, il tessuto osseo è ancora formato di

antichità, ed il loro aspetto induce subito ad escludere il pensiero che siano avanzi di animali vissuti ai tempi della civiltà egizia, per quanto remota.

Lo studio e la determinazione paleontologica e cronologica di questi fossili frammentizi e di ignoto giacimento originario non si presentavano a tutta prima di esito pronto: e devo alle notizie relativamente recenti di Th. Studer (1), Andrews (2) e Stromer (3) sui depositi ad ossami dell'Uadi Natron nel Basso Egitto e di Haug (4) su quelli della valle dell'Omo-Bóttego e del Victoria Nyanza se mi fu possibile di convincermi che i fossili in esame devono provenire da un giacimento sincrono e simile a questi ora ricordati.

---

quella sostanza a struttura fibrosa, a forte potere rifrangente, e debole birifrazione, con carattere ottico negativo all'allungamento delle fibre, che è tipica dell'osso fresco.

" Altre volte, specie nelle parti più spugnose, si osserva una mineralizzazione più avanzata; le cellette sono allora tutte piene di calcite secondaria, non solo, ma in carbonato è anche trasformato parzialmente, a chiazze, il tessuto osseo. Sono queste, naturalmente, le parti che con l'acido fanno la effervescenza più viva. Frequente è il caso che le pareti dei vacuoli siano coperte da una incrostazione nera, abbastanza spessa, di ossidi di Fe e Mn, i quali diramano all'intorno in eleganti dendriti, mentre il vano interno è totalmente obliterato da calcite granulare.

" Meno importante, in questo processo di mineralizzazione, sembra essere la parte spettante alla silice. Non ho potuto osservare notevoli incrostazioni o riempimenti di cavità per parte di quarzo o di sostanze calcedoniose; un certo grado di infiltrazione silicea sembra però osservarsi superficialmente, e contribuire ad aumentare notevolmente la durezza degli strati esterni, e in particolare delle superfici levigate ".

(1) Th. Studer, *Ueber fossile Knochen vom Wadi-Natrum Unter-egypten*, " Mittheil. d. Naturf. Gesellsch. " in Bern (nn. 1451–1462), 1899, p. 72.

(2) Ch. Andrews, *Note on a Pliocene Vertebrate Fauna from the Wadi-Natrun, Egypt*, " The Geol. Magazine ", vol. IX, 1902, p. 433.

(3) E. Stromer, *Fossile Wirbeltier-Reste aus dem Uadi Fâregh um Uadi Natrûm in Ägypten*, " Abhandl. herausg. v. d. Senckenberg. Naturf. Gesell. ", V, 29, 1911, p. 108.

(4) E. Haug, *Traité de Géologie*, II (1908-1911), p. 1726, tav. CXXX. — (Per la geologia della valle dell'Omo e del Lago Rodolfo si consulti anche: G. De Angelis d'Ossat e F. Millosevich, Seconda spedizione Bòttego, *Studio geolog. sul materiale raccolto da M. Sacchi*, Roma, Soc. Geogr. Ital., 1900, e Vic. du Bourg de Bozas, *D'Addis-Abbabé au Nil par le Lac Rodolphe*, " La Géographie ", VII, 1903, p. 91).

Il deposito dell'Uadi-Natron, formato da calcari a ostracodi, da sabbie e da argille gessifere, ha dato avanzi di pesci (siluridi), coccodrilli, cheloni, uccelli e di mammiferi (*Hipparion, Hippopotamus, Sus, Lybitherium, Hippotragus, Mastodon, Machaerodus*, ecc.). Lungo il corso dell'Omo, a nord del Lago Rodolfo, e nella valle della Podi si ha una serie, nella quale, sotto strati di gesso saccaroide, di sabbia, di argille sabbiose con Ostree (*Aetheria*), potamidi, si trova un banco di argilla grigia contenente una quantità enorme di ossa (esplorazione del Visc. di Bourg de Bozas e E. Brumpt). Riferendo i risultati dell'esame preliminare degli avanzi raccolti, il prof. Haug accenna a grandi siluridi, coccodrilli e gavialidi, a *Hipparion, Rhinoceros, Hippopotamus, Phacochoeras, Buffelus, Dinotherium, Elephas.* Altre traccie di questa fauna sarebbero state riscontrate (Andrews) anche sulla riva orientale del Victoria-Nyanza. Lo stesso Haug attribuisce questi giacimenti e la loro fauna al Neogene superiore, notando che la fauna non è senza analogie con quella dei Monti di Siwalik (a sud del Himalaya), mentre ha stretta affinità con quella vivente dell'Africa equatoriale. Ricordo inoltre che vertebre di pesci, affatto identiche o molto simili a quelle da Haug attribuite a siluridi, e provenienti dalla regione dello Tsad (Sudan centrale) e dai dintorni di Scialuf (Chalouf-el-Terraba) presso Sues, furono prese in esame recentemente dal Priem (1).

Sulla carta geologica più recente dell'Egitto (2), a me nota, la serie dell'Uadi Natron è riferita al Pliocene; e lo stesso terreno copre più ad occidente, in serie stratigrafica fra il Miocene e il Pleistocene, un vasto territorio lungo l'itinerario dal litorale di Alessandria a Heteyet-el-Moghara, e si ripresenta pure sopra il Miocene tra Cairo e Sues e in numerosi giacimenti a sud del Cairo, discordanti sul Senoniano ed affioranti di sotto il Pleistocene fino a (Deirut) non grande distanza da Assiut.

---

(1) F. Priem, *Sur des poissons fossiles et en particulier des siluridés du Tertiaire supérieur et des couches récentes d'Afrique.* " Mém. Soc. Géol. France, Paléontologie ", N° 49, 1914.

(2) Survey Dept. Egypt, 1910. *Geological Map of Egypt* (Sc. 1 : 2.000.000). — Ved. anche: *Geolog. Uebersichtskarte der libyschen und arabischen Wüste* (1 : 1.300.000). K. A. Zittel, *Beitr. z. Geol. u. Palaeont. d. libyschen Wüste,* " Palaeontographica ", 1883, Bd. 30, (I).

È quindi presumibile che gli ossami della tomba di Anteopolis provengano da qualcuno di questi lembi più meridionali di alluvioni nilotiche plioceniche, e, dato l'aspetto e lo stato della superficie delle ossa, da giacimento allo scoperto, soggetto a regime desertico.

Ma non si può escludere che il Pliocene continentale esista ancora più a sud lungo il Nilo sotto il Pleistocene, che appunto a sud di Assiut prende assai più ampio sviluppo in giacitura trasgressiva sui terreni eocenici e cretacici, nonchè sull'arenarie di Nubia.

Non ho notizie sulla situazione delle alluvioni plioceniche rispetto al letto attuale del gran fiume: ma si può ritenere che esse si troveranno terrazzate a qualche altezza sul corso attuale, ad attestare il livello del letto del Nilo pliocenico. Gli eventi post-pliocenici rispettarono quasi completamente nel suo tracciato il corso del fiume, pur imprimendo alla sua valle i caratteri di maturità, naturalmente conseguenti al progredito modellamento oro-idrografico di questo singolare paese che — come descrive efficacemente lo Schiaparelli (1) — " difeso ad oriente " e ad occidente da due grandi deserti, con un suolo fertilis- " simo e costantemente irrigato, con uno sbocco diretto sul " Mediterraneo, con facili comunicazioni col Mar Rosso, legato " dal corso del Nilo alle regioni più ricche dell'interno del- " l'Africa, disgiunto bensì, ma da deserti non impenetrabili, da " altre ricche regioni dell'Asia occidentale, pareva apposita- " mente creato da Dio per essere culla di una civiltà omogenea, " precoce, grande ".

Dissi che gli eventi postpliocenici rispettarono in complesso il tracciato del Nilo: ma è da notare che all'inizio del Neozoico il Mediterraneo invadeva una larga zona litoranea dell'Egitto, depositandovi dei sedimenti con fauna pleistocenica. Il prof. Issel (2) dice che il Mediterraneo si insinuava nella valle del Nilo a mezzogiorno delle Piramidi, e rileva che da

---

(1) E. Schiaparelli, *La configurazione geografica dell'Alto Egitto in relazione collo svolgimento della sua antica civiltà.* " Cosmos ", di G. Cora, XII, 1894-96, p. 230.

(2) A. Issel, *Morfologia e genesi del Mar Rosso. Saggio di Paleogeografia.* Terzo Congresso Geografico Italiano. Firenze, 1899, p. 16.

certi indizi parrebbe penetrasse anche più oltre, a circa un centinaio di metri sul livello marino attuale, fin sotto le rapide di Assuan, ove FOURTAU segnalò dei banchi con *Ostrea cucullata* (arenarie di Kem-Ombo).

È d'altra parte interessante osservare come le condizioni continentali durante il Pliocene devono essersi estese nell'Africa mediterranea ben ad occidente sulla Cirenaica e sulla Tripolitania fino ai confini colla Tunisia, per quanto si può giudicare da osservazioni recenti, che, mentre riconoscono esteso e ben sviluppato il Miocene (1), escluderebbero la presenza del Pliocene marino in tutto questo vasto territorio (2). Sulla zona costiera del territorio stesso sussegui la sommersione postpliocenica, cui forse si collega l'origine della Grande e della Piccola Sirte e della Gefara tripolina: la quale sommersione fu soltanto in scarsa misura compensata in Tripolitania da emersione in tempi più recenti. Non è stata finora posta sufficientemente in evidenza e chiarita l'influenza esercitata da questa sommersione e dalla successiva riemersione, nonchè dalle profonde modificazioni climatologiche posterziarie svoltesi e fissatesi nel Nord-Africa, agli effetti del modellamento della valle del Nilo e delle altre

---

(1) J. DE MORGAN, *Recherches sur les origines de l'Égypte* (Formation de l'Égyte; Creusement de la vallée du Nil), Paris, 1896, osserva che l'abbassamento della parte settentrionale della valle del Nilo alla fine del Miocene preludia ai movimenti che dall'inizio del Pleistocene dovevano dare al paese le grandi linee della configurazione moderna.

(2) C. F. PARONA, *Impressioni di Tripolitania. Note geo-morfologiche sulla Gefara.* " Natura ,, VI, 1915, p. 217. — In questo ed in altro precedente lavoro ho dato notizia del Miocene in Tripolitania. Recentemente il MIGLIORINI ha riferito sul Miocene della Cirenaica orientale (C. I. MIGLIORINI, *Sulla Geologia dei dintorni di Tobruk*, " Rend. R. Acc. Lincei ,, XXIII, 1914), e coll'appoggio di un ricco elenco di fossili ha fatto rilevare che la " fauna di Tobruk corrisponde assai bene al complesso delle faune delle località egiziane raggruppate dal BLANCKENHORN nella parte inferiore dell'Elveziano ,,. Ciò io posso confermare in base all'esame di altre collezioni di fossili della stessa provenienza, notando inoltre la presenza di due altre specie particolarmente significative al riguardo, e cioè il *Pecten Ziziniae* Blankenh. (ved. CH. DEPERET et J. ROMAN, *Monograph. des Pectinidès néogènes*, ecc., " Mém. Soc. G. de Fr. ,, Paléontol., Mém. N. 26, 1905, pag. 80, tav. IX, figg. 3-5) e *Placuna miocenica* Fuchs (T. FUCHS, *Beitr. z. Kenntniss d. Miocaenfauna Aegyptens u. d. libyschen Wüste,* " Palaeontographica ,, Bd. 30 (I), 1883, p. 44, tav. VIII, figg. 1-4).

valli più occidentali, in rapporto al fenomeno alluvionale e del terrazzamento, e al graduale estendersi del regime desertico. Per evoluzione geo-morfologica, che si iniziò colle abrasioni mesozoiche (1), l'Africa fin dal Cenozoico prese nelle linee fondamentali la sua fisionomia oro-idrografica per il modellamento dovuto all'intenso lavorìo erosivo delle correnti; ma questa fisionomia ricevette nuovi tratti nei tempi neozoici appunto per l'intervento delle suaccennate nuove cause modificatrici, segnatamente lungo il corso del Nilo, che, osserva De Martonne, è forse l'organismo fluviale più completo dei paesi caldi (2).

***

L'interesse che destano queste questioni mi hanno fuorviato dal modesto còmpito propostomi con queste note, e cioè della semplice enumerazione delle ossa fossili avute in esame. Ritornando all'argomento, desidero di far notare in primo luogo come l'accumulo degli ossami pliocenici di Anteopolis permetta di ritenere ragionevolmente che in questa parte del bacino del Nilo, nell'Alto Egitto, esistano depositi alluvionali pliocenici con fossili della fauna a vertebrati, già nota per rinvenimenti dei suoi avanzi ai due estremi dello sterminato bacino nilotico — alle prime e più interne sue origini e in prossimità del delta recente. — In secondo luogo desidero far osservare che i riferimenti specifici attribuibili, con prudenti esitazioni, agli ossami stessi accentuano i rapporti che già furono rilevati da altri autori tra la fauna continentale pliocenica africana, o più precisamente nilotica, e quella dei Monti di Siwalik. Il collegamento dell'Africa coll'Asia è antico, ma la storia geologica dell'Egitto, in particolare del Basso Egitto e dell'ultimo tratto del corso del Nilo, è intimamente connessa colle vicende della genesi del Mar Rosso. Fra le varie opinioni in proposito ricordo che, nel concetto formatosene da H. Douvillé (3), la divisione completa

---

(1) T. Taramelli e V. Bellio, *Geografia e Geologia dell'Africa*, Milano, (U. Hoepli), 1890, p. 172.

(2) E. De Martonne, *Traité de Géographie Physique*, 2e édit., 1913, p. 366.

(3) H. Douvillé, *Les foraminifères dans le Tertiaire des Philippines*, " The Philipp. Journ. of Science ", VI, Manila, 1911, pag. 78.

del bacino europeo da quello asiatico data dalla fine dell'Eocene per il sollevamento del Libano, sviluppatosi attraverso " la Mésogée ", separando il Mediterraneo dall'Oceano Indiano. Soltanto in epoca molto più recente, secondo lo stesso A., il costituirsi del Mar Rosso per poco non ristabilì la comunicazione fra i due mari; l'istmo di Sues conservando la stretta e bassa soglia emersa fra i due mari. Se non che, come risulta dal saggio paleogeografico dell'ISSEL, il collegamento si ristabilì effettivamente nel Quaternario antico per la maggior estensione assunta dall'Eritreo e sua comunicazione col Mediterraneo, che occupava tutto il Basso Egitto: soltanto in tempi più recenti il Mar Rosso si riduceva nei confini attuali, ed emergevano le depressioni istmiche.

Ecco l'elenco:

Mammiferi: *Equus*. — Parecchi denti molari della mascella superiore ed uno della mandibola: specialmente un molare superiore ben conservato (M. M. 3) per le dimensioni e la struttura lascia l'impressione che si tratti di avanzi dell'*E. Sivalensis* Falc. et Cant. (1); quella forma che il Forsyth Mayor ritiene identica all'*E. Stenonis* Cocchi. Vi appartiene fors'anche la parte inferiore di un osso metacarpico.

Sus. — Mascellare superiore sinistro, incompleto, coi tre ultimi molari posteriori; ben conservati i due ultimi: con dimensioni di poco minori, corrisponde strettamente alla figura che della stessa mascella fu data dal Gaudry (2) per il *Sus erymanthius* Roth et Wagner, meglio che alla parte corrispondente dell'affine *Sus hysudricus* Falc. et Cant. (3), per la forma più stretta ed allungata dell'ultimo molare.

Hippopotamus. — Andrews e Stromer attribuiscono gli avanzi di ippopotamo dell'Uadi Natron al *Hipp. hipponensis*

---

(1) H. FALCONER a. P. T. CANTLEY, *Fauna antiqua sivalensis being the fossil Zoology of the Sewalik Hills in the Nord of Indie*, London, Part. IX, 1849, tav. 81, 82. — C. MURCHISON, *Descript. of the Plates of the Fauna antiqua sivalensis from Notes and Memoranda by H. Falconer*, London, 1848, p. 104.

(2) A. GAUDRY, *Les enchaînem. du Monde Animal. Mammif. tert.*, 1878, p. 70, fig. 81.

(3) H. FALCONER a. P. T. CANTLEY, *Op. cit.*, VIII, 1847, tav. 71, fig. 5. — R. LYDEKKER, *Indian Tertiary and Post-tertiary Vertebrata*. Palaeontol.-Indica, " Mem. Geol. Survey of India ", III (Ser. X), 1884-86, tav. VIII.

Gaudry, alla quale specie ritengo non riferibili i numerosi resti trovati a Anteopolis, a giudicare dalle evidenti differenze nei caratteri dei denti incisivi ed in particolare dei canini. I due più grandi canini incompleti, uno dei quali enorme, presentano rispettivamente nella sezione trasversa il massimo diametro di mm. 80 e 55, e il più grande degli incisivi, a sezione subcircolare-sinuosa, mm. 50. I canini sono contraddistinti da cordonature, meglio che scanalature, longitudinali abbastanza regolari, da due leggere sinuosità longitudinali sul lato esterno della curva e da un profondo e largo solco diretto nello stesso senso sul lato interno, di guisa che la sezione trasversa ripete la figura subtriloba data dagli autori come propria dei canini del *Hipp.* (Hexaprotodon) *sivalensis* Falc. et Cant. (1); e per questo riguardo è rassicurante il confronto colle figure di questi autori. — Per certo questi denti non appartengono al *H. annectens* Falc., col quale il Pomel confrontò certi avanzi provenienti dal Basso Egitto. — Nè contraddice al riferimento alle specie di Falconer e Cantley l'esame di altre parti dello scheletro rappresentate da ossa in qualche caso complete e ben conservate, ma per lo più incomplete.

Del cranio sono rappresentate quest'altre parti, di individui adulti e giovani: Mascellare sup. destro, parte posteriore coi due ultimi molari. Frammenti di mandibola, branca destra; uno coll'ultimo molare ben conservato. Frammento di mandibola, branca sinistra, estremità anteriore. Frammento del premascellare sinistro. Due ultimi molari superiori. Mento, frammento destro. Zigomatico destro. Temporale, destro e sinistro. Rocca petrosa, destra e sinistra. Occipitale, framm. della parte sup., media, posteriore e i due condili, destro e sinistro.

Della colonna vertebrale si hanno: una vertebra cervicale (2ª), due dorsali (3ª e terz'ultima), una caudale ed anche la porzione articolare della seconda costola sinistra e della quarta costola destra. — Degli arti anteriori: scapola destra (giov.) e sinistra (adulto e giov.); omero sinistro, estremità superiore (2 pezzi, adulto e giovane), estremità inferiore (4 pezzi, 1 di adulto); omero destro, estrem. sup.; cubito destro, parte super. (giov.); radio destro, parte super. (2 pezzi, adulto e giov.); uncinato;

---

(1) H. Falconer a. P. T. Cantley, *Op. cit.*, part. VII, 1847, tav. 62, p. 82.

tre falangi. — Degli arti posteriori e bacino: frammento iliaco destro; cavità glenoidea sinistra (giov.); femore destro, estremità infer.; tibia sinistra (ind. adulto) estrem. super., e destra (2 pezzi) estrem. super.; calcagno sinistro (2 pezzi); astragalo sinistro (2 pezzi); due pezzi del metatarso.

Fra i diversi vertebrati, riconosciuti colle ossa trovate a Anteopolis, quello rappresentato da maggior numero di avanzi è, senza confronto, l'ippopotamo.

Camelus. — Riconosco di questo genere: omero sinistro, estremità inferiore (ind. adulto); metacarpo destro, estremità superiore (adulto); tibia sinistra, tre estrem. inferiori (adulto); astragalo destro e sinistro. Questi avanzi non mi bastano per verificare le eventuali corrispondenze col *C. Sivalensis* Falc. et Cantl., o col *C. antiquus* Lyd. della fauna sivalense.

Cervus. — Il solo dente premolare della mascella superiore (P.[4]) e un calcagno incompleto mi permettono di ritenere che si tratti di una forma del gen. *Cervus* di notevole statura.

Camelopardalis. — Appartengono a questo genere: tarso destro incompleto; articolazione inferiore del radio destro; astragalo destro; falangine, anteriore e posteriore. La statura della specie doveva essere ad un di presso quella della vivente *C. Giraffa*; ma evidentemente questi avanzi sono insufficienti per la determinazione specifica e per un ravvicinamento all'una o all'altra delle giraffe della fauna sivalense, o, più in generale, delle faune mio-plioceniche.

Boselaphus? — Parecchie caviglie (ossiconi) delle corna, un frammento di mascella superiore, vertebra cervicale (2ª), estremità superiore di tibia destra, una falange si ritengono appartenenti ad individui di una grande f. antilopina, probabilmente del genere *Boselaphus* (Portax) a giudicare dalle caviglie molto somiglianti a quelle del *Boselaphus probubalis* Pomel (1). Non ho elementi per venire a confronti più concludenti col *B. Tragocamelus* (Pall.) e col *B. nomadicus* (Rüt.): nè posso escludere che qualcuno di questi avanzi spetti al gen. *Hippotragus*, ricordando come fra gli avanzi della fauna dell'Uadi Natron l'Andrews annoveri lo *H. Cordieri* De Christol.

---

(1) A. Pomel, *Paléontol. Monograph.*, Carte géol. de l'Algérie, Alger, 1894. — (Les Bosélaphes Ray).

Bos. — Sonvi denti isolati, molari della mascella superiore e della mandibola; vertebre, atlante e cervicali; radio-cubito destro e radio, estremità super.; metatarsi; femori, sinistro e destro, estremità super. ed infer.; tibia destra, estremità sup.; astragali e calcagno destro. Con questi pezzi, non disponendo di buon materiale fossile di confronto, non so arrischiarmi a determinazioni specifiche, nè generiche. Per certe ossa, appartenenti a forme di grande taglia, posso notare la somiglianza colle corrispondenti del gruppo del *Bison*; altre meglio si avvicinano a quelle del gruppo *Bibos* (Yack, *B. grunniens*); dei quali generi il primo fa parte della fauna di Siwalik (*B. sivalensis* Falc.) e l'altro della fauna pleistocenica pure dell'India.

Felis? — Spettano ad una fiera: scapola destra; vertebra, ultima cervicale; tibia destra e sinistra, estremità super.; calcagno. Il riferimento al gen. *Felis* è affatto incerto, non potendosi escludere che queste ossa, tutte o in parte, siano piuttosto riferibili al gen. *Machaerodus*.

Uccelli. — Oltre un femore destro incompleto (metà inferiore) di struzzionide, che per il suo stato di fossilizzazione si differenzia da tutti gli altri ossami, e che probabilmente appartenne ad un giovane individuo del comune Struzzo africano, sono da ricordare parecchie piccole ossa, frammentizie ed indeterminabili, di uccelli.

Rettili: *Crocodilus.* — Un perone e due frammenti di mandibola (destro e sinistro) di giovane individuo; mancano i denti. Nel confronto coi due coccodrilli della fauna sivalense, *C. palaeindicus* Falc. e *C. sivalensis* Lyd., propenderei per avvicinare questi resti alla prima specie, pur avvertendo l'insufficienza di questi avanzi per una fondata determinazione specifica.

Trionychidae. — Appartengono indiscutibilmente a testuggini fluviali pochi pezzi ben conservati delle ossa dermiche, rugose, dello scudo dorsale. I caratteri della superficie rugosa permettono il riferimento alla *Emyda sivalensis* Lyd.; tranne per uno dei pezzi che ha piuttosto i caratteri proprii della *Trionyx* sp. (Lydekker) pure della fauna di Siwalik (1).

Pesci: *Teleostomi.* — Undici vertebre ottimamente conservate, delle quali parecchie corrispondono in modo perfetto per

---

(1) R. Lydekker, *Op. cit.*, X, vol. III, tav. XXVI e XXVII.

la forma e per l'aspetto a quella proveniente dal corso inferiore dell'Omo, riprodotta in fotografia da Haug nella Tav. CXXX del suo *Trattato*, e attribuita ai Siluridi (1). Qualche esemplare ha dimensioni maggiori; altre vertebre sono di poco più piccole e di spessore proporzionalmente assai minori. I giacimenti fossiliferi neogenici di Sivalik contengono anche avanzi di siluridi. Lydekker li riferisce a generi tuttora viventi; ma, poichè non figura vertebre, bensì altre parti dello scheletro, non ho alcun dato per verificare se queste vertebre di Anteopolis siano riferibili all'uno o all'altro dei generi da questo A. considerati (2). Più utile per il riferimento generico riesce il confronto colla Memoria del Priem (3) sui siluridi del Terziario superiore e degli strati recenti dell'Egitto. La nostra bella serie di vertebre ha esatto riscontro con quella riprodotta fotograficamente nella sua Tav. V e proveniente da Scialuf (Miocene sup., secondo Fourtau) e dalla regione dello Tsad. Fr. Priem, il noto e reputato paleoittiologo, dice di non sapere a quali Teleostomi rapportare queste vertebre: esse potrebbero appartenere sia a *Lates*, sia a siluridi, ma egli propende ad attribuirle piuttosto al gen. *Lates* (4).

---

(1) E. Haug, *Traité de Géologie*, II (1908-11), p. 1727.

(2) R. Lydekker, *Op. cit.*, 1884-86, tav. XXXVI e XXXVII.

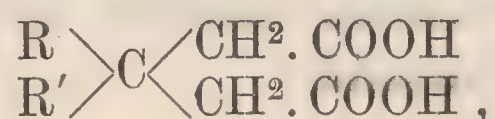
(3) J. Priem, *Op. cit.*, p. 10.

(4) Il Museo di Torino possiede un bell'esemplare di cranio di *Lates*, con questa indicazione: = Canale di Suez, Scialuf, 1869, ing. Gioia =. Corrisponde perfettamente ai campioni di Fayoum e di Scialuf, attribuiti al Quaternario, illustrati dal Priem (Op. cit., pag. 7, tav. I, figg. 1-2), il quale ritiene questi avanzi probabilmente appartenenti ad una forma identica al vivente *Lates niloticus* Hasselquist; superbo percoide, comune nelle acque del Nilo, specialmente fra le roccie della prima e della seconda cateratta, per il quale gli antichi egizi sembra avessero la più grande venerazione (Lartet et Gaillard, op. cit., VIII, p. 188, fig. 81, 82; X, p. 138).

Nuovi acidi ββ dialchilglutarici

Comunicazione II del Socio nazionale residente I. GUARESCHI

In una prima mia nota (1) presentata a questa Accademia nel 1901, ho esposto un metodo generale per ottenere dei nuovi acidi glutarici e precisamente gli acidi ββ dialchilici:

$$\begin{matrix} R \\ R' \end{matrix} > C < \begin{matrix} CH^2.COOH \\ CH^2.COOH \end{matrix},$$

dei quali non era conosciuto che l'acido ββ dimetilglutarico:

$$\begin{matrix} CH^3 \\ CH^3 \end{matrix} > C < \begin{matrix} CH^2.COOH \\ CH^2.COOH \end{matrix}$$

ottenuto con metodi più difficili da mettersi in pratica e di rendita assai piccola.

Col mio metodo invece si ottiene l'acido ββ dimetilglutarico ed omologhi in quantità quanto si vuole.

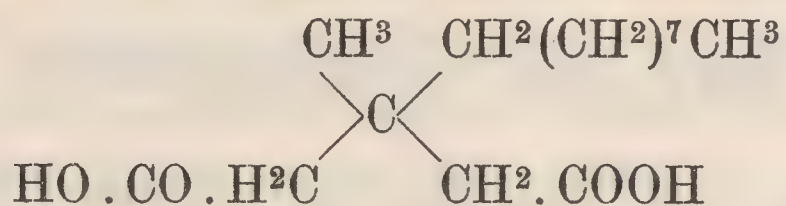
I derivati glutarici hanno ora importanza anche per la biologia; derivati glutarici quali la glutamina, l'acido glutaminico, l'acido ossiglutarico (2) trovansi fra i prodotti di scissione delle sostanze albuminoidi.

---

(1) I. Guareschi, *Acidi ββ dialchilglutarici e β alchil γ cianvinilacetici*. Nota I, " Atti R. Accad. Sc. Torino ", 1901, t. XXXVI.

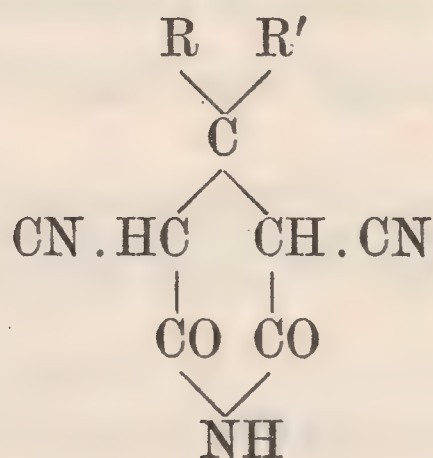
(2) Habermann e Ehrenflad, " Zeits. f. physiol. Chem. ", 1902, t. 35, p. 231.

Ha pure importanza il fatto che molti di questi acidi sono isomeri con gli acidi omologhi superiori dell'acido succinico i quali si trovano fra i prodotti di ossidazione dei grassi; tale sarebbe il mio acido *metilnonilglutarico*:

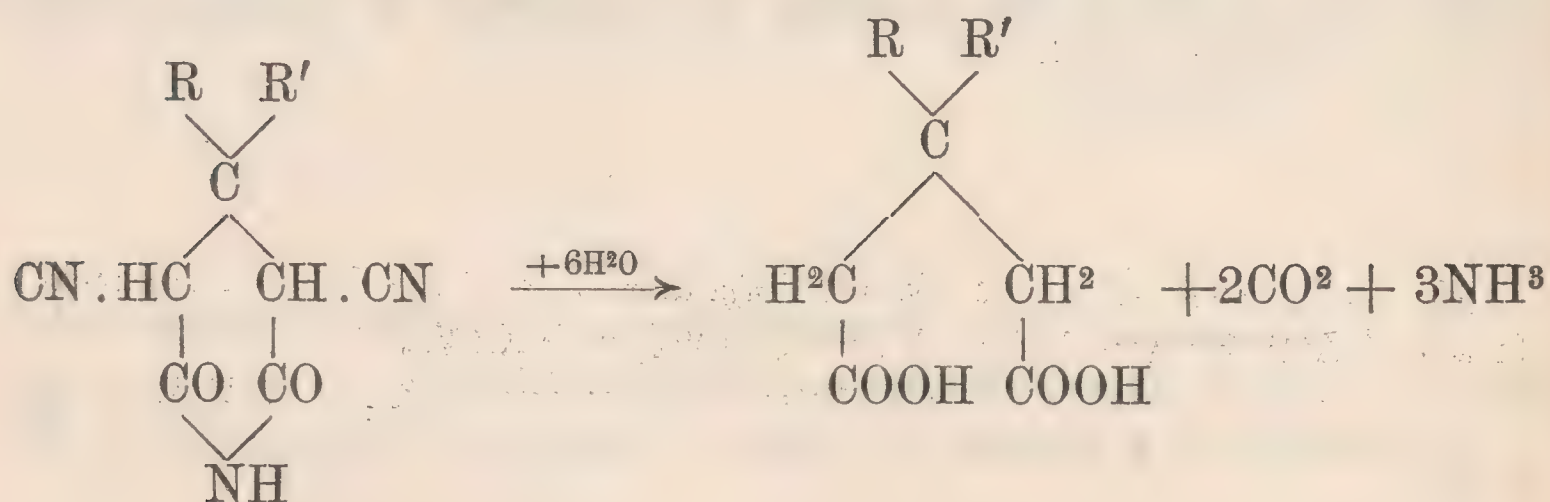
$$\begin{array}{ccc} CH^3 & & CH^2(CH^2)^7CH^3 \\ & \diagdown C \diagup & \\ & \diagup \quad \diagdown & \\ HO.CO.H^2C & & CH^2.COOH \end{array}$$

$= C^{15}H^{28}O^4$ e che ora descriverò. Esso è l'omologo inferiore dell'*acido rocellico* $C^{17}H^{32}O^4$.

Gli acidi glutarici bisostituiti hanno oggi grande importanza anche per le relazioni che si osservano coi prodotti ottenuti dalla canfora e dalla santonina ed è probabile che si otterranno per sintesi dei corpi simili a questi.

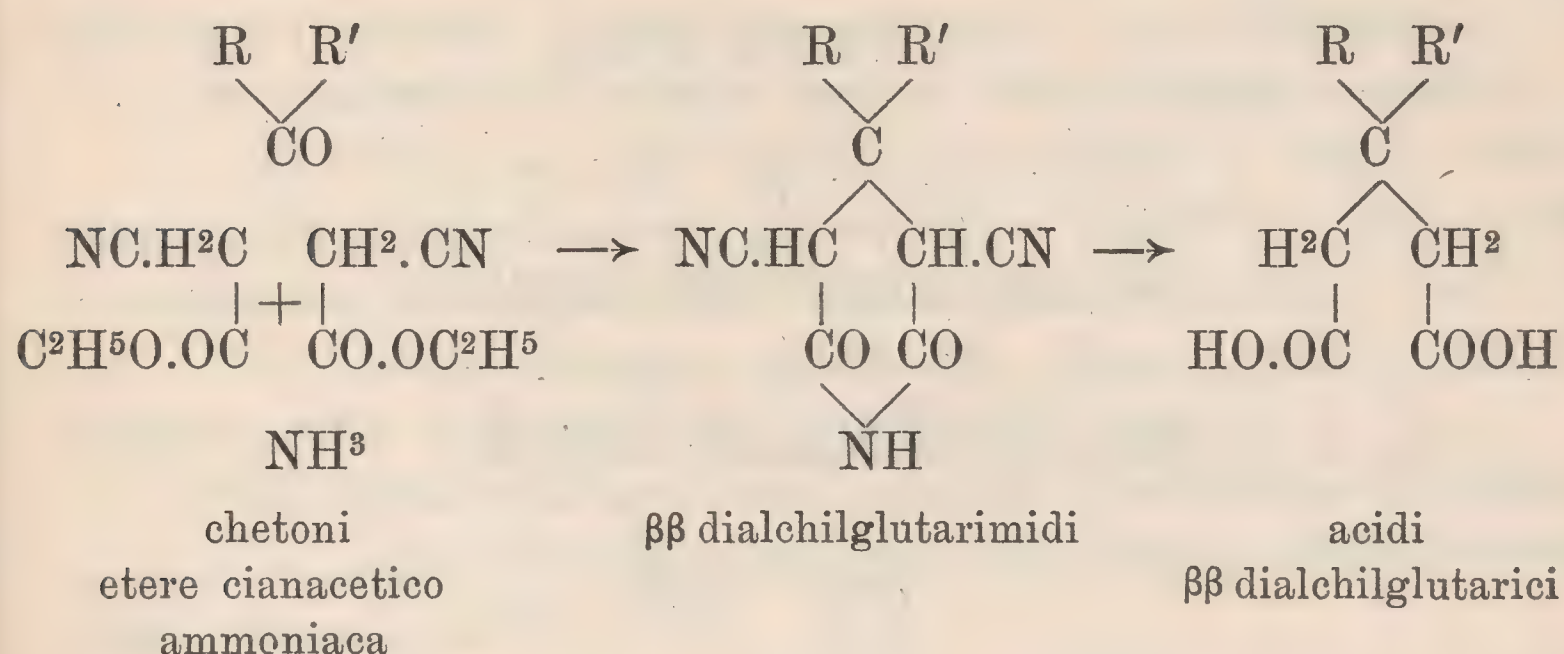
Il mio metodo generale consiste nel preparare prima le ββ dialchil αα' dicianglutarimidi:

$$\begin{array}{ccc} R & & R' \\ & C & \\ CN.HC & & CH.CN \\ | & & | \\ CO & & CO \\ & NH & \end{array}$$

e poi nell'idrolizzare questi composti per ebollizione con acido solforico al 60 %.

La reazione generale è la seguente:

$$\begin{array}{ccc} R & & R' \\ & C & \\ CN.HC & & CH.CN \\ | & & | \\ CO & & CO \\ & NH & \end{array} \xrightarrow{+6H^2O} \begin{array}{ccc} R & & R' \\ & C & \\ H^2C & & CH^2 \\ | & & | \\ COOH & & COOH \end{array} + 2CO^2 + 3NH^3$$

Questo è l'unico metodo generale che si abbia per preparare tutti gli acidi ββ dialchilglutarici, e può essere riassunto colle trasformazioni seguenti:

$$
\begin{array}{c}
R \quad R' \\
\diagdown\!\diagup \\
CO \\
NC.H^2C \quad CH^2.CN \\
| + | \\
C^2H^5O.OC \quad CO.OC^2H^5 \\
NH^3
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{c}
R \quad R' \\
\diagdown\!\diagup \\
C \\
\diagup\!\diagdown \\
NC.HC \quad CH.CN \\
| \quad\quad | \\
CO \quad CO \\
\diagdown\!\diagup \\
NH
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{c}
R \quad R' \\
\diagdown\!\diagup \\
C \\
\diagup\!\diagdown \\
H^2C \quad CH^2 \\
| \quad\quad | \\
HO.OC \quad COOH
\end{array}
$$

chetoni / etere cianacetico / ammoniaca — ββ dialchilglutarimidi — acidi ββ dialchilglutarici

Questo metodo serve per preparare anche degli acidi glutarici a peso molecolare molto elevato quale è l'acido *metilnonilico* sopraccennato:

$$
\begin{matrix} CH^3 \\ C^9H^{19} \end{matrix} \!>\! C \!<\! \begin{matrix} CH^2.\,COOH \\ CH^3.\,COOH. \end{matrix}
$$

Nella mia prima nota ho descritto gli acidi ββ dimetilglutarico, ββ metiletilico, ββ metilpropilico, ββ metilbutilico e ββ dietilico. Questi miei acidi trovansi ora accennati anche in recenti Trattati di chimica, quali a cagion d'esempio, quelli di Richter-Anschütz (1) e di V. Meyer-Jacobson (2).

Essendochè molto probabilmente non riprenderò più questo studio, così ora pubblico queste vecchie ricerche, già fatte sino dal 1902.

---

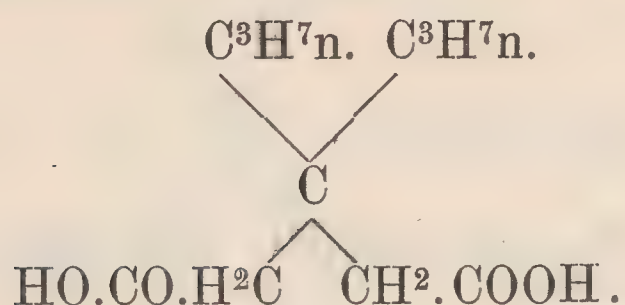
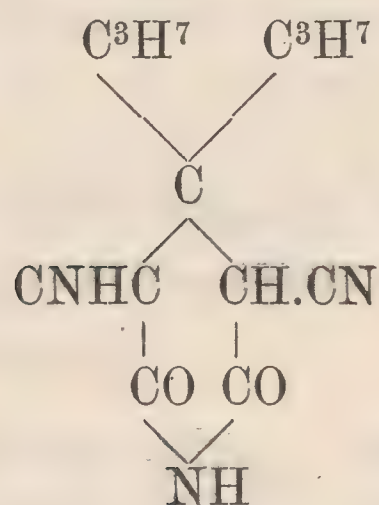
(1) V. Richter-Anschütz, *Traité de Chim. org.*, trad. franc., 1910, vol. I, p. 629.

(2) V. Meyer e Jacobson, *Lehrb. d. org. Chem.*, 1909, 2ª ediz., vol. I, Parte II, p. 387.

1. — Acido ββ dipropilglutarico

$$\begin{array}{c} C^3H^7n. \quad C^3H^7n. \\ \diagdown \;\; \diagup \\ C \\ \diagup \;\; \diagdown \\ HO.CO.H^2C \quad CH^2.COOH. \end{array}$$

Gr. 2 di ββ dipropil αα′ dicianglutarimide

$$\begin{array}{c} C^3H^7 \quad C^3H^7 \\ \diagdown \;\; \diagup \\ C \\ \diagup \;\; \diagdown \\ CNHC \quad CH.CN \\ | \qquad | \\ CO \; CO \\ \diagdown \diagup \\ NH \end{array}$$

furono fatti bollire per 3 ore con 30 cm³ di acido solforico al 60 %. A poco a poco tutto si scioglie con effervescenza. Dopo 2-3 ore la reazione è terminata. Lasciato raffreddare il liquido si ha una crosta cristallina e degli aghi bianchi. Diluisco con acqua ed estraggo con etere, il quale lavato e distillato lascia un bel residuo bianchissimo cristallino che pesa 1,55, mentre la teoria dà 1,7. In altre preparazioni ottengo 1,6 gr. di prodotto.

L'acido ββ dipropilglutarico puro fonde a 112°-113°. Cristallizza bene dall'acqua bollente. In un'altra preparazione da 3,1 gr. di ββ dipropildicianglutarimide ottenni 2,5 di acido (teoria 2,63).

Gr. 0,1640 di sostanza diedero 0,3710 di CO^2 e 0,1368 di H^2O, cioè:

		trovato	calcolato per $C^{11}H^{20}O^4$
C	=	61,68	61,11
H	=	9,2	9,25

Quest'acido cristallizza bene dall'acqua bollente. È solubile nell'alcol e nell'etere, pochissimo nell'acqua fredda. Fonde a 112°-113° e scaldato più oltre si volatilizza senza lasciare residuo e rimane incoloro. I vapori eccitano la tosse. Fonde nell'acqua bollente. Il suo sale ammonico è solubilissimo.

La soluzione del sale ammonico dà le reazioni seguenti:

Col *cloruro di calcio* nessun precipitato a freddo, ma a caldo si ha istantaneamente precipitato cristallino che ricorda l'ossalato calcare e che difficilmente si ridiscioglie a freddo.

Col *nitrato d'argento* precipitato bianco quasi insolubile anche a caldo e formato da minutissimi aghi.

Col *cloruro di bario* non precipita nè a freddo nè a caldo.

Col *solfato di rame* precipitato abbondante azzurro-verdognolo microcristallino.

Coll'*acetato neutro di piombo* precipitato bianco, abbondantissimo, microcristallino.

Col *solfato di zinco* dà precipitato anche in soluzione molto diluita ed il precipitato è insolubile nell'acqua anche bollente.

Questo sale di zinco dell'acido ββ dipropilglutarico è anidro e fu analizzato:

Gr. 0,2431 di sale secco a 110° diedero 0,0718 di ZnO.

Cioè:

	trovato	calcolato per $C^{11}H^{18}O^4Zn$
Zn °/o	23,27	23,40

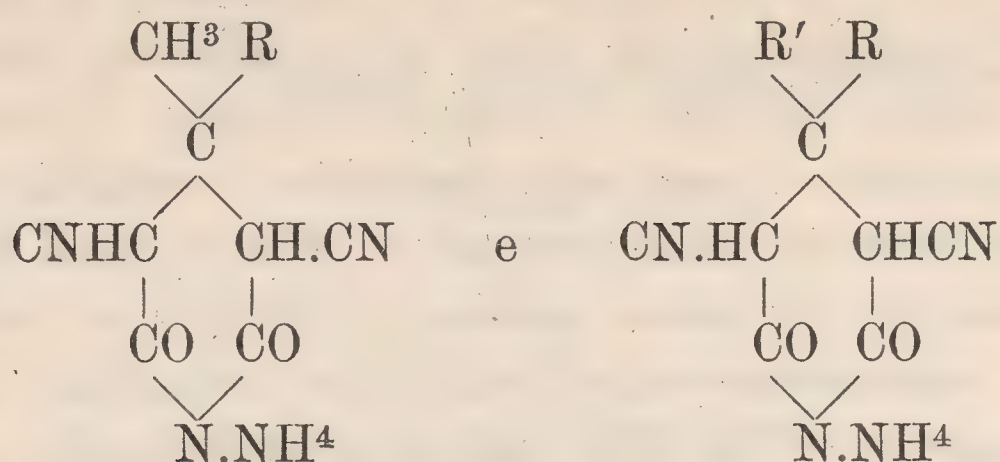
Col *cloruro ferrico* la soluzione del sale ammonico dà abbondante precipitato giallastro voluminoso.

Questo acido anche accuratamente neutralizzato con ammoniaca, oppure lasciata la soluzione lievemente acida ancora, non sviluppa affatto il *propano* C^3H^8, il quale invece, come ho dimostrato sino dal 1901 (1) si sviluppa quando si neutralizza con ammoniaca la ββ dipropil αα' dicianglutarimide dalla quale proviene l'acido ββ dipropilglutarico. In modo simile si comportano gli altri acidi ββ alchilglutarici.

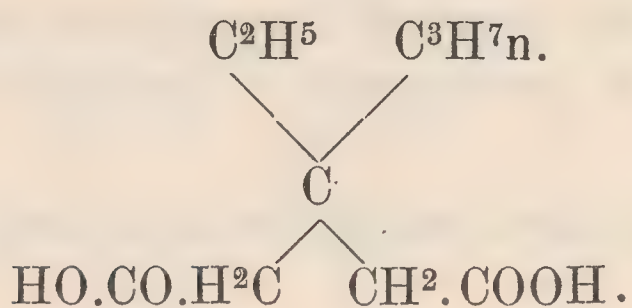
---

(1) I. Guareschi, *Sintesi di composti piridinici e trimetilenpirrolici.* " Mem. R. Acc. Torino ", 1901, II, vol. L, p. 268.

È sempre per me un problema curioso questo, che mentre i composti:

```
      CH³ R                      R′ R
       \ /                        \ /
        C                          C
       / \                        / \
  CNHC     CH.CN      e     CN.HC    CHCN
     |     |                    |     |
     CO    CO                   CO    CO
       \  /                       \  /
       N.NH⁴                      N.NH⁴
```

essendo $R = C^2H^5$, C^3H^7, ecc. e $R' = C^2H^5$, C^3H^7, ecc. si scompongono con sviluppo di C^nH^{2n+2}, i sali di ammonio degli acidi dialchilglutarici corrirpondenti non si alterano.

2. — Acido ββ etilpropilglutarico

```
          C²H⁵    C³H⁷n.
              \  /
               C
              / \
  HO.CO.H²C       CH².COOH.
```

Scaldando 1 p. di ββ etilpropildicianglutarimide con 20 p. di acido solforico concentrato si manifesta viva effervescenza con sviluppo di anidride carbonica, prima ancora che il liquido veramente bolla. Dopo circa 3 ore la reazione è terminata. Per raffreddamento si separa alla superficie un olio che si solidifica in crosta cristallina. Separata la crosta si estrae il liquido coll'etere. Si ottiene circa il 90 % di prodotto che si ricristallizza bene dall'acqua bollente.

L'acido ββ etilpropilglutarico cristallizza in aghi appiattiti o in lunghe lamine, incolore. Ha reazione acidissima. È poco solubile nell'acqua fredda, solubile in alcol ed etere. Fonde a 71°-72° in liquido incoloro.

Il sale d'argento diede:

Gr. 0,4887 fornirono gr. 0,2520 di Ag. Da cui:

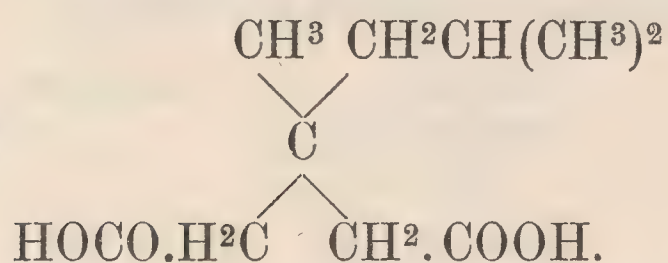
	trovato	calcolato per $C^{10}H^{16}Ag^2O^4$
Ag %	51,56	51,88

L'acido nel vuoto sull'ac. solf., non perde di peso.

Gr. 0,0532 richiesero 5,25 cm^3 di soluz. $\frac{N}{10}$ di NaOH da cui:

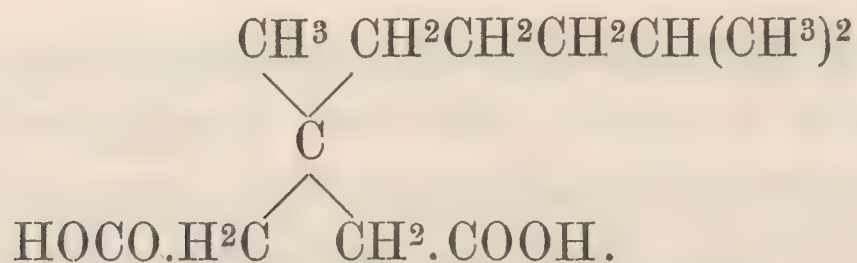
	trovato	calcolato per $C^8H^{16}COOH$
Na^2OH %	39,5	39,6

3. — Acido ββ metilisobutilglutarico

$$\begin{array}{c} CH^3 \quad CH^2CH(CH^3)^2 \\ \diagdown \diagup \\ C \\ \diagup \diagdown \\ HOCO.H^2C \quad CH^2.COOH. \end{array}$$

Questo isomero dell'acido metilbutilglutarico già descritto, si ottiene facendo bollire per 3 a 4 ore 2,5 gr., di metilisobutil αα' dicianglutarimide fusibile a 241°-242°, con 50 cm^3 di acido solforico al 60 %. Si nota effervescenza per CO^2 sviluppato, poi la massa si scioglie, il liquido intorbida e alla superficie si separa un olio. Dopo raffreddamento si diluisce il liquido e si estrae con etere il quale dopo essere stato ben lavato e distillato fornisce un residuo oleoso che poi cristallizza. Il prodotto seccato nel vuoto sull'acido solforico pesava 2.1; quantità teorica 2.16.

Non contiene azoto e fonde a 63°-65°.

4. — Acido ββ metilisoessilglutarico

$$\begin{array}{c} CH^3 \quad CH^2CH^2CH^2CH(CH^3)^2 \\ \diagdown \diagup \\ C \\ \diagup \diagdown \\ HOCO.H^2C \quad CH^2.COOH. \end{array}$$

3 gr. di metilessildicianglutarimidi furono fatti bollire con 60 cm^3 di acido solforico al 60 %. Si opera come fu detto precedentemente. Ottengo 2,5 gr. di prodotto, mentre la teoria dà 2,6. Si forma dunque anche qui la *quantità teorica*. Il nuovo

acido cristallizza dall'alcol e anche da molt'acqua bollente. Fonde a 62°-63°.

La soluzione acquosa neutralizzata con ammoniaca fornisce il sale d'argento bianchissimo.

Il nuovo acido che cristallizza dall'acqua, è solubile in circa 440 p. di acqua a 15°.

Questo sale d'argento dell'acido ββ metilisoessilglutarico fu analizzato:

Gr. 0,1900 fornirono gr. 0,0920 di Ag. Cioè:

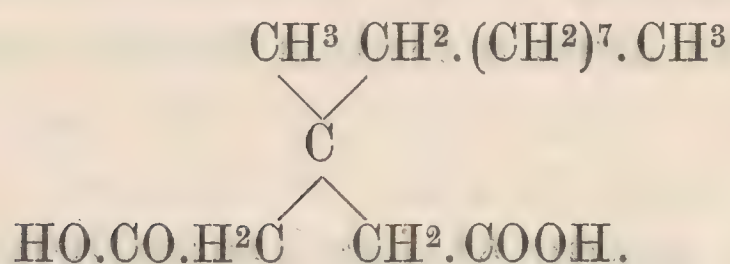
	trovato	calcolato per $C^{12}H^{20}Ag^2O^4$
Ag %	48,3	48,6

Nelle stesse condizioni dall'acido neutralizzato e trattato col solfato di zinco si ha il sale di zinco.

Gr. 0,4706 fornirono gr. 0,1323 di ZnO. Cioè:

	trovato	calcolato per $C^{12}H^{20}ZnO^4$
Zn %	22,5	22,15

5. — Acido ββ metilnonilglutarico

$$\begin{array}{c} CH^3 \quad CH^2.(CH^2)^7.CH^3 \\ \diagdown\ \diagup \\ C \\ \diagup\ \diagdown \\ HO.CO.H^2C \quad CH^2.COOH. \end{array}$$

Gr. 5,5 di ββ metilnonil αα' dicianglutarimide furono fatti bollire per circa 9 ore con 100 cm³ di acido solforico al 60 %.

L'imide fonde e sta alla superficie come un olio. Agitando la miscela si sviluppa CO^2. Dopo raffreddamento si ha una crosta cristallina che si estrae con etere. Dall'etere si hanno larghe lamine incolore, grasse al tatto, quasi affatto insolubili nell'acqua, solubili nell'alcol e nell'etere. Quest'acido fonde a 46°,5-47°,5.

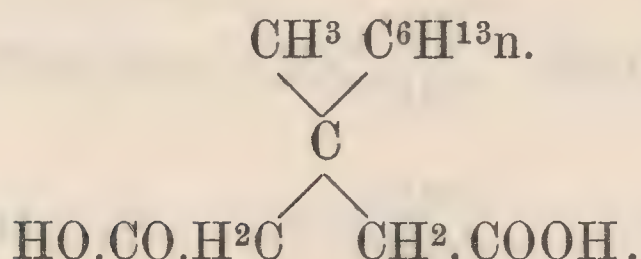
L'acido ββ metilnonilglutarico è anidro.

Gr. 0.1100 di sostanza disseccata nel $CaCl^2$ fornirono 0,2680 di CO^2 e 0,1055 di H^2O:

Cioè:

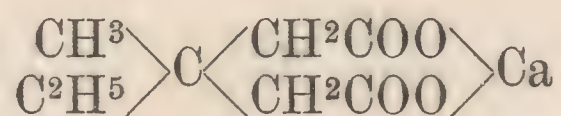
		trovato	calcolato per $C^{15}H^{28}O^4$
C	=	66,45	66,17
H	=	10,65	10,29

6. — Acido ββ metilessilglutarico

$$\begin{array}{c} CH^3 \quad C^6H^{13}n. \\ \diagdown\ \diagup \\ C \\ \diagup\ \diagdown \\ HO.CO.H^2C \quad CH^2.COOH. \end{array}$$

Gr. 6,6 di ββ *metilessil* αα′ *dicianglutarimide* furono fatti bollire a ricadere con 130 cm^3 di acido solforico al 60 %. Dopo un quarto d'ora di ebollizione la sostanza è sciolta, forma un olio alla superficie poi si intorbida. Si sviluppa CO^2. Dopo 4 $^1/_2$ ore la reazione è terminata. Si diluisce e si estrae con etere, il quale ben lavato e distillato lascia un residuo oleoso che poi cristallizza e si dissecca nel vuoto sull'acido solforico. Il prodotto pesa 5,5 mentre la teoria indica 5,7 gr. Fonde a 50°-60°; ma contiene ancora un poco di azoto a perciò lo rifaccio bollire ancora per 3 ore con 40 cm^3 di acido solforico al 60 %. Operando come ho già detto ottengo il prodotto puro cristallino che fonde a 52°-53° e pesa 5,3 gr. Si può ricristallizzare dall'alcol diluito.

Inutile ora che io accenni ad altri acidi simili preparati col medesimo metodo.

Avevo incominciato lo studio dei sali di calcio di questi acidi con lo scopo di ottenere dei chetoni ciclici con due radicali alcolici ottenuti al medesimo atomo di carbonio. Dall'acido ββ *metiletilglutarico* ottenni il sale di *calcio* anidro:

$$\begin{array}{c} CH^3 \\ C^2H^5 \end{array} > C < \begin{array}{c} CH^2COO \\ CH^2COO \end{array} > Ca$$

e con 7 $^1/_2$ H^2O, per ottenere il *chetone*:

$$\begin{matrix}CH^3\\C^2H^5\end{matrix}\!>\!C\!<\!\begin{matrix}CH^2\\CH^2\end{matrix}\!>\!CO,$$

ma ho dovuto interrompere queste ricerche.

Se si confrontano i punti di fusione dei vari acidi da me ottenuti e descritti nella prima e in questa seconda comunicazione si osservano alcune relazioni, benchè di lieve importanza:

acido ββ	$\begin{matrix}CH^3\\CH^3\end{matrix}\!>\!C\!<$	f. 103°-104°
» »	$\begin{matrix}C^2H^5\\C^2H^5\end{matrix}\!>\!C\!<$	» 108°
» »	$\begin{matrix}C^3H^7\\C^3H^7\end{matrix}\!>\!C\!<$	» 112°-113°.

Vi è un accrescimento graduale di 4°.

Acido ββ	$\begin{matrix}CH^3\\C^2H^5\end{matrix}\!>\!C\!<$	f. 87°
» »	$\begin{matrix}C^2H^5\\C^2H^5\end{matrix}\!>\!C\!<$	» 108°
» »	$\begin{matrix}C^2H^5\\C^3H^7\end{matrix}\!>\!C\!<$	» 71°-72°.

Il derivato dietilico ha il punto di fusione più basso.

Acido ββ	$\begin{matrix}CH^3\\C^3H^7\end{matrix}\!>\!C\!<$	f. 92°
» »	$\begin{matrix}C^2H^5\\C^3H^7\end{matrix}\!>\!C\!<$	» 71°-72°
» »	$\begin{matrix}C^3H^7\\C^3H^7\end{matrix}\!>\!C\!<$	» 112°-113°.

Restando costante un gruppo alcolico e variando l'altro, si osserva un graduale abbassamento nel punto di fusione eccetto pel derivato metilpropilico:

acido ββ	dimetilico	f.	103°-104°
„ „	metiletilico . . .	„	87°
„ „	metilpropilico . .	„	92°
„ „	metilbutilico . . .	„	64°-65°
„ „	metilisobutilico . .	„	63°-65°
„ „	metilessilico . . .	„	52°-53°
„ „	metilnonilico . . .	„	46°,5-47°,5.

Non ho potuto vedere se coi miei acidi ββ $\begin{matrix} R \\ R' \end{matrix} \!>\! C \!<\! \begin{matrix} CH^2.COOH \\ CH^2.COOH \end{matrix}$ si hanno le due forme isomere come cogli acidi αα e αα'.

Torino. R. Università. Maggio 1918.

L'Accademico Segretario
CARLO FABRIZIO PARONA

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona. Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di **C. Frati, A. Baudi di Vesme** e **C. Cipolla.**

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in-f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di **C. Cipolla, G. De Sanctis** e **P. Fedele.**

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in-4° di 70 pagg. e 96 tav.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza del 12 Maggio 1918 . *Pag.* 457

GERBALDI (F.). — Simmetria e periodicità nelle frazioni continue di Halphen (Nota I) . . . . „ 459

TANTURRI (Alberto). — Sui prodotti infiniti $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots$ e $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\ldots$ . . . . „ 477

MAIORANA (Quirino). — Influenza del movimento di uno specchio o della sorgente sulla propagazione della luce . . . . „ 485

PARONA (C. F.). — Ragguagli sopra gli ossami fossili trovati in una tomba presso Anteopolis (Monti di Gau, Alto Egitto) . „ 511

GUARESCHI (Icilio). — Nuovi acidi ββ dialchilglutarici (Nota II) „ 523

Tip. Vincenzo Bona - Torino

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. LIII, Disp. **14ª**, **1917-1918**.

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 3.
1918

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 26 Maggio 1918

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. COMM. ANDREA NACCARI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci Segre, Jadanza, Guareschi, Guidi, Grassi, Somigliana, Panetti, Sacco, Majorana e Parona Segretario.

Scusano l'assenza: il Direttore della Classe Senatore D'Ovidio e il Socio Mattirolo, assenti per dovere d'ufficio.

Si legge e si approva l'atto verbale della precedente adunanza.

Il Segretario comunica la lettera, giunta da S. Paolo (Brasile), colla quale il Prof. A. Bovero ringrazia per la sua nomina a Socio corrispondente.

Si presentano le seguenti Note:

Socio F. Sacco: *Il glacialismo antico e moderno del Cervino*, parte prima, *sviluppo preistorico*.

Socio I. Guareschi: *Ricerche sull'acqua di cristallizzazione, composti con* $2H^2O$ *e con* $3H^2O$, Nota IV.

Prof. F. Gerbaldi: *Simmetria e periodicità nelle funzioni continue di Halphen*, Nota II presentata dal Socio Segre.

Ing. F. Burzio: *La 2ª approssimazione della soluzione del 2° problema balistico*, Nota presentata dal Socio Panetti.

I Soci presentatori riassumono sommariamente le Note, che sono accolte per la stampa negli *Atti*.

LETTURE

Il Glacialismo antico e moderno del Cervino

Nota I del Socio nazionale residente Prof. FEDERICO SACCO

(Con una Tavola)

La gigantesca mirabile mole del Cervino non presenta ora ghiacciai (almeno dal lato italiano) pari all'imponenza della sua massa rocciosa, mentre lo sviluppo glaciale è relativamente notevole nelle finitime valli, Valpelline e Valle di Ayas.

Tale relativa povertà glaciale dipende in gran parte dall'ampio svasarsi dell'alta Valtournanche (per fenomeni geo-tettonici che accenneremo in seguito) a costituire il vastissimo bacino di Breuil, ciò che migliora assai (climatologicamente parlando) il fianco meridionale del gruppo del Cervino, fianco già naturalmente ben esposto a pieno Sud.

Il fatto è che i ghiacciai italiani del Cervino sono piuttosto piccoli, divisi in diverse parti, appollaiati nelle più profonde ed alte incassature che incidono le dirupate pareti meridionali di tale gruppo montuoso; per cui non solo i turisti, ma anche gli studiosi, fors'anche perchè attratti, affascinati, dalla gigantesca piramide, poco si occuparono del suo glacialismo relativamente ridotto.

Eppure, esaminando i fenomeni glaciali, antichi e moderni, di questa famosa regione, si vede che essi vi sono assai importanti ed interessanti, per cui sembra opportuno farne un cenno speciale.

*
* *

Geologicamente il gruppo del Cervino (l. s.) si può in complesso distinguere in due parti ben diverse, cioè: il fianco destro dell'alta Valtournanche che è costituito da Gneiss più o meno

granitoidi che dal gruppo di Punta di Cians, formando tutta l'altissima, erta e dirupatissima costiera di Château des Dames - Les Jumeaux - Dent d'Hérens, estendesi sino al Cervino, scendendo poi, dal lato svizzero, a Stockjé, ecc.; invece il fianco sinistro della Valtournanche è costituito di formazioni calcaree e calceschistose, inglobanti (1) potentissime zone di roccie anfiboliche, serpentinose, ecc. (Pietre Verdi), che si estendono dalla frastagliata cresta di Zerbion - Gran Tournalin - Gran Sommetta - Corno S. Teodulo, ecc., sino in fondo di valle (anzi risalendola in parte dal lato destro), sviluppandosi sino al Colle del Breuil o della Forca, discendendo poi sul lato svizzero verso Staffel, in gran parte mascherate dai ghiacciai di Matterhorn e di Z'Mutt.

Tettonicamente invece tutte le formazioni geologiche sovraccennate mostrano un andamento abbastanza uniforme, cioè una pendenza non molto forte verso O. e O. N. O.

Tali fatti geotettonici ci indicano un curioso rovesciamento delle formazioni gneissico-granitiche, disposte in anticlinale complicata, coricate verso E. (ma ora molto abrase) sopra le formazioni calceschistose con Pietreverdi disposte in sinclinale pure rovesciata ad E., talora sin quasi all'orizzontalità (2).

Detta forte differenza litologica tra i due fianchi dell'alta Valtournanche e l'indicato andamento stratigrafico, ci spiegano la notevole differenza esistente fra tali due fianchi, aspro ed erto quello destro, assai più dolce ed esteso il sinistro; da ciò la difficoltà alpinistica del primo e la relativa facilità del secondo, che dà adito a parecchi comodi passi e colli.

---

(1) La connessione, l'alternanza, la frequenza e spesso la piccolezza delle intercalazioni delle varie Pietre Verdi coi Calceschisti è tale che in certe regioni (così p. es. nella costiera del St.-Théodule, nelle zone collinose attorno al Breuil, ecc.) occorrerebbero carte topografiche al millesimo per poterle segnalare; ad ogni modo da tutto ciò risulta chiarissima e sicura la connessione sedimentaria di queste varie rocce verdi coi Calceschisti che le inglobano.

(2) Vedi la Sez. V^a in F. Sacco, *Les Alpes occidentales*, 1913. Per dettagli geologici si può consultare il foglio *M. Rosa* (1912) al 100.000 della Carta geologica d'Italia e la *Carte géol. du Massif de la Dent Blanche* (1908) al 50.000 di T. Argand.

***

Premessi questi pochi dati geologici fondamentali sulla regione in questione, esaminiamone ora brevemente la glaciologia.

Dal lato svizzero (dove le gravi condizioni politiche di questi anni mi limitarono le osservazioni) abbiamo attorno al Cervino:

I° Il **Theodulgletscher**, che si suole suddividere in:

a) Unter-Theodulgletscher (che è però un ramo o tributario laterale, il più sinistro, del grande Gornergletscher), che presenta una bella morenula laterale sinistra fiancheggiante il Leichenbretter e conservantesi abbastanza bene sino al Bodengletscher, tanto da costituire parte del bell'arco morenico depositato nella prima metà del secolo scorso contro l'affioramento di roccie serpentinose-anfiboliche su cui giacciono i casolari di Furri.

Riguardo alla terminazione del Gornergletscher ricordiamo che la carta del M. Rosa allegata all'atlante dell'opera di A. e H. Schlagintweit: " Neue Untersuch. ü. d. Phys. Geogr. u. Geologie der Alpen, 1854 „ segna che detta terminazione era nel 1851 a 5672 piedi (= 1842 m. s. l. m.); la carta di Adams-Reilly, rilevata nel 1865-66, indica la fronte del Gornergletscher giungente ancora presso le roccie verdi sovracitate di Furri. Il foglio *Matterhorn* della Carta top. svizzera (revisione Imfeld 1877-78) mostra che in un dodicennio la fronte del ghiacciaio erasi arretrata di quasi 300 m., lasciando scoperto un largo piano, quotato 1840 m. s. l. m.

L'Argand nella sua " Carte géol. du Massif Dent Blanche „ rilevata nel 1905-07 indica detta fronte molto regredita, specialmente accorciata a sinistra ed invece a destra con una specie di peduncolo distante circa $^1/_2$ km. dalle roccie di Furri. Qualcosa di analogo mostra l'edizione 1881 (riveduta 1909) del sovraindicato foglio di Matterhorn, solo che la fronte glaciale è segnata a foggia di lingua, irregolarmente triangolare, distante quasi 600 m. dalle roccie verdi sovraccennate e raggiungente solo più la quota 1943 m. s. l. m. alla porta terminale del ghiacciaio.

b) Ober-Theodulgletscher, che logicamente è raggruppabile col *Furgg-Gletscher* formando un tutto solo, un grande

campo di ghiaccio dolcemente inclinato verso settentrione, suddividendosi poi, nel suo margine inferiore o terminale, in tre parti, cioè:

1° Ampio margine dell'Ober-Theodulgletscher già scendente, nella prima metà del secolo XIX, ben più in basso che non oggi, come mostrano, sia la Carta del M. Rosa dell'opera di A. e H. Schlagintweit del 1851 (che segna l'ampia terminazione del S. Theodul-Gletscher ben vicina al sottostante Gornergletscher e con bella cerchia morenica forse esagerata), sia l'antica carta topografica (XXIII, M. Rosa, foglio riconosciuto nel 1854 e pubblicato solo nel 1857) degli Stati Sardi, sia la Carta di Adams-Reilly (1865-66), sia il morenico d'aspetto fresco sparso sulle roccie anfiboliche levigate sopra Gartfad; ma in un sessantennio tale margine oscillò relativamente poco, tanto da poter deporre una specie di irregolare cordone morenico subtriangolare, appuntito verso la quota 2724 e collegantesi col bel cordone morenico destro che fiancheggia per circa due km. il rilievo serpentinoso di Leichenbretter-Z'Wängen sino al suo acutangolare affioramento meridionale di quota 3122 (Vedi la fig. 69-70 dell'Alpinen Majestäten, I, 1901); nelle ultime fasi di regresso glaciale si costituì, a monte di detto cordone frontale, un minuscolo laghettino o meglio pozzanghera temporanea, quotata 2834 nell'edizione 1909 del foglio Matterhorn.

2° L'allungata lingua terminale del Furgg-Gletscher che nella prima metà del secolo XIX si spingeva in cascata seraccata sino a poche centinaia di metri dalla terminazione del Gornergletscher o Bodengletscher, da cui ancora verso la metà del secolo scorso detta lingua distava solo un km. scarso, come mostrano le antiche carte; così imperfettamente la carta del M. Rosa di A. e H. Schagintwert (1851), dove questo ghiacciaio è segnato come M. Cervin oder Furker Gletscher, quelle al 50.000 dello Stato Maggiore Sardo (foglio XV, M. Moro) ed al 100.000 di Adams-Reilly. È specialmente a tale lungo periodo di notevole sviluppo glaciale (abbracciante la prima metà del sec. XIX sin verso il 1870) che devesi il deposito del bel cordone di destra e qualche lembo analogo a sinistra della lingua glaciale in esame. Il foglio Matterhorn (al 50.000) della carta svizzera, riveduto da Imfeld nel 1877, indica il termine della lingua glaciale in questione, quantunque già impicciolita ed un po' regre-

dita, toccare ancora i 2402 m. s. l. m. (dove trovavasi la porta di uscita del torrente subglaciale), distanziando così tale terminazione glaciale meno di un km. dal fianco sinistro del Bodengletscher; in quel tempo sulle parti marginali della lingua glaciale, lunga ancora oltre 1 km., esistevano due (uno per parte) bei cordoni morenici che furono poi depositati, direi quasi abbandonati, sul soggiacente terreno, quando, dal 1870 in poi, tale lingua di ghiaccio andò rapidamente assottigliandosi ed accorciandosi in modo notevolissimo. Infatti la carta dell'Argand (1905-07) mostra tale lingua glaciale molto ingracilita, ridotta quasi ad un peduncolo sinistro ed arretratissima, tanto che la sua terminazione distava circa 1650 m. dal margine sinistro del Bodengletscher, ed il foglio Matterhorn (ed. rived. 1909) indica ancora un regresso di un centinaio di metri, cosicchè la porta glaciale terminale trovavasi a 2516 m. s. l. m., essendosi per tal modo essa rialzata di circa 100 m. s. l. m. dal 1877.

3° Notisi infine che il Furgg-Gletscher ha ancora un'appendice terminale sinistra, corta, che spingesi sin sotto lo sperone roccioso (Pietre verdi) di Hörnli; ma tale linguetta glaciale, caratterizzata da bei cordoni morenici, terminanti con stretto archetto ellissoidico, pur alimentando un torrentello che scende a Staffel Alp, non presentò variazioni molto notevoli data la sua posizione.

Questi diversi rami terminali del grande Furgg-Theodul-Gletscher colle loro variazioni diverse mostrano chiaramente, come è naturale, che le lingue glaciali più strette e più scendenti presentano oscillazioni assai più spiccate e rapide che non quelle larghe e poco inclinate, e quindi le prime costituiscono glaciometri molto più sensibili e delicati che non le seconde.

II° Il **Matterhorngletscher**, appollaiato tra i 3900 e 2700 m. sui grandi banchi rocciosi (disposti quasi a grandi gradinate inclinate ad E. circa) del fianco settentrionale del Cervino, per la sua posizione e poca pendenza relativa non presentò variazioni molto notevoli, salvo qualche diminuzione di spessore in generale dalla prima metà del secolo scorso ad oggi e contemporaneamente un certo regresso del margine libero verso N.E., frastagliato quasi a foggia di tre lingue subtriangolari, già abbastanza espanse sin oltre la metà del secolo scorso, come mostrano sia i depositi morenici largamente estesi sino a Schwarz

Tschuggen, sia le antiche carte degli Stati Sardi (foglio XIV, M. Cervin, riconosciuto sul terreno nel 1853) e di Adams-Reilly del 1865.

Ma dopo il 1870 anche tali frastagliature si ritrassero alquanto, allontanandosi così più o meno dai cordoni morenici prima depositati; fra essi è specialmente caratteristico quello mediano foggiato a V, con l' asta sinistra terminante alla quota 2771 e l'asta destra terminante per lungo tempo alla quota 2900 e poscia accorciantesi anche più a monte sino alla retrostante gradinata rocciosa (Pietre verdi) in modo che la parte terminale destra dell'espansione glaciale in esame rimase quasi isolata.

III° Il **Tiefenmattengletscher**, che ammanta gli svariati affioramenti gneissico-granitici (ora un po' più sporgenti dal ghiacciaio di quanto apparissero nella prima metà del secolo scorso) dell'estesa frastagliata catena del M. Cervino - Dent d'Hérens - Testa di Valpelline, in realtà costituisce solo uno, per quanto il più esteso, dei tre ghiacciai (cioè con lo *Stockgletscher*, discendente da Tête de Valpelline - Tête Blanche, e lo *Schönbühlgletscher*, scendente dal gruppo della Dent Blanche) che confluendo poco sotto i 2600 m. s. l. m. costituiscono la bella fiumana glaciale dello *Z'Muttgletscher*.

Tale ampia zona di confluenza è assai interessante per vari fenomeni, come per es. il laghettino (2633 m. s. l. m.) (non ancora segnato nella carta sarda riconosciuta nel 1853) formatosi tra le falde orientali (rocciose con detrito morenico) dello Stockjé ed i due bei cordoni morenici che quivi si riuniscono angolarmente in uno solo.

In tale regione è pure interessante la convergenza ed in parte anche la graduale emergenza, dal manto glaciale nivale, di vari cordoni morenici (provenienti dai tre ghiacciai sovraccennati) che si dispongono allineati in numero di sette principali (uno mediano e quattro medio-laterali viaggianti con e sul ghiacciaio e due laterali ormai fissi e depositati) tra loro subparalleli, tipici. Essi poco a poco riunendosi (sia per espandimento laterale, sia per sempre maggior emergenza dal ghiacciaio in causa della fusione glaciale) costituiscono, come pel Miage, quasi un manto morenico generale, longitudinalmente collinoso, che finisce per mascherare tutta la terminazione glaciale, salvo

qualche apparizione locale specialmente presso la terminazione (lato sinistro).

Tale grande ammanto morenico fa sì che naturalmente la sottostante massa glaciale resta parzialmente protetta contro l'ablazione, per cui i suoi movimenti di avanzamento e di ritiro furono sempre rallentati, ritardati e relativamente poco estesi. Infatti, senza parlare dell'antico periodo *dauniano* in cui lo Z' Muttgletscher congiunto col Gornergletscher spingevasi sin oltre Zermatt, nella prima metà del secolo XIX la fronte del ghiacciaio in esame si estendeva solo a circa 200 m. da Staffel Alp coprendo un rilievo anfibolitico emerso più tardi (insieme con l'antistante piccolo piano quotato 2115 m.) come indicano antiche carte, p. es. il foglio XIV, M. Cervin (riconosciuto sul terreno nel 1853) dello Stato Sardo e come pure mostra il piccolo cordone morenico semiarcuato giacente appunto circa 200 m. a monte di Staffel Alp, ed a cui succede, internamente, un altro arco morenico più completo (depositato in un periodo di sosta durante l'iniziato regresso glaciale) che trovasi già a circa 350 m. da detto Alpe, ancora però comprendendo nel suo interno il piccolo piano sovraccennato (quota 2115 m.) che rimaneva allora coperto di ghiaccio.

Allora, verso la metà del secolo XIX, i ghiacciai minori laterali di destra discendevano molto in basso; cioè l'Arbengletscher sino a quasi solo più $^1/_2$ km. dal margine sinistro dello Z' Muttgletscher (come lo provano la Carta sarda del 1853 ed ancor meglio le due tipiche morene laterali recenti ben conservate), e l'Hohwäng-gletscher molto più, tanto che sul principio del secolo XIX esso toccava e verso la metà di detto secolo spingevasi ancora a 100 m. appena dalla morena sinistra dello Z' Muttgletscher, come mostrano i residui morenici e detta antica Carta degli Stati Sardi (foglio XIV, M. Cervin) riconosciuta nel 1853.

Più tardi la fronte dello Z' Muttgletscher gradatamente ritirandosi lasciò apparire sia detto piano, sia il retrostante spuntone di Pietre verdi, come indica il foglio Matterhorn della Carta federale svizzera, riveduta da Imfeld nel 1877; oltre al contemporaneo costituirsi di altri fenomeni, come un nuovo piccolo piano sublacustre a monte del piccolo affioramento anfibolitico sovraccennato, una parziale fuoruscita del torrente subglaciale serpeggiante sul lato meridionale di detto piano, ecc.

In seguito la terminazione glaciale in esame andò ancora un po' oscillando, ma non molto notevolmente, anche per il continuo accrescersi della copertura morenica protettrice, che rende persino un po' incerta la precisa delimitazione periferica dell'area glaciale quivi piuttosto stazionaria e rappresentata da ghiaccio più o meno antico, continuando il torrente subglaciale a fuoruscire definitivamente presso il piccolo piano di quota 2115.

* * *

Passiamo ora al versante italiano del gruppo del Cervino.

Il Glacialismo occidentale, verso Valpelline (ghiacciai di Tza de Tzan e des Grandes Murailles), fu già trattato in un altro lavoro (1), per cui non restano da esaminarsi che i ghiacciai dell'alta Valtournanche coronanti la metà settentrionale del grande bacino del Breuil.

Detti ghiacciai sono ora relativamente numerosi, piccoli, elevati, frastagliati, essenzialmente appollaiati sulle gigantesche gradinate rocciose oppure incassati nelle maggiori incavature delle pareti gneissico-granitiche della grandiosa costiera del Cervino - Dent d'Hérens.

Ma, senza risalire all'epoca glaciale in cui tutta la Valtournanche era occupata da un'immensa fiumana di ghiaccio tributario di quella immane, assiale, baltea, che depositò il gigantesco anfiteatro di Ivrea nella sua fronte terminale, solo limitandoci all'ultimo e relativamente recente periodo *dauniano*, notiamo che allora i ghiacciai dell'alta Valtournanche erano ancora assai più estesi che non oggi, come accenneremo in breve.

I° Il **ghiacciaio della Gran Sommetta**, già esteso a quasi tutto il fianco settentrionale della costiera di Gran Sommetta-Motta di Pleté, ecc., in modo da discendere molto in basso verso la depressione di Goillet, depositò l'ampio detrito morenico ora tanto estesamente sparso alle falde di detta costiera, dove esso si connette e spesso si confonde col detrito franoide di falda.

---

(1) Sacco F., *Il Glacialismo antico e moderno della Valpellina* (" Atti Soc. it. Sc. Nat. ", vol. LVII, Milano, 1918).

Ancora nella prima metà del secolo XIX tale ghiacciaio era abbastanza esteso e completamente collegato a quello di Valtournanche, come mostra l'antica carta di Adams-Reilly del 1865. In seguito andò restringendosi ed isolandosi (v. fot. 111 del Catalogo Sella, 29 luglio 1882), riducendosi quasi solo a placche o vedrette glacio-nivali isolate, appiccicate nelle alte incavazioni della parete settentrionale, essenzialmente calcarea, della Gran Sommetta.

Però in questi ultimi 3 o 4 anni, in seguito a notevoli innevamenti e relative glaciazioni, il ghiacciaio della Gran Sommetta tende ad ingrandirsi di nuovo ed a collegarsi col ghiacciaio di Valtournanche.

II° **Ghiacciai di Valtournanche** (o **di Plan Tendre**) e **di S. Teodulo**, che accenno insieme, perchè, come oggi, essi furono sempre uniti insieme; anticamente più ispessiti (tanto che non ne emergevano tanti spuntoni rocciosi come oggi); discendevano assai in basso, come mostra il materiale morenico sparso nella regione del L. Goillet e della Vieille.

Ancora nella prima metà dello scorso secolo il loro margine occidentale, irregolarmente frastagliato quasi a festoni pseudo-ondulati, discendeva sotto i 2700 m., risultandone così, nei diversi momenti di sosta e di regresso glaciale, quell'ampio deposito morenico che si estende tra l'attuale fronte glaciale ed i 2600-2700 m., in foggia stranamente caotica (anche per la forma ondulata ed irregolare della soggiacente massa di Calceschisti con Pietre verdi) ma che in complesso si può ridurre ad alcuni cordoni morenici irregolarmente subarcuati alla terminazione del ghiacciaio del Théodule, qua e là con piccole depressioni originanti laghetti temporanei.

Nella parte anteriore (inferiore) della complessa formazione morenica frontale del ghiacciaio di Valtournanche (l. s.), resa ora ancor più irregolare dall'azione delle acque superficiali (che vi originano qua e là detti laghetti temporanei), si vede talora assai bene il materiale morenico di aspetto non molto antico, direttamente sovrapposto, si direbbe quasi *scaricato*, sulla superficie ondulata rocciosa frantumata, parzialmente coperta da teppa erbosa di aspetto antico. Noto qui, incidentalmente, che l'ampia area ondulatamente inclinata che stendesi ad Ovest di tali grandi zone moreniche, specialmente nella regione della Vieille, è costi-

tuita da Calceschisti con Pietre verdi che alla superficie sono caoticamente e straordinariamente frantumati per azione intensa e ripetuta di gelo e disgelo, ecc.

La carta del M. Rosa (1851) pubblicata da A. e H. Schlaginweit nell'atlante della loro opera *Neue Untersuch. über die Physic. Geogr. und Geol. der Alpen*, 1854, mostra, probabilmente in modo esagerato, il ghiacc. del Théodule, indicato come *Valtournanche Gletscher* scendente in basso verso il Plan Torrette con morene frontali arcuate ed un laghetto intermorenico.

Le fotografie del Sella (77 e 111, fatte il 22 agosto 1881 e il 29 luglio 1882) mostrano che in tali anni il ghiacc. di Valtournanche era relativamente ridotto, cosicchè il passo delle Cime Bianche era praticato sovente coi muli, ciò che continuò fino a qualche anno fa; ora da 3 o 4 anni, per forte addensamento delle nevi e successiva glaciazione, tale passaggio coi muli è diventato un po' difficile.

Anche la falda meridionale della dirupata parete di Furgen Grat fu già occupata da un'estesa fascia glaciale (*ghiacciaio di Furgen Grat*) che si collegava perfettamente colla parte destra del ghiacc. di St.-Théodule, come mostra assai bene (quantunque con rappresentazione un po' schematica) l'antica carta di Adams-Reilly del 1865.

In seguito detta fascia andò assottigliandosi (1), restringendosi, in modo da ridursi quasi solo ad una specie di lunga balconata glaciale, pensile, poggiante sopra una estesa e grandiosa gradinata dolcemente inclinata a N. N. O. per analogo andamento geo-tettonico dei Calceschisti con Pietre verdi; della precedente estensione rimasero, verso il basso, alcuni allineamenti morenici leggermente subarcuati, come osservasi tra i trinceramenti dei Fournets ed il lungo e stretto affioramento roccioso quotato 3208 m.; allineamenti rocciosi che vengono quasi a confondersi coi depositi analoghi (dapprima sparsi sul ghiacciaio, poi più in basso sempre più accumulati ed irregolarmente allineati) del margine destro del ghiacciaio di St.-Théodule.

---

(1) Anche il Dainelli, nelle sue *Alcune osservazioni sui ghiacciai del versante ital. del Monte Rosa*, 1909, indica tale diminuzione di spessore osservata dalle sue guide.

I cambiamenti del glacialismo della regione di St.-Théodule poterono anche avere qualche influenza sopra il transito del famoso Colle che fu già assai frequentato anche con bestie da soma, ciò che oggi più non si verifica; ricordisi anche in proposito che quel colle fu già fortificato nel secolo XVII (vedi i doc. 8 e 11 in Vaccarone, *Le vie delle Alpi occidentali*, 1884), sia al passo, sia ai trinceramenti di Fournet. Il De Saussure nel volume IV (pag. 379) dei suoi *Voyages dans les Alpes* parla pure del ghiacciaio di Plan Tendre e di Valtournanche che egli attraversò il 14 agosto 1789 coi muli, come spesso si usava allora, e a cui ritornò poi anche nel 1792 per studiare il Cervino (l. c., p. 408). Recentemente ne troviamo cenno nel lavoro del Martelli sopra *I monti ed i ghiacciai di Ayas*, " Boll. C. A. I. ", XX, n. 53, 1887.

Pierre Puiseux scrivendo *L'histoire du M. Rose avant 1855* (" Ann. C. A. F. ", XVIII, 1891) parla pure del passo di St.-Théodule frequentato da tempi antichissimi, fortificato in antichi periodi guerreschi, ecc.

Consultisi la recente nota del Coolidge, *Il Colle di S. Teodulo nella Storia*, " Rivista C. A. I. ", 1911.

Le morene del ghiacciaio di Valtournanche sono ben visibili nella fotografia di V. Sella (n° 7, 22 Ag. 1881) e nella tavoletta dell'I. G. M. (1884); ma più spesso, come ora, sono mascherate da neve.

***

Quanto ai ghiacciai scendenti a sud del formidabile ed aspro gruppo montuoso del Cervino-Dent d'Hérens, essi ben dopo la grande epoca glaciale, e dopo l'importante periodo (*gschitziano?*) in cui depositarono la complessa serie morenica su cui si adagia ora largamente il paese di Valtournanche, cioè nel seguente periodo *dauniano*, riuniti insieme, costituivano una grandiosa fiumana glaciale che, occupando gran parte dell'alta Valtournanche, spingeva la sua fronte terminale sino allo sbocco del Vallone Creton; anzi in un periodo di precedente maggior estensione glaciale, detta fiumana, elevata sin sopra la zona dei casolari Layet, si potè estendere, assieme con quella del ghiacciaio Creton, sino alla gorgia del Cret, abbandonando, specialmente

sulla sinistra della Valtournanche, caratteristici depositi morenici a grandi massi, dalla regione di fronte a Les Vorpilles, attraverso la zona di Les Perères, sino al Cret.

Ma essenzialmente quando (e fu per un periodo assai lungo ed importante) il grande ghiacciaio del Cervino giungeva solo sino allo sbocco di Val Creton, formò verso l'avanti: a destra le lunghe gradinate sovragiacenti al piano dei Casolari Avril, interrotte verso monte dallo sbrecciamento connesso al vallone di Cors e dalla precipitosa gradinata rocciosa dei Crot; a sinistra due principali grandiosi cordoni morenici (suddivisibili in altri minori a collinette) fra loro subparalleli, l'interno più basso dell'esterno, e caratterizzati, oltre che dalla forma collinosa, da giganteschi massi sparsi gneissici e gneissico-granitici; carattere litologico che serve in parte a distinguere complessivamente le morene del Cervino dal materiale morenico o di falda (costituito da calceschisti, prasiniti, calcari) sceso dal rilievo di Bec Pio Merlo; quantunque anche tra il morenico del Cervino trovinsi detti materiali provenienti dalle regioni (a gigantesche gradinate) della Forca, ecc.

Verso la loro estremità meridionale dette morene originarono, per sbarramento, sia i due laghetti paludosi di C. Layet, siti verso i 2000 m. tra il terreno morenico ed i calceschisti (inclinati dolcemente a S. E. circa, affioranti ad O. di detti casolari), sia, un po' più a valle, due bei laghettini, fra cui il così detto L. Verde o Bleu (1984 m. s. l. m.), ben noto per la sua limpidità, la sua quiete, il suo paesaggio forestale, e per rispecchiare mirabilmente la gigantesca piramide del Cervino, in una cornice di Conifere con effetto artistico incomparabile.

Questi laghettini, alti e bassi, di sbarramento morenico, sono in relazione con una speciale idrografia sotterranea che si rivela più in basso con sorgenti presso la stradella di fondo valle. Notisi riguardo a questi bei laghi inferiori che quello maggiore ha due attivi emissari mentre non mostra immissari, per cui riesce evidente la sua alimentazione da sorgive subacquee; invece il laghetto più piccolo e di tinta più scura verde-bluastra, chiuso da una morenula, è alimentato dall'emissario del lago più grande ma non ha emissario proprio, per cui risulta perdente, ciò che ci spiega la sottostante sorgente presso la strada della Valle.

Nel periodo *dauniano*, in cui il ghiacciaio italiano meridionale del Cervino aveva l'indicato grande sviluppo (mentre il corrispondente svizzero, settentrionale, si estendeva oltre Zermatt), le sue morene di destra non poterono depositarsi regolarmente in causa sia delle varie confluenze laterali, sia della forma orografica, a scoscese gradinate rocciose originate dalle testate degli strati calceschistosi, prasinitici, ecc., immergentisi più o meno dolcemente a O. N. O. (per completo rovesciamento tettonico) sotto le potenti formazioni gneissico-granitiche del gruppo del Cervino.

Tuttavia troviamo terreno morenico sparso, ma di varia età e provenienza, sui piani inclinati di Batzé, Crot de Labié, Eura, ecc.

Invece sulla sinistra il margine della fiumana glaciale potè estendersi in generale abbastanza comodamente sugli ampi piani inclinati (verso O. circa) della formazione calceschistosa (con estese Pietre verdi), deponendovi così una serie di bei cordoni morenici, che dalle vicinanze del L. Verde sovraccennato (per l'estremità meridionale) sviluppansi ondulatamente, subparalleli od innestantisi, nelle regioni di Museroche, dell'Albergo Geomein, di Pré de Veau, di Pian Torrette, su su sino alle falde del gigantesco gradino roccioso che sostiene il ghiacciaio della Forca.

Oltre a veri cordoni morenici, però un po' larghi e depressi (quantunque talora ben elevati, come nella regione di Pré de Veau), osservansi talora depositi sparsi anche assai elevati e distanti dai tipici cordoni; così, per es., il gruppo dei giganteschi trovanti, in gran parte gneissici, che giacciono sopra Pian Torrette sino a circa 2900 m. di altezza.

Pure notevole è l'enorme masso macroprasinitifero, subovoidale, spaccato in due parti disuguali, ora un po' spostate, della dimensione di m. 11 $\times$ 7 $\times$ 4, che giace presso un laghetto (in serpentinoschisto contorto) tra Barmaz e Tramail de la Vieille poco sopra i 2300 m. s. l. m.

Lo sprone roccioso (Calceschisti con Pietre verdi svariate) che culmina nei rilievi quotati 2874-2701, costituì quasi il divisorio tra il ghiacc. del Théodule e quello del Cervino; il margine sinistro di quest'ultimo urtava in alto contro detto grande sprone, che ne irregolarizzò quindi il deposito morenico superiore, in parte poi anche mascherato dall'abbondante de-

trito di falda, essendo la roccia in questione molto facile a frantumarsi.

Quanto all'andamento e sviluppo delle morene *dauniane*, meglio di ogni descrizione è un'occhiata all'unita cartina dove esse sono segnate, talora un po' schematicamente e sinteticamente, in foggia di cordoni separati, mentre spesso trattasi di depositi più o meno allargati, un po' dispersi, fra loro collegati, quantunque talora anche foggiati e conservati a veri cordoni rilevati, come p. es. nella regione di Pré de Veau.

In un'ultima fase, relativamente breve, del periodo dauniano, il ghiacciaio italiano del Cervino, ingracilitosi ed abbassatosi, si ritirò di quasi 2 km. (da quanto si presentava nella fase principale sopradescritta); la sua fronte terminale, che si presentò allora a regolare semicerchio, occupava il bassopiano del Breuil (a circa 2000 m. s. l. m.), dove furono poi costruite le C. Planet (Hôtel des Jumeaux).

Di tale fase rimase quasi a prova quella serie, direi collana, di grossi massi erratici, di cui alcuni anche di 16 m. di diametro, con 7 od 8 di altezza, che trovansi disposti in semicerchio, come un gigantesco *Cromleck*, a valle di detto piano, quantunque poi un po' guasti e dispersi dalle correnti acquee, dai relativi alluvionamenti, ecc.

Anche in quest'ultimo momento del periodo dauniano, il deposito morenico di destra non potè formarsi regolarmente, e fu poi anche in parte asportato e guastato in seguito, rimanendone solo più lembi sparsi nella regione di Batzé, Eura, ecc. Invece sulla sinistra il deposito morenico, caratterizzato da grandiosi massi sparsi fra quelli minori, si potè costituire e conservare abbastanza bene nelle regioni di Creta, di quota 2393, 2538, 2700, ecc., diventando sempre più grossolano, caotico, franoide nella parte alta, con enormi massi angolari (anche di 10-12 m. di diametro), spesso quadrangolari, sparsi.

Infine (dopo forse un'ultima brevissima sosta della fronte glaciale arretratasi sin sopra 2100 m., come potrebbe (1) indi-

---

(1) Notisi riguardo a queste morene dauniane, come del resto anche per le morene più o meno recenti, che al loro piede dal lato interno (più che non da quello esterno) osservasi spesso una linea di grossi massi che par-

care un accumulo morenico un po' abbondante quivi depositato), per la grandiosa diminuzione generale storica del glacialismo antico, i ghiacciai del gruppo del Cervino, che si erano già poco a poco sempre più distinti verso la fine del periodo dauniano, sempre più regredendo ed ingracilendosi, si staccarono in numerosi lembi, che rimasero così appollaiati ed incastrati sulle gradinate rocciose o nelle incassature del fianco meridionale del Cervino-Dent d'Hérens.

---

rebbero indicare depositi morenici più giovani (perchè più bassi) di quelli del cordone morenico contiguo; è vero che sovente sonvi veramente tali cordoni morenici minori, ma in molti casi trattasi solo dello speciale accumulo (discesa e semplice cernita per gravità) dei massi più grossi staccatisi dal fianco interno (che è il meno cementato ed il più franoso) della contigua alta morena.

Ricerche sull'acqua di cristallizzazione
composti con $2H^2O$ e con $3H^2O$

Comunicazione IV del Socio nazionale residente I. GUARESCHI

In due mie comunicazioni precedenti (1) del 1914 e 1915 ho esposto le ricerche fatte su molti composti salini contenenti $2H^2O$ quali sono: solfato di calcio e sodio, tartrato di sodio, bicromato di sodio, cloruro di bario, cloruro stannoso, solfato di calcio, nitroprussiato di sodio, cloruro rameico, bromuro e ioduro di sodio, acetato di cadmio, etilidendisolfato potassico, ditionato di sodio e ditionato di bario.

In una terza Nota ho esposto le ricerche su un sale con $5H^2O$ quale è il solfato di rame (2).

Altre ricerche avevo già fatto nel 1912 e 1913 intorno ad altri composti specialmente dei sali ad acidi organici (formiati) per stabilire quale era il loro punto di disidratazione e quali siano quelli che seguono la così detta regola di Rosenstiehl, cioè se $2H^2O$ si eliminano contemporaneamente.

Come già dissi, ho fatto allora molte esperienze anche con composti contenenti $3H^2O$, $4H^2O$, $5H^2O$, $7H^2O$ e $24H^2O$ e parte di queste esporrò in prossime comunicazioni.

Formiato di stronzio $(CH^2O^2)^2Sr + 2H^2O$.

I cristalli di formiato di stronzio sono stabili all'aria. Pasteur (3) dimostrò che questo sale contiene $2H^2O$ e non $4H^2O$

---

(1) *Ricerche sull'acqua di cristallizzazione. Composti con* $2H^2O$. Nota I, " Atti R. Accad. delle Scienze di Torino ", vol. XLIX, e Nota II, in " Atti R. Accad. Torino ", 1915, vol. 50.

(2) *Ricerche sull'acqua di cristallizzazione. Composti con* $5H^2O$. *Solfato rameico.* " Atti R. Accad. ", 1915, vol. 50, p. 1125.

(3) " A. Ch. " (3), 1850, t. 31, p. 100.

come si credeva prima. Perde tutta la sua acqua a 100° colla massima facilità. Però egli non esperimentò a temperature inferiori a 100°. Trovò 17 % invece di 16,9 %.

Io ho preparato un bel campione di formiato di stronzio cristallizzato e l'ho esaminato.

Gr. 1.1340 di sale secco all'aria furono scaldati per 40 ore a 30° in termostato, e perdettero 0,0944, ossia:

	trovato	calcolato per $(CHO^2)^2Sr.2H^2O - H^2O$
Per $1H^2O$	8,32	8,4

Continuai a scaldare e dopo 48 ore perdettero in totale 0,1454 cioè 12,80 % e per l'eliminazione di 1 $^1/_2H^2O$ si calcola 12,6 %.

Continuai a scaldare a 30° e dopo 192 ore (8 giorni) perdettero in totale 0,1882 ossia:

	trovato	calcolato per $-2H^2O$
Per $2H^2O$	16,6	16,85

Scaldato ancora a 40° e 50° il sale non perde più di peso.

Dunque questo sale in termostato a 30° perde:

$1\ H^2O$	in	40 ore	
$^1/_2$ „	in	48 „	
e l'ultima $^1/_2$ „	in	192 „	(8 giorni).

Il sale perde l'acqua anche nella macchina pneumatica a 20 mm. di pressione, temperatura ordinaria e in presenza di acido solforico. Dopo circa 70 ore perde $-H^2O$, dopo ancora circa 25 ore un'altra $^1/_2$ molecola e solamente dopo più di 100 a 120 ore perde l'ultima $^1/_2\ H^2O$.

Dunque anche per questo sale non si verifica la regola di Rosenstiehl.

Il sale anidro lasciato all'aria non ricupera l'acqua di cristallizzazione.

Questo sale ha il *punto di disidratazione* a 30° e perde l'ultima mezza molecola molto più lentamente.

Formiato di zinco $Zn(CHO^2)^2 + 2H^2O$.

Cristallizza in prismi monoclini isomorfi coi formiati di Mn e di Cd.

I cristalli sono stabili all'aria.

Questo sale ben cristallizzato fu scaldato in termostato. Grammi 1,0676 scaldati prima a 30° poi a 40° e 60° non perdettero di peso, ma dopo 24 ore a 70° perdettero 0,1097 cioè 10,27 % e per l'eliminazione di $1H^2O$ si calcola 9,4 %. Continuando a scaldare a 70° dopo ancora 40 ore perdettero in totale 0,2032, cioè 19,03 % e per $2H^2O$ si calcola 18,88 %.

Dunque per questo formiato si ha:

Punto di disidratazione 70°

Dopo 24 ore . . . . $-1H^2O$
" 40 " la 2ª . . . . H^2O.

Questo formiato a 100° dopo 3-4 ore perde tutta l'acqua di cristallizzazione (18,8 %) e lasciato all'aria il sale anidro riassorbe 16,2 % di acqua, cioè quasi $1\,^1/_2H^2O$.

Formiato di manganese $(CHO^2)^2Mn + 2H^2O$.

Il formiato di manganese già preparato da Göbel, il quale vi ammetteva $4H^2O$, fu poi meglio esaminato da J. Chr. Hensen, il quale avrebbe dimostrato che contiene $2H^2O$; ma vi ha dosato l'acqua solamente per via indiretta.

Lasciato in disseccatore a cloruro di calcio, non perde acqua, e nemmeno in presenza di acido solforico.

Nel vuoto della macchina pneumatica a 10 mm. non perde di peso.

Perde rapidamente tutta l'acqua se si scalda sopra 100°:

Grammi 1,0878 scaldati in stufa di vetro col vapore di toluene (108°) dopo poco più di tre ore perdettero 0,2160, cioè:

	trovato	calcolato per $-2H^2O$
Per $2H^2O$	19,86	19,88

Il sale anidro stando lungo tempo all'aria ricupera tutte due le sue molecole d'acqua. Gr. 0,8708 di sale anidro ricuperarono 22,4 $^0/_0$ del peso, il che corrisponde a $2H^2O$.

Il sale contenente $2H^2O$ fu scaldato in termostato a 30°-50°-60°, ma non perdette di peso; solamente a 70° comincia a perdere di peso e perde tutta l'acqua in tempi diversi:

Punto di disidratazione 70°

Dopo 74	ore	perde	1 H^2O
„ 46	„	„	$^1/_2$ „
„ 168	„	„	$^1/_2$ „

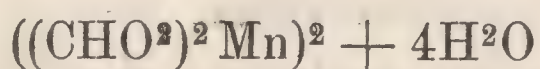
Fu ripetuta l'esperienza a 70° in ambiente limitato di aria, e precisamente in disseccatore con cloruro di calcio. In queste condizioni la perdita dell'acqua è più lenta, ma il risultato è lo stesso che il riscaldamento in libero termostato.

Temperatura di disidratazione 70°

Dopo	66	ore	perde	1 H^2O
„	altre 94	„	„	$^1/_2$ „
„	286	„	„	$^1/_2$ „

Dunque anche in questo caso l'ultima $^1/_2$ H^2O si perde molto lentamente.

Il che farebbe dubitare che non sia una mezza molecola che si elimina, ma bensì una molecola intera dal sale rappresentato con formola doppia:

$$((CHO^2)^2 Mn)^2 + 4H^2O$$

e che successivamente perda $2H^2O$ — $1H^2O$ — $1H^2O$.

Clorato di calcio $Ca(ClO^3)^2 . 2H^2O$.

Secondo Mylius e Funk questo sale è deliquescente, fonde verso 100° nella sua acqua di cristallizzazione (talora sotto 100°) e per prolungato riscaldamento perderebbe 14,1 e per $2H^2O$ si calcola 14,83 $^0/_0$.

Questi dati sono incompleti ed anche non esatti. Ecco quanto io ho osservato; però in una sola serie di esperienze, perchè dovetti interrompere il lavoro.

Sul cloruro di calcio il clorato di calcio cristallizzato non perde affatto del proprio peso. Così pure sull'acido solforico anche dopo 24 ore.

In termostato a 40° non perde di peso, ma a 50° perde tutta l'acqua.

Grammi 1,0105 di clorato di calcio scaldati a 50° in termostato perdettero dopo 42 ore gr. 0,1477, ossia:

	trovato	calcolato per $Ca(ClO^3)^2.2H^2O$
H^2O %	14,61	14,83

Anche a 99° non perde più del proprio peso.

Il sale secco lasciato all'aria ricupera presto la sua acqua e cade in deliquescenza.

Dunque il *punto di disidratazione* di questo sale è 50° e non 100° come credevano Mylius e Funk.

Ferrocianuro di potassio $Fe(CN)^6.K^4+3H^2O$.

Secondo che è indicato da vari scrittori, il ferrocianuro di potassio perde tutta l'acqua di cristallizzazione a 100°. Schroeder (1) ha determinato l'acqua usando dei pesafiltri di varie dimensioni ed ottenne sempre i medesimi risultati. Non dice però a quale temperatura ha determinato l'acqua, ma pare che anche egli abbia scaldato a 100°.

Io ho osservato che questo sale perde l'acqua molto più facilmente: già a 50° in termostato, a 42° in corrente d'aria e a temperatura ordinaria sul cloruro di calcio.

Gr.1,6810 di sale furono scaldati per 4 ore in termostato a 40° e non perdettero di peso; a 50° dopo 5 ore perdettero 0,0790, cioè 4,69 %, e dopo ancora 3 ore perdettero di nuovo 0,0944,

---

(1) " Zeits. f. anorg. Chem. ", 1911, t. 72, p. 89.

cioè in totale 0,1734, pari a 10,3 %, e dopo ancora 3 ore perdettero 0,0456, cioè in totale 0,2190 ossia:

	trovato	calcolato per $Fe(CN)^6K^4.3H^2O$
H^2O %	13,02	12,78

Per 2 ½ H^2O si calcola 10,6. L'ultima ½ H^2O si è eliminata più lentamente.

Grammi 0,9332 di sale furono scaldati in corrente di aria secca e a 42° (vapore di metilale); dopo 2 ore perdettero 0,0453, cioè 4,8 %, cioè un poco più di 1H^2O (calc. 4,2 %); dopo $3^h,20^m$ perdettero ancora 0,0550, cioè in totale 0,1003, pari a 10,7 %, e per 2 ½ H^2O si calcola 10,6 %. Dopo ancora 3 ore perdettero 0,0167, cioè in totale 12,54 %, e per 3H^2O si calcola 12,7 %.

Dunque anche in questo caso l'ultima mezza molecola si è eliminata più lentamente.

Il ferrocianuro di potassio perde tutta l'acqua anche stando in un disseccatore a cloruro di calcio. L'egr. Dott. D. Annaratone sino dal 1901 fece nel mio laboratorio alcune ricerche sul ferrocianuro di potassio, che gli servirono poi per la tesi di laurea, e fra queste vi è quella dell'eliminazione dell'acqua dal ferrocianuro a temperatura ordinaria e sul cloruro di calcio; la temperatura era sempre tra 14° e 15° eccetto i primi giorni che era di 9° a 12°. Le pesate ed il tempo impiegato ad eliminarsi dell'acqua furono raccolte dall'Annaratone in una tabella, dalla quale risulta che in:

ore	32	perde	½H^2O
„	96	„	„
„	86	„	„
„	106	„	„
„	230	„	„
„	576	„	„

Come si scorge, le due mezze molecole ultime si eliminano molto lentamente ed in ispecie la ultima mezza molecola.

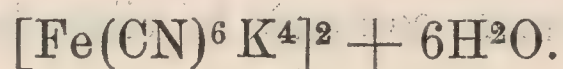
Furono fatte 68 pesate a intervalli regolari ed i risultati si possono rappresentare con una curva, che non riproduco per brevità.

Dunque il punto di disidratazione di questo sale è a:

50° in termostato;
42° in corrente d'aria;

a temperatura ordinaria sul cloruro di calcio.

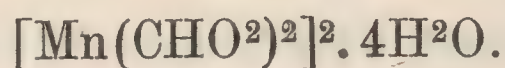
Tutto l'andamento della perdita dell'acqua di cristallizzazione in questo sale si spiegherebbe benissimo se si ammette la formola doppia:

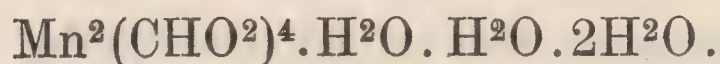
$$[Fe(CN)^6 K^4]^2 + 6H^2O.$$

La perdita delle molecole d'acqua si farebbe regolarmente per numeri interi.

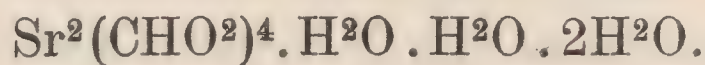
L'ultima molecola molto più lentamente.

Io ho dunque ottenuto che in molti sali con $2H^2O$ (ed anche con $3H^2O$, come ad esempio il ferrocianuro di potassio) spesse volte l'ultima mezza molecola si elimina molto lentamente o a temperatura più alta che non le prime tre mezze molecole. E la perdita dell'ultima mezza molecola ha luogo in limiti ben definiti. Questo fatto mi fa dubitare assai, come già dissi a proposito del solfato di rame, che si possa parlare di mezze molecole; tanto più che, data la formola H^2O, non si capisce come possa esistere $HO\,^1/_2$. *È molto più probabile che i sali metallici abbiano un peso molecolare superiore a quello generalmente ammesso.*

A cagion d'esempio, il *formiato di manganese*, sempre rappresentato con $Mn(CHO^2)^2.2H^2O$, dovrebbe rappresentarsi con:

$$[Mn(CHO^2)^2]^2.4H^2O.$$

Allora si spiega benissimo come nelle 72 ore a 70° in termostato perda $2H^2O$, nelle successive 46 ore la terza molecola e nelle ultime 68 ore la quarta molecola. Si avrebbe quindi:

$$Mn^2(CHO^2)^4.H^2O.H^2O.2H^2O.$$

Così dicasi del *formiato di stronzio* $Sr(2HO^2)^2Sr.2H^2O$, che dovrebbe scriversi con:

$$Sr^2(CHO^2)^4.H^2O.H^2O.2H^2O.$$

Dai dati sperimentali che ho ottenuto da molti allumi si vedrà come la determinazione dell'acqua di cristallizzazione sia più favorevole alla vecchia formola con $24H^2O$ che non a quella dimezzata con $12H^2O$.

Questo fatto da me notato assai di frequente, che molti sali perdono la loro acqua a frazioni di molecola, fa nascere dunque il dubbio che il loro peso molecolare sia più elevato di quello col quale generalmente sono rappresentati.

In successive note esporrò le ricerche già fatte da varî anni su molti sali.

Torino. R. Università. Maggio 1918.

Simmetria e periodicità nelle frazioni continue di Halphen

Nota II di F. GERBALDI, a Pavia

---

8. — **Condizioni di periodicità dello sviluppo di $\sqrt{X}$.** — D'ora in poi ci occuperemo delle condizioni di periodicità per la frazione continua completa (in forma normale), di cui fa parte quella discendente che sviluppa $\sqrt{X}$, e supporremo sempre $q_3 \neq 0$ e $K \neq 0$.

Affinchè tale frazione continua sia periodica, è necessario e sufficiente che nella successione dei parametri $t, t_1, t_2 \ldots$, oltre al parametro iniziale $t = 0$, ve ne siano altri nulli; quando il primo di questi sia $t_h = 0$ $(h > 2)$, si ha per il [N. 10]: $v_h = 0$, $v_{h+1} = \infty$, $v_{h+2} = 0$. Allora un periodo (fondamentale) limitato da due frazioni parziali irregolari è:

$$\left|\frac{\frac{1}{2} q_3 s^3}{1 - u_1 s}\right| + \left|\frac{v_2 s^2}{1 - u_2 s}\right| + \ldots + \left|\frac{v_{h-1} s^2}{1 - u_{h-1} s}\right| + \left|\frac{\frac{1}{2} q_3 s^3}{1 + q_1 s + q_2 s^2}\right|,$$

e consta di $h + 1$ frazioni, se, stando alla convenzione fatta, si contano per 3 frazioni le due irregolari.

In tal caso, la frazione continua completa non solo è simmetrica rispetto ad ogni denominatore irregolare [Teorema N. 11], ma possiede anche simmetria rispetto a certi termini regolari. Si ha il seguente teorema, che in sostanza fu già notato da Abel (salvo la forma della frazione continua, della quale Abel faceva uso, equivalente alla nostra in forma normale).

Teorema. — *Quando la frazione continua che sviluppa $\sqrt{X}$, in forma normale, è periodica; un periodo fondamentale limitato da due frazioni irregolari, è simmetrico.* — Infatti, se $h + 1$ è il numero delle frazioni del periodo, per quanto si è stabilito al [N. 11], essendo $t_h = 0$, si ha: $u_{h-1} = u_{h+2}$ e $v_{h-1} = v_{h+3}$; inoltre per la supposta periodicità si ha: $u_1 = u_{h+2}$ e $v_2 = v_{h+3}$; si deduce $u_{h-1} = u_1$ e $v_{h-1} = v_2$; e di qui si conchiude il teorema.

Da quanto si è detto si deduce:

1°) La condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di un periodo fondamentale di $h+1$ $(h>2)$ frazioni parziali, è l'annullarsi di una funzione intera dei coefficienti di x, la quale è niente altro che il denominatore della funzione razionale che esprime v_{h+1};

2°) Se la frazione continua che sviluppa $\sqrt{X}$ è simmetrica rispetto ad un termine regolare, essa è anche periodica; quindi, se, dati i valori numerici dei coefficienti di X, si calcolano successivamente colle formole ricorrenti i valori u_i, v_i e si trova che uno di questi è radice di una delle equazioni (8), (9), (18), (19), si può conchiudere che la frazione continua è periodica e si può, senza ulteriori calcoli, scrivere un intero periodo; la stessa conclusione si può fare, appena che per due coefficienti successivi u_i, u_{i+1}, ovvero v_i, v_{i+1}, si trovano valori eguali.

3°) Condizione necessaria, ma non sufficiente, affinchè sia periodica la frazione continua che sviluppa $\sqrt{X}$, è che una delle equazioni (6) o (13) abbia una radice appartenente al campo di razionalità individuato dai coefficienti di X, da ξ e da $\sqrt{p_0}$.

Osserviamo che per calcolare il polinomio, che col suo annullarsi dà la condizione per la esistenza di un periodo di h frazioni parziali, non è necessario spingere il calcolo delle v fino alla v_h. Per il teorema sopra stabilito relativo alla simmetria del periodo, se h è pari, $h=2r$, basta considerare la funzione $u_r - u_{r-1}$; se h è impari, $h=2r+1$, basta considerare la funzione $v_{r+1} - v_r$.

Calcolando il numeratore di una di queste funzioni razionali nei coefficienti di X ed eguagliando a zero, si ha la condizione domandata.

Esempio: $h=4$; qui si ha $r=2$; si calcola $u_2 - u_1$. Dalle [(30), (31) del § 2] si ricava:

$$u_2 - u_1 = -\frac{J}{q_3} + \frac{q_3^3}{2K} = \frac{q_3^4 - 2JK}{2q_3K};$$

dunque la condizione per l'esistenza d'un periodo con 4 frazioni parziali è $q_3^4 - 2JK = 0$, come si è visto sopra (N. 7).

Già Abel si era giovato dell'ultima osservazione per semplificare i calcoli; questi, nondimeno, sviluppati col metodo

esposto, non lasciano intravedere alcuna semplice legge per la formazione dei polinomi domandati.

Siffatta legge è stata scoperta da HALPHEN, il quale vi giunse, avendo a guida lo stretto legame, che intercede tra la teoria della moltiplicazione delle funzioni ellittiche e quella della periodicità delle frazioni continue, che sviluppano $\sqrt{X}$. In quel che segue faremo vedere come le formole di HALPHEN si possono stabilire con un procedimento interamente algebrico.

9. I polinomi τ_h. Equazioni ricorrenti tra essi. — Ricordiamo [N. 11] che i coefficienti v_i, u_i sono funzioni razionali delle q_1, q_2, q_3, q_4, e poniamo: $v_i = \frac{V_i}{W_i}$, denotando con V_i e W_i due polinomi primi tra loro nelle variabili q_i $(i = 1, 2, 3, 4)$. Dalla relazione ricorrente [(57) § 1], introducendo le $w_i = q_3 u_i - q_4$, si ricava: $w_i = 2 \frac{V_i V_{i+1}}{W_i W_{i+1}}$.

Ricordiamo inoltre [N. 11], che quando si ha: $v_h = \infty$, ne viene di conseguenza: $v_{h-1} = 0$, $v_{h+1} = 0$, v_{h-2} e v_{h+2} sono finiti e diversi da 0, per avere supposto $q_3 \neq 0$ e $K \neq 0$. Di qui si deduce che, se, considerando le q_1, q_2, q_3, q_4 come variabili indipendenti, ciascuno dei polinomi W_i si pensa scomposto in fattori, e se $\omega_{h-1}, \omega_h, \omega_{h+1}$ sono tre fattori irreducibili rispettivam. di W_{h-1}, W_h, W_{h+1}:

1°) $\omega_{h-1}, \omega_h, \omega_{h+1}$ sono necessariamente distinti;

2°) ω_h è un divisore di V_{h-1} e V_{h+1};

3°) ω_{h-1} e ω_{h+1} sono divisori di V_h;

perciò si può scrivere:

$$W_{h-1} = \omega_{h-1}^a W_{h-1}^*, \qquad W_h = \omega_h^b W_h^*, \qquad W_{h+1} = \omega_{h+1}^c W_{h+1}^*$$
$$V_{h-1} = \omega_h^{b'} V_{h-1}^*, \qquad V_h = \omega_{h-1}^{a'} \omega_{h+1}^{c'} V_h^*, \qquad V_{h+1} = \omega_h^{b''} V_{h+1}^*,$$

dove gli esponenti $a, b, c, \ldots$ sono interi positivi, e le V^*, W^* denotano polinomi, che non sono più divisibili per alcuno dei fattori $\omega_{h-1}, \omega_h, \omega_{h+1}$.

Dalle formole scritte si deduce:

$$w_h = 2 \omega_{h-1}^{a'} \omega_h^{b''-b} \omega_{h+1}^{c'-c} \frac{V_h^* V_{h+1}^*}{W_h^* W_{h+1}^*};$$

di qui, se si tien presente che, quando $\omega_h = 0$, insieme a $v_h = \infty$ si deve avere [N. 11] anche $u_h = \infty$, e quindi $w_h = \infty$, si vede che deve essere $b > b''$ e quindi $b > 1$. Si conchiude:

In W_h *ogni fattore irreducibile comparisce elevato ad una potenza superiore alla prima.*

Ciò stabilito, denotiamo con τ_i il prodotto dei fattori irreducibili di W_i, elevati ognuno alla prima potenza. Da quanto sopra si è visto, segue:

1°) τ_{h-1}, τ_h, τ_{h+1} sono primi tra loro;

2°) W_h contiene il fattore τ_h^2;

3°) V_h contiene il fattore $\tau_{h-1}\,\tau_{h+1}$.

In conclusione possiamo dire che v_h è della forma:

$$v_h = \rho\,\frac{\tau_{h-1}\,\tau_{h+1}}{\tau_h^{\,2}}\,, \tag{1}$$

dove ρ denota una funzione razionale nelle q_i $(i = 1, 2, 3, 4)$, che in generale non si annulla quando si annulla τ_h e resta finita quando si annullano τ_{h-1}, τ_{h+1}. Vedremo in seguito che la funzione ρ è la stessa per tutti i valori dell'indice h, per guisa che $\tau_h = 0$ è la condizione necessaria e sufficiente affinchè si abbia $v_h = \infty$ insieme a $v_{h-1} = 0$ e $v_{h+1} = 0$; cioè:

Teorema. — $\tau_h = 0$ *è la condizione di periodicità, con un periodo di* h *frazioni parziali.*

Osserviamo poi che, essendo: $q_3\,u_h - q_4 = 2v_h\,v_{h+1}$, dalla (1) si ricava:

$$w_h = 2\,\rho^2\,\frac{\tau_{h-1}\,\tau_{h+2}}{\tau_h\,\tau_{h+1}}\,, \tag{2}$$

dalla quale si vede che, quando sia $v_{h+1} = \infty$, e quindi $\tau_{h+1} = 0$, si hanno per conseguenza i valori:

$$w_{h-1} = 0\,, \qquad w_h = \infty\,, \qquad w_{h+1} = \infty\,, \qquad w_{h+2} = 0\,,$$

d'accordo con quanto si conosce dal [N. 11] per i valori:

$$u_{h-1} = \frac{q_4}{q_3}\,, \qquad u_h = \infty\,, \qquad u_{h+1} = \infty\,, \qquad u_{h+2} = \frac{q_4}{q_3}\,.$$

Resta che dimostriamo che la funzione ρ è indipendente dall'indice h; nel tempo stesso troveremo le formole ricorrenti per il calcolo dei polinomi τ_h; dopo di che le formole (1) e (2) servono ad esprimere nel modo più semplice i coefficienti u_h, v_h considerati come funzioni razionali delle variabili q_i. A questo scopo, facciamo provvisoriamente l'ipotesi che sia ρ indipen-

dente dall'indice h; e risaliamo alle equazioni ricorrenti [(a), (b), N. 8], che sussistono tra le v_i e le w_i; cioè:

$$q_3^2(v_i + v_{i+1}) = w_i^2 + Jw_i + K, \qquad w_i + w_{i-1} + J = \frac{q_3^2}{2v_i},$$
$$2v_i v_{i+1} = w_i, \qquad w_i w_{i-1} = K - q_3^2 v_i;$$

sostituiamo in queste alle v_i, w_i le loro espressioni mediante le τ date dalle (1) e (2); la seconda resta soddisfatta identicamente e le altre dànno:

$$A_i = 4\tau_{i-1}^2 \tau_{i+2}^2 \rho^4 + 2J\tau_{i-1}\tau_i\tau_{i+1}\tau_{i+2}\rho^2 - q_3^2(\tau_{i-1}\tau_{i+1}^3 + \tau_i^3\tau_{i+2})\rho + K\tau_i^2\tau_{i+1}^2 = 0,$$
$$B_i = 4(\tau_{i-1}^2\tau_{i+2} + \tau_{i-2}\tau_{i+1}^2)\rho^3 + 2J\tau_{i-1}\tau_i\tau_{i+1}\rho - q_3^2\tau_i^3 = 0,$$
$$C_i = 4\tau_{i-2}\tau_{i+2}\rho^4 + q_3^2\tau_{i-1}\tau_{i+1}\rho - K\tau_i^2 = 0.$$

Resta a vedere se si possa determinare una funzione ρ, indipendente dall'indice i, in modo che esista un sistema di polinomi τ_i, i quali soddisfacciano ad un tempo ai tre sistemi di equazioni:

$$A_i = 0, \qquad B_i = 0, \qquad C_i = 0,$$

per tutti i valori interi dell'indice i.

A questo scopo conviene anzitutto osservare che sussistono identicamente le relazioni:

$$(3) \qquad \rho\tau_{i+2}B_i - A_i = \tau_{i+1}^2 C_i, \qquad \rho\tau_{i-2}B_i - A_{i-1} = \tau_{i-1}^2 C_i,$$

dalle quali segue che, se si determinano le τ_i in modo da soddisfare al sistema di equazioni $A_i = 0$, restano in conseguenza soddisfatti i sistemi $B_i = 0$ e $C_i = 0$.

Siccome la frazione continua che ora consideriamo è quella che sviluppa $\sqrt{X}$, abbiamo $v_0 = \infty$, e quindi dobbiamo assumere $\tau_0 = 0$.

Inoltre, avendo supposto $q_3 \neq 0$ e $K \neq 0$, abbiamo trovato [(30), § 1]: $v_2 = \frac{K}{q_3^2}$, e però v_2 è finito e diverso da 0; allora, per la (1), τ_1 e τ_2 sono diversi da 0.

Senza ledere la generalità possiamo supporre $\tau_1 = 1$, $\tau_2 = 1$; basta a questo scopo osservare che, se le τ_i si moltiplicano

per τ_1^{i-2} e τ_2^{1-i} le v non si alterano, mentre i valori τ_1 e τ_2 diventano eguali all'unità.

Per le dette ragioni supporremo d'ora in poi:

$$\tau_0 = 0, \qquad \tau_1 = 1, \qquad \tau_2 = 1.$$

E allora, se confrontiamo i valori di v_2, w_2 trovati al [N. 11] con quelli che si ricavano dalle (1), (2), abbiamo:

$$(4) \qquad \rho\,\tau_3 = \frac{K}{q_3^2}, \qquad \rho^3 \tau_4 = \frac{q_3^4 - 2JK}{4q_3^2}.$$

Osserviamo che a questo stesso risultato si giunge risolvendo rispetto a τ_3 e τ_4 le equazioni:

$$C_2 \equiv q_3^2 \rho \tau_3 - K = 0, \qquad B_2 \equiv 4\rho^3\tau_4 + 2J\rho\tau_3 - q_3^2 = 0.$$

Dopo ciò si vede facilmente che, se si assegna a ρ un valor costante (non nullo) e se coi valori iniziali $\tau_0 = 0$, $\tau_1 = 1$, $\tau_2 = 1$ si assumono i valori di τ_3 e τ_4 dati dalle (4), i tre sistemi di equazioni $A_i = 0$, $B_i = 0$, $C_i = 0$ sono equivalenti al sistema $C_i = 0$. Infatti, anzitutto si ha: $B_2 = 0$, $C_2 = 0$, donde per le (3) segue $A_2 = 0$. — Poi dall'equazione $C_3 = 0$ si ricava τ_5; allora (essendo $A_2 = 0$, $C_3 = 0$) dalle (3) si deduce: $B_3 = 0$, $A_3 = 0$. In generale, supposto che $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \ldots \tau_{h+1}$ $(h > 3)$ soddisfacciano alle

$$A_i = 0, \quad B_i = 0, \quad C_i = 0 \quad \text{con } i = 2, 3, \ldots, h-1,$$

dall'equazione $C_h = 0$ si ricava τ_{h+2} e le (3) mostrano che allora si ha anche $B_h = 0$ e $A_h = 0$,

10. Proprietà dei polinomi τ_i. — Per conseguenza ci limiteremo allo studio del sistema $C_i = 0$. Supposto che questo sia risoluto rispetto alle τ, e che queste si sostituiscano nelle (1), (2), le espressioni, che si ottengono per le v_h, w_h, devono anzitutto essere indipendenti dalla costante arbitraria ρ. Questa circostanza si verifica mediante la stessa equazione:

$$(5) \qquad C_i \equiv 4\tau_{i-2}\tau_{i+2}\rho^4 + q_3^2 \tau_{i-1}\tau_{i+1}\rho - K\tau_i^2 = 0;$$

invero questa si può scrivere:

$$4\,\frac{\rho\,\tau_{i-2}\,\tau_i}{\tau^2_{i-1}}\;\frac{\rho\,\tau_i\,\tau_{i+2}}{\tau^2_{i+1}}+q_3^2\,\frac{\tau_i^{\,2}}{\rho\,\tau_{i-1}\,\tau_{i+1}}-K\,\frac{\tau_i^{\,4}}{\rho^2\,\tau^2_{i-1}\,\tau^2_{i+1}}=0\,,$$

ossia:

$$4\,v_{i-1}\,v_{i+1}+\frac{q_3^{\,2}}{v_i}-\frac{K}{v_i^{\,2}}=0\,,$$

e mostra che, se v_{i-1} e v_i sono indipendenti da ρ, lo stesso accade anche per v_{i+1}.

Osserviamo, passando, che l'equazione $C_i=0$ è niente altro che l'equazione ricorrente [(66), § 1]. — Similmente le equazioni ricorrenti [(65), (67), § 1], quando alle v_i si sostituiscano le loro espressioni nelle τ, si mutano nelle equazioni $A_i=0$, $B_i=0$.

Ciò posto, occupiamoci delle soluzioni del sistema $C_i=0$. Sostituendo a K il valore che si ricava dalla prima delle (4), la (5) si può scrivere:

$$\frac{4\rho^3}{q_3^{\,2}}\,\tau_{i-2}\,\tau_{i+2}+\tau_{i-1}\,\tau_{i+1}-\tau_3\,\tau_i^2=0\,.$$

Poniamo:

$$(6)\qquad a=\frac{q_3^{\,2}}{4\rho^3}\qquad\text{e quindi}\qquad \rho=\sqrt[3]{\frac{q_3^{\,2}}{4a}}\,;$$

sarà a una quantità arbitraria finita e diversa da 0, che introdurremo in luogo di ρ. Allora le (4) che servono a determinare τ_3 e τ_4 diventano:

$$(7)\qquad \tau_3=\sqrt[3]{\frac{4a}{q_3^{\,8}}}\,K\,,\qquad \tau_4=\frac{a}{q_3^{\,4}}\,(q_3^4-2JK)\,,$$

e l'equazione ricorrente, che serve a calcolare τ_i $(i>4)$, diventa:

$$(8)\qquad \frac{1}{a}\,\tau_i\,\tau_{i-4}+\tau_{i-1}\,\tau_{i-3}-\tau_3\,\tau_{i-2}^2=0\,.$$

Le espressioni delle prime τ, che da questa si ricavano, sono:

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned}
\tau_5&=a\left[\tau_3^3-\tau_4\right],\\
\tau_6&=a\,\tau_3\left[\tau_4^2-a\,(\tau_3^3-\tau_4)\right],\\
\tau_7&=a^2\left[-\tau_4^3+a\,(\tau_3^3-\tau_4)\,\tau_3^3\right],\\
\tau_8&=a^3\,\tau_4\left[\tau_3^3\,\tau_4^2+a\,(\tau_3^3-\tau_4)\,(\tau_4^2-2\,\tau_3^3)\right],\\
\tau_9&=a^4\,\tau_3\left[-\tau_4^5+a\,(\tau_3^3-\tau_4)\,\tau_4^3+a^2\,(\tau_3^3-\tau_4)^3\right],\ \text{ecc.}
\end{aligned}\right.$$

In generale, facendo uso della (8) per calcolare τ_i, questa viene espressa mediante le quattro precedenti da un quoziente, che ha per divisore τ_{i-4}; quando alle $\tau_{i-1}, \tau_{i-2}, \tau_{i-3}, \tau_{i-4}$ si sostituiscono le loro espressioni in τ_3 e τ_4, la divisione si fa esattamente e ogni τ_i viene espressa da un polinomio in τ_3 e τ_4. Questo fatto si è sopra verificato per i valori $i = 5, 6, \ldots 9$ dell'indice.

La proprietà è vera in generale. Basta dimostrare che se $\tau_5, \ldots \tau_{m-1}$ $(m > 5)$ sono polinomi nelle due variabili τ_3, τ_4, anche τ_m è un polinomio nelle stesse variabili.

A questo scopo, cominciamo ad osservare che, se si considera la successione $\tau_3, \tau_4, \tau_5, \ldots \tau_{m-1}$ formata da quelle τ, che sono supposte razionali intere nelle due variabili τ_3, τ_4, non può accadere che due di esse consecutive abbiano un divisore comune; infatti, se ω fosse un divisore comune (irreducibile) a τ_h e τ_{h-1} $(h < m)$, cioè: $\tau_h \equiv 0$ e $\tau_{h-1} \equiv 0$ (mod. ω); seguirebbe dalla (8): $\tau_{h-2} \equiv 0$ (mod. ω); e così di seguito: $\tau_{h-3} \equiv 0, \ldots \tau_4 \equiv 0$, $\tau_3 \equiv 0$; ma ciò è assurdo, essendo τ_3 e τ_4 variabili indipendenti.

Ciò posto, facciamo l'ipotesi che τ_m sia frazionaria e che ω sia un divisore (irreducibile) del suo denominatore. Allora, dalla relazione (8), per $i = m$, tenendo presente che $\tau_{m-1}, \tau_{m-2}, \tau_{m-3}, \tau_{m-4}$ sono per ipotesi intere, si deduce: $\tau_{m-4} \equiv 0$ (mod. ω); indi, per l'osservazione precedente, si conchiude $\tau_{m-3} \not\equiv 0$ (mod. ω). — Ancora, dalle due relazioni cui dà luogo la (8) quando si prenda $i = m - 1$ e $i = m - 2$, e dalle $\tau_{m-4} \equiv 0$, $\tau_{m-3} \not\equiv 0$ (mod. ω), si deduce: $\tau_{m-1} \not\equiv 0$, $\tau_{m-2} \not\equiv 0$ (mod. ω). — E ora, tenendo presenti le

$$v_{m-1} = \rho \frac{\tau_m \tau_{m-2}}{\tau^2_{m-1}}, \qquad v_{m-2} = \rho \frac{\tau_{m-1} \tau_{m-3}}{\tau^2_{m-2}},$$

visto che per una coppia generica di valori di τ_3 e τ_4 che renda $\omega = 0$; si ha: $\tau_m = \infty$; mentre $\tau_{m-1}, \tau_{m-2}, \tau_{m-3}$ sono finiti e diversi da 0, si conclude che per una tale coppia di valori si avrebbe: $v_{m-1} = \infty$, v_{m-2} finito e diverso da 0; ma ciò è in contradizione con quanto sappiamo [N. 11], cioè che: quando $v_{m-1} = \infty$, deve essere $v_{m-2} = 0$. Dunque l'ipotesi che τ_m sia una funzione non intera di τ_3 e τ_4 non regge. E così resta stabilito il seguente:

TEOREMA. — *Tutte le τ_i che soddisfano il sistema di equazioni* (8), *sono funzioni razionali intere delle due τ_3, τ_4.*

Dalle considerazioni fatte per dimostrare questo teorema, risulta anche:

TEOREMA. — *Tre polinomi consecutivi τ_{i-2}, τ_{i-1}, τ_i sono primi tra loro.*

Invero si è visto che due τ consecutive non hanno divisori comuni; quindi non hanno divisori comuni τ_i, τ_{i-1} e neppure τ_{i-1}, τ_{i-2}; se poi τ_i e τ_{i-2} avessero un divisor comune (irreducibile) ω, questo, in virtù della (8), sarebbe divisore di τ_{i-1} ovvero di τ_{i-3}; ma allora ω sarebbe divisore di due τ consecutive.

Sebbene le v e le u siano, come sopra si è visto, indipendenti dal valore di ρ e quindi da quello di a, le τ invece, come mostrano le (9), dipendono da a, che possiamo pensare come variabile indipendente. Le τ sono razionali intere anche rispetto ad a.

Denotiamo con τ'_i il valore di τ_i quando ad a si sostituisce ka, essendo k un fattore arbitrario (non nullo). Anzitutto dalle (7) si ha:

$$\tau'_3 = k^{\frac{1}{3}} \tau_3 , \qquad \tau'_4 = k \tau_4 ;$$

poi dalla (8) per $i = 5$:

$$\frac{1}{a} \tau_5 + \tau_4 - \tau_3^3 = 0 , \qquad \frac{1}{a'} \tau'_5 + \tau'_4 - \tau'^3_3 = 0 ,$$

e da queste, tenendo presenti i valori di a', τ'_3, τ'_4, si deduce: $\tau'_5 = k^2 \tau_5$.

Similmente dalla (8) per $i = 6$, si deduce: $\tau'_6 = k^{\frac{10}{3}} \tau_6$.

Così continuando, si trova:

$$\tau'_7 = k^5 \tau_7 , \qquad \tau'_8 = k^7 \tau_8 , \qquad \tau'_9 = k^{\frac{28}{3}} \tau_9 , \text{ ecc.}$$

In generale, quando a si moltiplica per k, i valori di τ_i si moltiplicano per potenze di k, e si ha:

$$(10) \qquad \tau'_i = k^{n_i} \tau_i .$$

Per dimostrar ciò e per calcolare nel tempo stesso l'esponente n_i, teniamo presente che si ha: $\rho' = k^{-\frac{1}{3}} \rho$ e che scambiando le τ_i nelle τ'_i le v debbono restare inalterate; cioè:

$$\rho' \frac{\tau'_{i-1} \tau'_{i+1}}{\tau'^2_i} = \rho \frac{\tau_{i-1} \tau_{i+1}}{\tau_i^2} ;$$

di qui si ricava una relazione ricorrente tra gli esponenti n_i, che è:

$$n_{i-1} - 2n_i + n_{i+1} - \frac{1}{3} = 0\,;$$

inoltre deve essere $n_1 = 0$, $n_2 = 0$, perchè abbiamo fissato $\tau_1 = 1$, $\tau_2 = 1$. Si vede subito che per soddisfare a queste condizioni, basta assumere:

$$n_i = \frac{1}{6}(i-1)(i-2). \tag{11}$$

E ora per dimostrare la (10) basta provare che calcolando le τ'_i colla (10), resta soddisfatta l'equazione:

$$\frac{1}{a'}\tau'_i \tau'_{i-4} + \tau'_{i-1}\tau'_{i-3} - \tau'_3 \tau'^2_{i-2} = 0\,,$$

quando le τ_i soddisfano le (8); a questo scopo basta verificare che si ha:

$$-1 + n_i + n_{i-4} = n_{i-1} + n_{i-3} = 2n_{i-2} + \frac{1}{3}.$$

Dunque la (10) è dimostrata e l'esponente n_i è dato dalla (11); n_i è intero, quando i non è multiplo di 3.

Intanto, se si conoscono le τ_i per un dato valore a, si deducono subito le τ'_i per qualsiasi altro valore a'; basta far uso della (10) dove si ponga: $k = \frac{a'}{a}$.

E noi possiamo scegliere a in modo che le τ_i risultino intere non solo nelle τ_3, τ_4, ma risultino anche intere quando si esprimano nelle quattro variabili q_1, q_2, q_3, q_4. A questo scopo, osservando le espressioni (7) di τ_3 e τ_4, si vede che basta porre: $\sqrt[3]{\frac{4a}{q_3^8}} = b$ ed attribuire a b un valore numerico arbitrario, ad es.: $b = \frac{1}{4}$; allora si ha:

$$a = \frac{q_3^8}{256}\,, \qquad \rho = \frac{4}{q_3^2}\,, \qquad v_i = \frac{4}{q_3^2}\,\frac{\tau_{i-1}\tau_{i+1}}{\tau_i^2}\,. \tag{12}$$

$$\tau_3 = \frac{1}{4}K\,, \qquad \tau_4 = \frac{1}{256}\,q_3^4\,(q_3^4 - 2JK). \tag{13}$$

Colla scelta ora fatta di a, le τ_3, τ_4 risultano funzioni razionali intere nelle q_1, q_2, q_3, q_4; la stessa proprietà hanno

quindi tutte le τ_i, perchè queste, come si è visto, sono polinomi in τ_3 e τ_4. Se poi teniamo presenti le relazioni [(2), § 1], che esprimono le q_r nei coefficenti della biquadratica, e supponiamo per semplicità $p_0 = 1$, possiamo conchiudere:

TEOREMA. — *I coefficienti* v_i, u_i *della frazione continua di* HALPHEN, *in forma normale, che serve a sviluppare* $\sqrt{X}$, *sono funzioni razionali dei coefficienti* p_i *della biquadratica* X $(p_0 = 1)$, *esse si formano mediante le* (1) *e* (2); *qui i primi valori delle* τ_i *sono:* $\tau_0 = 0$, $\tau_1 = 1$, $\tau_2 = 1$; τ_3 *e* τ_4 *sono dati dalle* (13); *ed i successivi* τ_i $(i > 4)$ *sono polinomi, che si calcolano colla formola ricorrente* (8), *dove si assume:* $a = \left(\frac{q_3}{2}\right)^8$. *La condizione necessaria e sufficiente affinchè la frazione continua abbia un periodo di* h *frazioni parziali è* $\tau_h = 0$.

Proponiamoci di determinare il grado del polinomio τ_h nei coefficienti p_r, $(r = 1, 2, 3, 4)$. A questo scopo teniamo presenti le solite definizioni dei polinomi *isobarici* a più variabili. Dato un polinomio nelle 4 variabili q_r $(r = 1, 2, 3, 4)$, se moltiplicando q_r per k^r (qualunque sia k) il polinomio si riproduce moltiplicato per k^N, esso è isobarico, col peso N. Allora se $Cq_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} q_3^{\alpha_3} q_4^{\alpha_4}$ è un termine qualsiasi del polinomio, si ha: $\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 = N$.

I polinomi J, K sono isobarici coipesi 4, 8.

Dimostriamo che ogni polinomio τ_i nelle variabili q_r è un polinomio isobarico e, se denotiamo con N_i il suo peso, si ha:

$$N_i = 24 n_i = 4\,(i-1)\,(i-2). \tag{14}$$

Infatti denotiamo con τ_i'' ciò che diventa τ_i, quando le q_r si moltiplicano per k^r $(r = 1, 2, 3, 4)$. Le (12), (13) mostrano che si ha:

$$a'' = k^{24} a, \qquad \tau_3'' = k^8 \tau_3, \qquad \tau_4'' = k^{24} \tau^4.$$

D'altra parte teniamo ferme le q_r, moltiplichiamo invece a per k^x e denotiamo con τ_i' ciò che diventa τ_i: per quanto abbiamo visto sopra, otteniamo:

$$\tau_3' = k^{\frac{1}{3}x}, \qquad \tau_4' = k^x \tau_4, \qquad \tau_i' = k^{n_i x} \tau_i;$$

osserviamo che, se si attribuisce il valore 24 ad x, risulta: $\tau_3' = \tau_3''$, $\tau_4' = \tau_4''$; si conclude che per tutti i valori dell'indice i

deve essere $\tau_i''=\tau_i'$; e quindi $\tau_i''=k^{24n_i}\tau_i$; con ciò la proposizione è dimostrata.

Or bene, siccome per le [(2), § 1] si osserva che ogni q_r è un polinomio di grado r nei coefficienti p_i $(i=1, 2, 3, 4)$ della biquadratica X, un polinomio nelle variabili q_r, che rispetto a queste sia isobarico di peso N, è per conseguenza un polinomio di grado N nei coefficienti p_i; intanto le τ_i sono di peso N_i nelle q_r; dunque:

TEOREMA. — *Il polinomio* τ_i *è di grado* $4(\mathrm{i}-1)(\mathrm{i}-2)$ *nei coefficienti della biquadratica data.*

11. I polinomi γ_h di HALPHEN. — In quanto precede abbiamo considerate quelle τ, che si deducono dalle (7), (8) assumendo $a=\left(\frac{q_3}{2}\right)^8$. Vi è un altro modo particolare importante di fissare la quantità a; cioè $a=-1$. Per quest'altra scelta di a denotiamo con γ_i le funzioni fin qui denotate con τ_i; così che ora abbiamo:

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} &a=-1, \qquad \rho=-\left(\frac{q_3}{2}\right)^{\frac{2}{3}};\\ &v_h=-\left(\frac{q_3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{\gamma_{h-1}\gamma_{h+1}}{\gamma_h^2}, \qquad u_h=\frac{q_4}{q_3}+\left(\frac{q_3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\frac{\gamma_{h-1}\gamma_{h+2}}{\gamma_h\gamma_{h+1}};\end{aligned}\right.$$

i primi valori delle γ sono:

$$(16)\quad \gamma_0=0,\quad \gamma_1=1,\quad \gamma_2=1,\quad \gamma_3=-\left(\frac{2}{q_3^4}\right)^{\frac{2}{3}}K,$$
$$\gamma_4=\frac{1}{q_3^4}(2JK-q_3^4),$$

ed i valori delle altre γ si calcolano colla formola ricorrente:

$$(17)\qquad \gamma_i\gamma_{i-4}-\gamma_{i-1}\gamma_{i-3}+\gamma_3\gamma_{i-2}^2=0.$$

È bene osservare che tra le γ sussiste la relazione: $\gamma_{-i}=-\gamma_i$ (la quale per le τ più generali non è vera). Infatti, scrivendo la (17) per i valori successivi 3, 2, 1 dell'indice i, e tenendo presenti i valori $\gamma_0=0$, $\gamma_1=1$, $\gamma_2=1$, si deduce dapprima: $\gamma_{-1}=-1$, $\gamma_{-2}=-1$, $\gamma_{-3}=-\gamma_3$. Poscia, osservando che per la simmetria della frazione continua completa si ha: $v_r=v_{-r}$, e quindi:

$$\frac{\gamma_{r-1}\gamma_{r+1}}{\gamma_r^2}=\frac{\gamma_{-r-1}\gamma_{-r+1}}{\gamma_{-r}^2},$$

si vede che, se $\gamma_{-r} = -\gamma_r$ e $\gamma_{-r+1} = -\gamma_{r-1}$, si ha ancora: $\gamma_{-r-1} = -\gamma_{r+1}$.

La relazione che passa tra le attuali γ_i e le precedenti τ_i si ottiene subito, ricordando che per le γ_i si è fissato $a = -1$, mentre per le τ_i si è fissato $a = \frac{q_3^8}{256}$; quindi, applicando la (10), si ha:

$$\gamma_i = \left(-\frac{256}{q_3^8}\right)^{n_i} \tau_i; \tag{18}$$

donde si vede che ogni γ_i, a meno di un fattor numerico, si esprime nei coefficienti della biquadratica data, dividendo il polinomio τ_i per $q_3^{8n_i}$; e quindi (supposto sempre $q_3 \neq 0$), si può ancora dire che la condizione di periodicità con un periodo di h frazioni parziali è $\gamma_h = 0$.

Ritornando ai polinomi τ_i, con a qualunque, espressi in τ_3, τ_4, si ha:

$$\tau_i = \Sigma\, C a^\alpha \tau_3^\beta \tau_4^\gamma \qquad (C \text{ costanti}),$$

ricordando che colla sostituzione $a' = ka$ si ha:

$$\tau_3' = k^{\frac{1}{3}} \tau_3, \qquad \tau_4' = k\tau_4, \qquad \tau_i' = k^{n_i} \tau_i,$$

si deduce:

$$\alpha + \frac{1}{3}\beta + \gamma = \frac{1}{6}(i-1)(i-2);$$

donde si vede che, se $i \equiv 0 \pmod{3}$, segue: $\beta \equiv 1 \pmod{3}$; invece, se $i \not\equiv 0 \pmod{3}$, segue $\beta \equiv 0 \pmod{3}$. Per conseguenza: τ_i si esprime nelle τ_3, τ_4 con un polinomio nel quale gli esponenti di τ_3 son tutti multipli di 3, ovvero con un polinomio siffatto moltiplicato per τ_3; il primo caso si presenta quando i non è multiplo di 3; il secondo caso si presenta quando i è multiplo di 3.

Posto $\gamma_3^3 = x$, $\gamma_4 = y$, γ_i si esprime con un polinomio in x e y, se i non è multiplo di 3; e si esprime con un polinomio siffatto moltiplicato per $x^{\frac{1}{3}}$, se i è multiplo di 3. Dalle formole (9), ponendo ivi $a = -1$, si ricava:

$$\left\{\begin{aligned}
\gamma_5 &= y - x,\\
\gamma_6 &= x^{\frac{1}{3}}[-y^2 + (y - x)],\\
\gamma_7 &= -y^3 + x(y - x),\\
\gamma_8 &= -y[xy^2 + (y - 2x)(y - x)],\\
\gamma_9 &= x^{\frac{1}{3}}[-y^5 + (y - x)y^3 - (y - x)^3], \text{ ecc.}
\end{aligned}\right. \tag{19}$$

Le formole (15), (16), (19), alle quali siamo arrivati, coincidono colle formole trovate da HALPHEN [*F. E.*, t. I, pag. 103, formola (21); t. II, p. 608, formole (61), (62); ib., pag. 609, formola (63)]; con quest'avvertenza che HALPHEN denota con φ_m, θ_m le quantità qui denotate con u_{m-1}, v_{m-1} [5]. I polinomi qui denotati con γ_i coincidono coi polinomi denotati da HALPHEN collo stesso simbolo.

La coincidenza è evidente per i valori 1, 2, ... 8, 9 dell'indice i, se si confrontano le formole (19), sopra scritte, colle formole (21), di pag. 103, t. I della citata opera di HALPHEN. La coincidenza per qualunque valore dell'indice si dimostra nel modo seguente. I polinomi di HALPHEN soddisfano alla relazione [*F. E.*, t. I, pag. 102, formola (19)]:

$$(20) \qquad \gamma_{m+n}\gamma_{m-n} = \gamma_{m-1}\gamma_{m+1}\gamma_n^2 - \gamma_{n-1}\gamma_{n+1}\gamma_m^2,$$

qualunque siano gli interi m, n; ora questa relazione, per il caso particolare $n = 2$, $m = i - 2$, si riduce alla (17) scritta sopra, e questa, coi valori di γ_3, γ_4 dati dalle (16), individua le γ_i da noi considerate.

Per brevità chiamerò *sistema di* HALPHEN un sistema di funzioni nelle due variabili x, y, che soddisfano alla relazione ricorrente (17), con $\gamma_0 = 0$, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 1$, $\gamma_3 = x^3$, $\gamma_4 = y$. Per siffatte funzioni sussistono le relazioni (20), le quali si possono anche scrivere come segue:

$$(21) \qquad \gamma_{m+n}\gamma_{m-n} = \gamma_{m-2}\gamma_{m+2}\gamma_n^2 - \gamma_{n-2}\gamma_{n+2}\gamma_m^2;$$

invero, pongasi nella (17): $i = m + 2$, $n + 2$ e dalle due equazioni che così si ottengono si elimini γ_3; si ottiene:

$$\gamma_{m+1}\gamma_{m-1}\gamma_n^2 - \gamma_{n+1}\gamma_{n-1}\gamma_m^2 = \gamma_{m+2}\gamma_{m-2}\gamma_n^2 - \gamma_{n+2}\gamma_{n-2}\gamma_m^2.$$

Da quanto si è esposto, siamo in grado di risolvere nel modo più semplice e più generale il problema: *Costruire una*

---

(5) Nella formola (63), pag. 609 [*F. E.*, t. II], per errore tipografico sta scritto:

$$2(q_4 + q_1 q_3)(q_4^2 - q_3 q_5) \quad \text{invece di} \quad 2(2q_4 + q_1 q_3)(q_4^2 - q_3 q_5).$$

biquadratica X *tale che il suo sviluppo in frazione continua sia periodico, con un periodo di un numero assegnato* h *di frazioni parziali.*

Si scrive l'equazione $\gamma_h = 0$, supposto che si sia calcolato preventivamente il polinomio di Halphen γ_h nelle variabili x, y. Si determina ad arbitrio un punto (x_0, y_0) della curva $\gamma_h(x,y)=0$, e ad arbitrio si assegnano i valori di q_3 e q_4. Indi, risalendo alle (16), si deducono le formole:

$$K = -\frac{q_3^2}{2}\sqrt[3]{2 q_3^2 x_0}, \qquad J = \frac{q_3^4(y_0+1)}{2K},$$

che servono a calcolare i valori di K e J; trovati i quali, si deduce:

$$q_1 = \frac{1}{q_3}(J - 2q_4), \qquad q_2 = \frac{1}{q_3^2}(q_4^2 - Jq_4 + K);$$

e ora, noti q_1, q_2, q_3, q_4 e preso $p_0 = 1$, la biquadratica X è individuata.

Esempio: $h = 10$; l'espressione di γ_{10} si trova calcolata in Halphen (*F. E.*, t. I, pag. 103); si osserva che $x_0 = -\frac{2}{3}$, $y_0 = \frac{2}{3}$ è un punto di $\gamma_{10}(x,y)=0$; si prende $q_3 = 36$, $q_4 = 0$; si trova: $K = 2^5.3^5$, $J = 2^2.3^2.5$; indi: $q_1 = 5$, $q_2 = 6$;

$$X = 1 + 10x + 37x^2 + 132x^3 + 396x^4;$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{X} = \frac{1}{2}(1+5x+6x^2) + \frac{18x^3|}{|1} + \frac{6x^2|}{|1+2x} + \frac{-6x^2|}{|1+6x} + \frac{18x^2|}{|1-2x} +$$
$$+ \frac{2x^2|}{|1-2x} + \frac{18x^2|}{|1+6x} + \frac{-6x^2|}{|1+2x} + \frac{6x^2|}{|1} + \frac{18x^3|}{|\frac{1}{2}(1+5x+6x^2)+\frac{1}{2}\sqrt{X}}.$$

Il periodo è simmetrico rispetto al numeratore $2x^2$ ed il coefficiente centrale $v = 2$ soddisfa l'equazione (18), che nel nostro caso è:

$$4v^3 + v^2 - 180v + 324 = 0.$$

12. Caso in cui X è di 3° grado. Teorema di Halphen. — Ora esaminiamo espressamente il caso in cui il polinomio X sia di 3° grado. Qui si ha:

$$q_4 = -q_1 q_3 - \frac{1}{2} q_2^2, \qquad J = -q_1 q_3 - q_2^2,$$

$$K = \frac{1}{4} q_2^2 (2 q_1 q_2 q_3 + q_2^3 + 4 q_3^2);$$

sappiamo inoltre [N. 13] che vi sono due diversi sviluppi di $\sqrt{X}$ in frazione continua.

I. — Partiamo dalle formole date al N. precedente per il caso in cui X è di 4° grado. Possiamo, come si vedrà, introdurre un opportuno sistema γ_i di Halphen, tale che i polinomi che compariscono nelle formole (1) e (2) siano γ_i con soli indici pari.

Affinchè si possa porre:

$$v_m = \rho \frac{\gamma_{2m-2}\gamma_{2m+2}}{\gamma_{2m}^2}, \qquad \text{e quindi:} \qquad u_m = \frac{q_4}{q_3} + \frac{2\rho^2}{q_3} \frac{\gamma_{2m-2}\gamma_{2m+4}}{\gamma_{2m+2}\gamma_{2m}},$$

si deve, come si è visto (N. 10), risolvere il sistema di equazioni $C_i = 0$, che nel nostro caso si scrive come segue:

$$\gamma_{2i-4}\gamma_{2i+4} - \frac{K}{4\rho^4}\gamma_{2i}^2 + \frac{q_3^2}{4\rho^3}\gamma_{2i-2}\gamma_{2i+2} = 0.$$

D'altra parte, se le γ_i formano un sistema di Halphen, dalla relazione (21), per $m = 2i$, $n = 4$, si ha:

$$\gamma_{2i-4}\gamma_{2i+4} + \gamma_6\gamma_{2i}^2 - \gamma_4^2\gamma_{2i-2}\gamma_{2i+2} = 0.$$

Dal confronto di quest'equazione colla precedente risulta che, per mettere le v_m, u_m nella forma voluta, basta scegliere ρ', γ_3', γ_4' in modo da soddisfare alle condizioni:

$$\gamma_6 = -\frac{K}{4\rho^4}, \qquad \gamma_4^2 = -\frac{q_3^2}{4\rho^3}; \tag{22}$$

donde poi segue: $v_3 = \rho \frac{\gamma_6}{\gamma_4^2} = \frac{K}{q_3^2}$, come deve essere.

Si tenga presente la formola (19):

$$\gamma_6 = \gamma_3(\gamma_4 - \gamma_4^2 - \gamma_3^3),$$

e si ponga: $\rho = -\sigma^2$; le condizioni precedenti diventano:

$$\gamma_4 = \frac{q_3}{2\sigma^3}, \qquad 4\sigma^8\gamma_3^4 - 2q_3\sigma^5\gamma_3 + q_3^2\sigma^2\gamma_3 = K.$$

Per soddisfare alla seconda, abbiamo due quantità a disposizione; σ e γ_3; e σ (come ρ) si può fissare ad arbitrio. Porremo: $\sigma^2\gamma_3 = \frac{1}{2}q_2$, e allora dalla seconda condizione ricaviamo: $\sigma^3 = -\frac{1}{2}(q_1q_2 + q_3) = -p_3$; donde:

$$\rho = -p_3^{\frac{2}{3}}, \qquad \gamma_3 = \frac{q_2}{2\sigma^2} = \frac{q_2}{2}p_3^{-\frac{2}{3}}, \qquad \gamma_4 = \frac{q_3}{2\sigma^3} = -\frac{q_3}{2p_3}.$$

Concludiamo: Per la frazione continua che sviluppa $\sqrt{X}$ nel primo modo, si hanno le formole [6]:

$$(23) \qquad v_m = -p_3^{\frac{2}{3}}\frac{\gamma_{2m-2}\gamma_{2m+2}}{\gamma^2_{2m}}, \qquad u_m = \frac{q_4}{q_3} + \frac{2}{q_3}p_3^{\frac{4}{3}}\frac{\gamma_{2m-2}\gamma_{2m+4}}{\gamma_{2m+2}\gamma_{2m}},$$

dove le γ_i sono un sistema di Halphen calcolato per:

$$(24) \qquad x = \frac{q_2^3}{8p_3^2}, \qquad y = -\frac{q_3}{2p_3}.$$

II. — Sostituiamo ora nelle (1), (2) alle τ_m le γ_i di un sistema di Halphen con soli indici dispari; poniamo cioè: $\tau_m = \gamma_{2m-1}$. Affinchè le v'_m, u'_m espresse dalle formole:

$$v'_m = \rho\frac{\gamma_{2m-3}\gamma_{2m+1}}{\gamma^2_{2m-1}}, \qquad u'_m = \frac{q_4}{q_3} + \frac{2\rho^2}{q_3}\frac{\gamma_{2m-3}\gamma_{2m+3}}{\gamma_{2m-1}\gamma_{2m+1}}$$

siano i coefficienti di una frazione continua che sviluppa un elemento di Halphen, le γ_{2i+1} devono soddisfare ad un sistema di equazioni $C_i = 0$, che in questo caso si scrive:

$$\gamma_{2i-3}\gamma_{2i+5} - \frac{K}{4\rho^4}\gamma^2_{2i+1} + \frac{q_3^2}{4\rho^3}\gamma_{2i-1}\gamma_{2i+3} = 0.$$

D'altra parte, se le γ_i formano un sistema di Halphen, dalla relazione (21), per $m = 2i + 1$, $n = 4$, si ha:

$$\gamma_{2i-3}\gamma_{2i+5} + \gamma_6\gamma^2_{2i+1} - \gamma_4^2\gamma_{2i-1}\gamma_{2i+3} = 0.$$

---

[6] Cfr. Halphen, *F. E.*, t. II, pp. 610-611.

Confrontando quest'equazione colla precedente, si vede che esse individuano uno stesso sistema di γ, quando si assuma:

$$\gamma_6 = -\frac{K}{4\rho^4}, \qquad \gamma_4^2 = \frac{q_3^2}{4\rho^3}.$$

Ora queste sono le relazioni (22) precedentemente incontrate. Di qui si deduce che se le γ_i sono un sistema di Halphen calcolato per i valori di x, y dati dalle (24), le formole:

$$(25) \qquad v'_m = -p_3^{\frac{2}{3}} \frac{\gamma_{2m-3}\gamma_{2m+1}}{\gamma^2_{2m-1}}, \qquad u'_m = \frac{q_4}{q_3} + \frac{2}{q_3} p_3^{\frac{4}{3}} \frac{\gamma_{2m-3}\gamma_{2m+3}}{\gamma_{2m-1}\gamma_{2m+1}}$$

dànno i coefficienti di una frazione continua che sviluppa un elemento.

Per determinare un tale elemento, basta calcolare u'_0, v'_0; si ha:

$$v'_0 = v'_1 = p_3^{\frac{2}{3}} \gamma_3 = \frac{q_2}{2}, \qquad u'_0 = \frac{q_4}{q_3} + \frac{2}{q_3} p_3^{\frac{4}{3}} \gamma_3^2 = -q_1;$$

donde, per quanto si è visto al [N. 13], si trae che la frazione continua è quella che serve a sviluppare $\sqrt{X}$ nel secondo modo.

Riepilogando: *Quando* X *è di 3° grado, se si considerano le due frazioni che sviluppano* $\sqrt{\mathrm{X}}$*; i coefficienti dell'una sono espressi dalle formole* (23) *e quelli dell'altra dalle formole* (25)*; in entrambe le* γ_i *sono prese da uno stesso sistema di* Halphen, *calcolato per i valori di* x, y *dati dalle* (24); *nelle* (23) *compariscono soltanto le* γ *con indici pari e nelle* (25) *soltanto le* γ *con indici dispari.*

Halphen, in una sua nota pubblicata nei " Comptes-rendus „ (7), ha enunciato, senza dimostrazione, la seguente interessante proposizione: *Quando* X *è di 3° grado, se delle due diverse frazioni continue che sviluppano* $\sqrt{\mathrm{X}}$ *una è periodica, è periodica anche l'altra.* Per dimostrare questa proposizione, conviene trasformare alquanto l'espressione di u'_m data dalle (25). Dalla (20), ponendo $n=3$ e scrivendo $2m$ in luogo di m, si ricava la relazione:

$$\gamma_{2m-3}\gamma_{2m+3} = \gamma_{2m-1}\gamma_{2m+1}\gamma_3^2 - \gamma_4\gamma_{2m}^2,$$

(7) *Sur les intégrales pseudo-elliptiques* [t. CVI (1888, 1° sem.), p. 1269].

mercè la quale si può scrivere:

$$u'_m = \frac{q_4}{q_3} + \frac{2}{q_3} p_3^{\frac{4}{3}} \gamma_3^2 - \frac{2}{q_3} p_3^{\frac{4}{3}} \gamma_4 \frac{\gamma^2_{2m}}{\gamma_{2m-1}\gamma_{2m+1}};$$

ora, per i valori sopra trovati di γ_3 e γ_4 si ha:

$$\frac{q_4}{q_3} + \frac{2}{q_3} p_3^{\frac{4}{3}} \gamma_3^2 = -q_1, \qquad \frac{2}{q_3} p_3^{\frac{4}{3}} \gamma_4 = -p_3^{\frac{1}{3}};$$

dunque [8]:

$$u'_m = -q_1 + p_3^{\frac{1}{3}} \frac{\gamma^2_{2m}}{\gamma_{2m-1}\gamma_{2m+1}}. \tag{26}$$

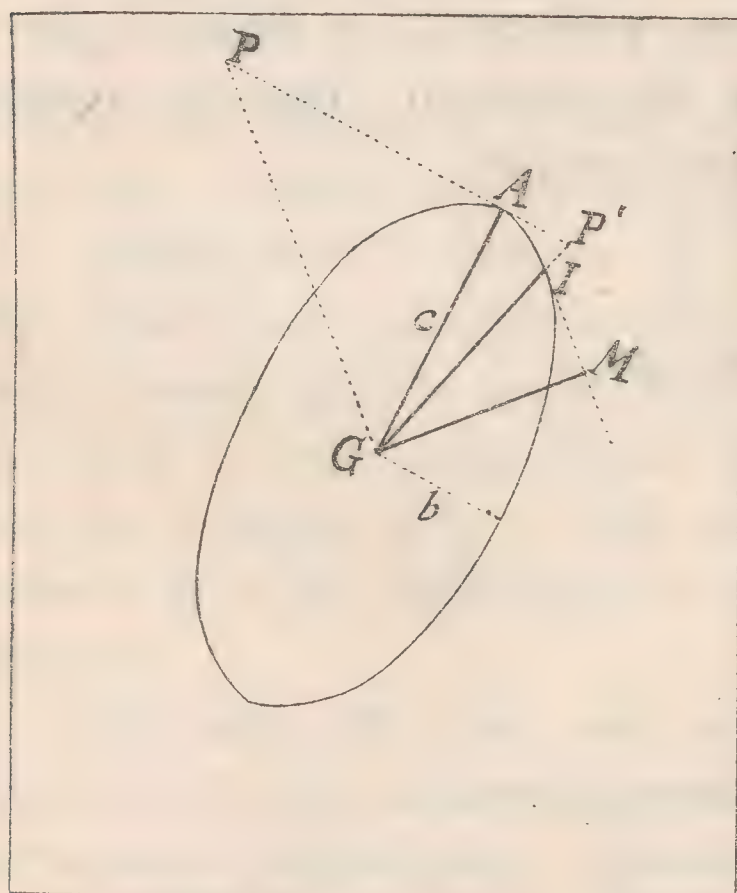
Da questa formola risulta subito che, quando $\gamma_{2m} = 0$, la seconda frazione continua è periodica, perchè si ha: $u'_m = -q_1 = u'_0$, con un periodo di m frazioni parziali. — D'altra parte, quando $\gamma_{2m} = 0$, si ha dalle (23): $v_m = \infty$; quindi anche la prima frazione continua è periodica, con un periodo di m frazioni parziali, contando (ricordiamolo) per tre frazioni regolari le due irregolari che si trovano in un suo periodo.

---

[8] Cfr. Halphen, *F. E.*, t. II, pp. 611-612.

La 2ª approssimazione della soluzione del 2° Problema balistico

Nota dell'Ing. FILIPPO BURZIO

Nell'uscire dalla bocca da fuoco, il proietto non possiede che la rotazione propria, impressagli dalla rigatura, e avente per asse l'asse di figura GA, col quale coincide il momento risultante della quantità di moto. Subito dopo, però, per effetto della coppia perturbatrice dovuta alla resistenza dell'aria, si manifesta una seconda rotazione, avente asse diverso dalla prima. La rotazione risultante avverrà perciò attorno a un asse d'istantanea rotazione GI diverso dall'asse di figura, dal quale verrà anche, pertanto, a distinguersi il momento GM della quantità di moto.

Data la grande velocità della rotazione propria rispetto a quella dovuta alla coppia perturbatrice, gli assi GI e GM rimangono, in generale, molto vicini a GA. Il moto di GM è chiamato, in balistica, moto di precessione. In 1ª approssimazione (1) si studia il moto dei proietti relativo al baricentro supponendo gli assi GA e GI coincidenti con GM, attribuendo, cioè, a GA il moto di GM: è lo studio della *precessione*. Fondandosi su questo, è possibile dare una 2ª approssimazione della soluzione.

(1) V. la mia Nota: *Sul moto e sulla stabilità dei proietti*, pubblicata sul fascicolo aprile-maggio 1918 della " Rivista di Artiglieria e Genio ", di cui si conservano tutte le notazioni.

del problema tenendo conto dello scostamento reale di GA da GM, e determinandolo: è lo studio della cosidetta *nutazione* del proietto.

***

Essendo il proietto un solido di rivoluzione, anche il suo ellissoide centrale d'inerzia è di rivoluzione, con l'asse maggiore disteso lungo l'asse di figura; discende allora dalla teoria del Poinsot sulla rotazione dei corpi che: *i tre assi di figura, di rotazione istantanea e del momento della quantità di moto sono compiani.* Infatti, se GA è l'asse maggiore dell'ellissoide centrale d'inerzia, e GI l'asse di rotazione istantanea, il piano tangente all'ellissoide in I sarà perpendicolare al piano GAI, e perciò il momento GM della quantità di moto, perpendicolare a quel piano tangente, sarà pure contenuto nel piano GAI suddetto, che è un piano meridiano qualunque.

Dalla stessa teoria del Poinsot risulta pure che: *il piano diametrale perpendicolare al momento della quantità di moto e l'asse d'istantanea rotazione sono coniugati rispetto all'ellissoide centrale d'inerzia.* Basta, infatti, riflettere che quel piano diametrale è parallelo al piano tangente all'ellissoide in I. Siano $c = \frac{1}{\sqrt{C}}$ l'asse maggiore dell'ellissoide, $b = \frac{1}{\sqrt{B}}$ l'asse minore, dove C e B sono i momenti d'inerzia del proietto, rispettivamente assiale ed equatoriale. Poichè le infinite coppie di diametri coniugati di un'ellisse si corrispondono in una involuzione, la proprietà enunciata dà luogo alla seguente relazione:

$$\tan AGI \times \tan AGP = \frac{b^2}{c^2},$$

ossia:

$$\frac{\tan AGI}{\tan AGM} = \frac{C}{B}, \tag{1}$$

la quale mostra che gli scostamenti dell'asse di figura dall'asse di rotazione istantanea e dal momento della quantità di moto sono dello stesso ordine di grandezza, e che il secondo è maggiore del primo.

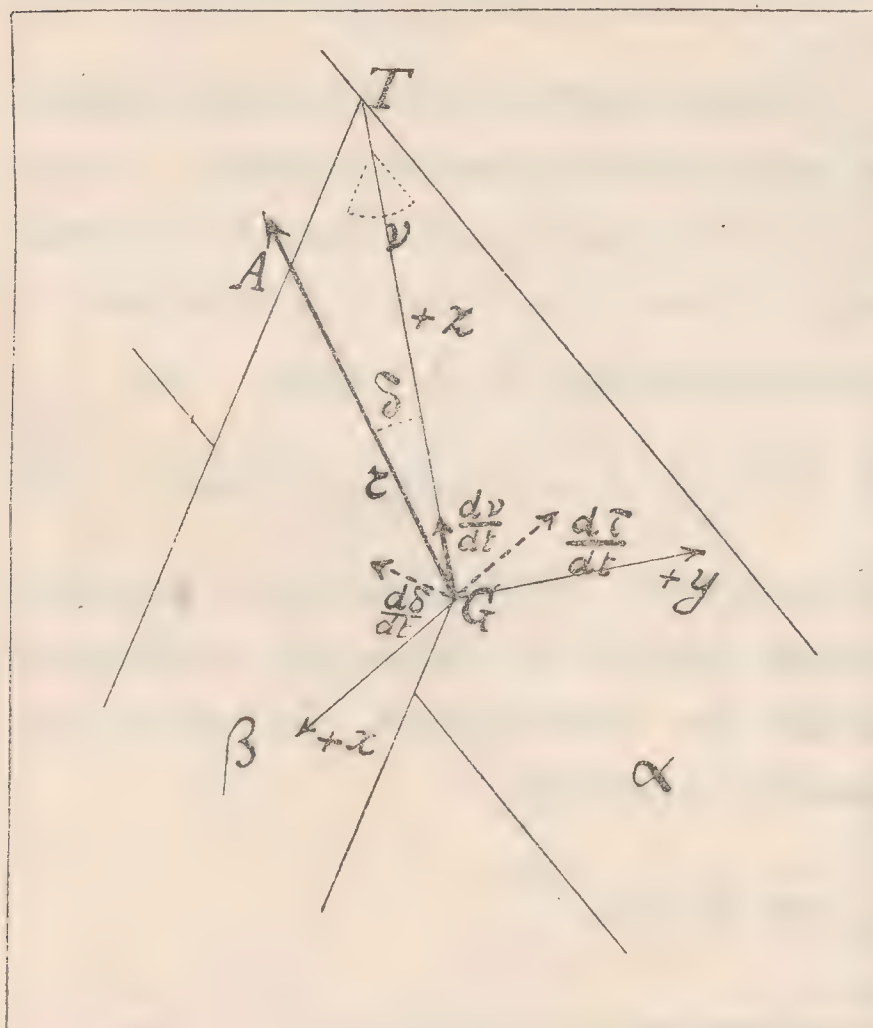
Basterà trovare una 2ª relazione fra gli angoli $\widehat{AGI}$, $\widehat{AGM}$ perchè il problema della nutazione sia completamente risolto,

e per questo osserviamo che è: $\tan AGI = \frac{\sqrt{p^2+q^2}}{r}$ [1], donde:

$$\tan AGM = \frac{B}{C}\,\frac{\sqrt{p^2+q^2}}{r}\,. \tag{2}$$

Tutto si ridurrà dunque a determinare $\sqrt{p^2+q^2}$, vale a dire la 2ª rotazione del proietto, impressagli dalla coppia perturbatrice.

***

Consideriamo il moto del proietto relativo alla tangente alla traiettoria descritta dal suo baricentro, riferendolo a un triedro trirettangolo $Gxyz$, mobile nel proietto e nello spazio, in cui l'asse x sia perpendicolare al piano di tiro, che sarà quindi il piano yz, e l'asse z coincida con la parallela alla tangente condotta ad ogni istante per il punto G, che rappresenta il baricentro. Questo triedro è dotato di un moto di rotazione che si effettua intorno all'asse x, con una velocità angolare che è quella stessa di abbassamento della tangente: $-\frac{d\tau}{dt}$ [2], e che perciò è nota, dalla soluzione del 1° Problema balistico: $-\frac{d\tau}{dt} = \frac{g\cos\tau}{v}$.

La posizione dell'asse di figura GA del proietto

---

[1] Indichiamo rispettivamente con $p\,q\,r$ le componenti della velocità angolare del proietto, nel suo moto relativo al baricentro, rispetto ai 3 assi principali centrali d'inerzia, di cui i 2 primi giacciono nel piano equatoriale, e il 3° è l'asse di figura.

[2] La velocità angolare $\left|\frac{d\tau}{dt}\right|$ è presa col segno — perchè la $\frac{d\tau}{dt}$ è essenzialmente negativa, l'angolo τ, inclinazione della tangente sull'orizzonte, diminuendo al crescente di t.

rispetto al triedro $Gxyz$ è completamente definita dai due angoli: ν che il piano di resistenza forma col piano di tiro; δ che, nel piano di resistenza, l'asse di figura forma con la tangente. Il moto di GA relativo a $Gxyz$ sarà pertanto definito dalle 2 velocità angolari $\frac{d\nu}{dt}$ e $\frac{d\delta}{dt}$.

La velocità angolare assoluta ω del moto del proietto relativo al baricentro risulterà quindi dalla somma geometrica delle seguenti velocità angolari: r di rotazione propria del proietto attorno al suo asse di figura; $\frac{d\nu}{dt}$ e $\frac{d\delta}{dt}$ del moto dell'asse di figura relativo al triedro $Gxyz$, di cui $\frac{d\nu}{dt}$ distesa sulla tangente, $\frac{d\delta}{dt}$ perpendicolare al piano di resistenza, e perciò contenuta nel piano equatoriale del proietto; $-\frac{d\tau}{dt}$ di trascinamento.

La proiezione di ω sul piano equatoriale del proietto vale $\sqrt{p^2+q^2}$: a questa sarà pertanto uguale la somma geometrica delle proiezioni, su quel piano, di $\frac{d\delta}{dt}$, $\frac{d\nu}{dt}$, $-\frac{d\tau}{dt}$.

Indichiamo con $\pi\alpha\beta$ rispettivamente il piano equatoriale del proietto, il piano di tiro ed il piano di resistenza, e siano $a\,b$ le traccie, su π, di α e β. I piani $\alpha\beta$, intersecantisi nella tangente GT, formano fra di loro l'angolo ν: ciò vuol dire che ν è l'angolo delle loro traccie sopra un piano perpendicolare a GT: l'angolo di quest'ultimo piano con π è δ, perchè δ è l'angolo delle loro normali GT, GA: se ne deduce che l'angolo $\widehat{ab}$ vale $\nu \cos \delta$.

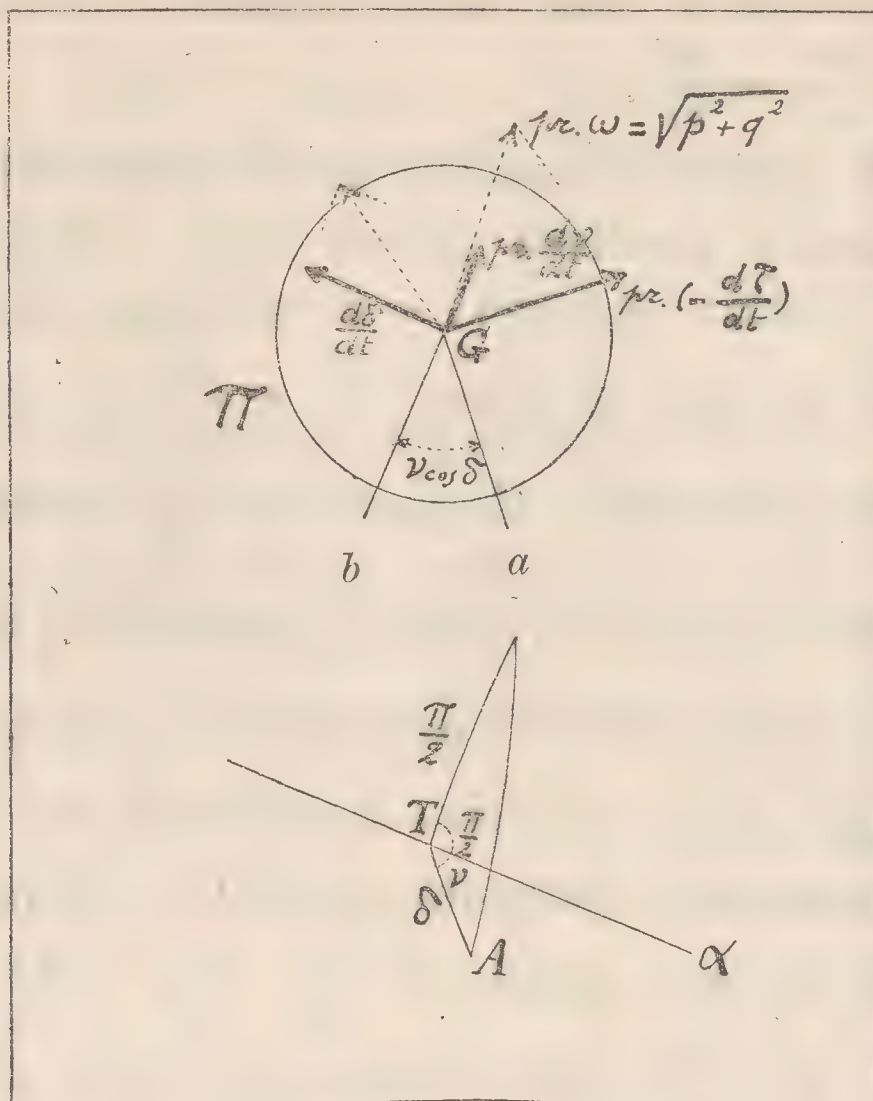
Ciò posto, abbiamo:

la $\frac{d\delta}{dt}$ giace in π, ed è perpendicolare alla b;

la proiezione, su π, della $\frac{d\nu}{dt}$ è distesa su b e vale $\frac{d\nu}{dt}$ sen δ;

quanto alla $-\frac{d\tau}{dt}$ distesa sull'asse x normale al piano α, osserviamo che l'inclinazione di x su π è il complemento dell'angolo $\widehat{GAx}$, il quale è dato dal triangolo sferico rettilineo AxT:

$$\cos Ax = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\nu\right) \operatorname{sen}\delta = -\operatorname{sen}\nu \operatorname{sen}\delta .$$

Quindi la proiezione di $-\frac{d\tau}{dt}$ su π vale: $-\frac{d\tau}{dt}\,\text{sen}\,Ax$, ed è distesa sopra una retta perpendicolare alla a.

Avremo pertanto immediatamente:

$$(3)\quad p^2+q^2=\left[\left(\frac{d\delta}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\nu}{dt}\right)^2\text{sen}^2\delta\right]+\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2(1-\text{sen}^2\nu\,\text{sen}^2\delta)+$$
$$+2\sqrt{\left(\frac{d\delta}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\nu}{dt}\right)^2\text{sen}^2\delta}\times\left(-\frac{d\tau}{dt}\right)\sqrt{1-\text{sen}^2\nu\,\text{sen}^2\delta}\times$$
$$\times\,\text{sen}\left(\nu\cos\delta-\text{arc tan}\,\frac{d\delta/dt}{d\nu/dt\,\text{sen}\,\delta}\right).$$

Per le quantità che figurano nel 2° membro della (3) abbiamo:

dal 1° problema balistico: $-\frac{d\tau}{dt}=\frac{g\cos\tau}{v}$, e i valori di v corrispondenti a τ;

dalle formole del Mayevski [1]: $\begin{cases}\dfrac{d\delta}{dt}=-\dfrac{d\tau}{dt}\cos\nu\\[2mm] \dfrac{d\nu}{dt}=\dfrac{\mathfrak{M}}{Cr\,\text{sen}\,\delta}+\dfrac{\text{sen}\,\nu}{\tan\delta}\,\dfrac{d\tau}{dt};\end{cases}$

---

[1] N. Mayevski, *Traité de balistique extérieure,* Paris, 1872, pag. 172. Cfr. la mia Nota: *Sopra alcune formole del Mayevski relative al 2° Pro-*

dalla 1ª approssimazione della soluzione del 2° problema balistico (precessione) i valori di δ e ν.

È così possibile, mediante le equazioni (3) e (2), calcolare, per ogni punto della traiettoria, i valori della rotazione dovuta alla coppia perturbatrice, e dello scostamento dell'asse di figura dal momento della quantità di moto.

***

Applicazione. — Facciamo l'applicazione del metodo suesposto allo stesso caso numerico trattato della Nota citata, di proietto di una bocca da fuoco esistente, sparato con inclinazione $\alpha = 60°$ e velocità iniziale $v_0 = 263$ $^m/_{sec}$: caso di tiro curvo a piccola velocità, per il quale il metodo indicato, di 1ª approssimazione, ci ha già permesso di determinare i valori di δ e ν per un certo numero di punti della traiettoria, individuati dai corrispondenti valori τ dell'inclinazione della tangente sull'orizzonte.

Applicando le formole precedenti, si è compilata la seguente Tabella, dove occorre ricordare che $\sqrt{p^2 + q^2}$ è la velocità angolare che si trascura nella 1ª approssimazione, rispetto alla r, uguale a 394; e che i valori δ^0 e ν^0 indicati della 2ª e 3ª colonna della Tabella stessa sono quelli risultanti dall'esempio numerico sopracitato.

---

blema balistico fondamentale („ Atti della R. Accad. delle Sc. di Torino „, vol. 53, disp. 11, 1918).

τ^0	δ^0	ν^0	$\sqrt{p^2+q^2}$	tan AGM
60	—	—	—	—
58	1,6	28	0,022	0,00009
54	3,7	69	0,039	0,00016
48	4,8	86	0,036	0,00016
42	5,5	81	0,048	0,00019
36	7,0	71	0,055	0,00022
30	9,4	64	0,057	0,00022
24	12,2	61	0,057	0,00023
18	15,0	60	0,058	0,00023
12	18,0	61	0,058	0,00023
6	20,7	63	0,069	0,00027
0	23,4	65	0,076	0,00030
— 6	25,7	69	0,080	0,00034
— 12	27,6	74	0,093	0,00037
— 18	28,9	80	0,101	0,00040
— 24	29,3	90	0,113	0,00045
— 30	28,6	103	0,126	0,00050
— 36	26,3	124	0,142	0,00057
— 42	21,9	156	0,153	0,00061
— 44	20,0	172	0,151	0,00060
— 45	19,0	182	0,148	0,00059
— 46	18,0	193	0,144	0,00058
— 48	16,5	218	0,136	0,00054
— 54	16,1	314	0,154	0,00062
— 56	17,9	364	0,192	0,00077
— 58	19,3	418	0,244	0,00098
— 60	19,4	478	0,291	0,00116

Al massimo valore 0,00116 di tan AGM, corrisponde $\widehat{AGM}_{\max} \sim 4'$.

***

Conclusione. — Risulta dall'esempio numerico ora svolto che il fenomeno di nutazione è di entità estremamente limitata, almeno per il caso considerato del tiro curvo a piccola velocità (che è, del resto, quello per cui il 2° Problema balistico ha maggiore importanza), poichè lo scostamento asse di figura-

momento della quantità di moto si mantiene sempre assolutamente trascurabile. Si può dunque con piena sicurezza arrestarsi alla 1ª approssimazione della soluzione, cioè alla precessione, e considerare il moto di GM, che così si viene a determinare, come il moto di GA.

L'importanza di questa soluzione relativa alla nutazione, non consiste, dunque, nel fatto ch'essa permette di determinare con una 2ª approssimazione il moto dell'asse di figura dei proietti, ma nella dimostrazione, che ne discende, della sufficiente esattezza della 1ª approssimazione. È ciò di cui dubitava, ad esempio, il Siacci, quando osservava: " Il S. Robert, il Mayewski, il De Sparre hanno bensì tenuto conto dell'angolo fatto dall'asse di figura colla tangente alla traiettoria, ma nelle espressioni della resistenza hanno considerato l'asse di figura come coincidente con l'asse istantaneo di rotazione. Le espressioni della resistenza trovate nella Nota V possono dar modo di decidere se le forze provenienti da tale non coincidenza siano realmente trascurabili rispetto a quelle provenienti dal non coincidere l'asse di figura colla tangente alla traiettoria " [1]. Il metodo cui egli accenna, eventualmente fondato sulle espressioni che della resistenza dell'aria egli dà nella sua Nota: *Il potenziale della resistenza*, pare assai meno semplice di quello sopraindicato.

Con ciò il 2° Problema balistico risulta singolarmente semplificato, e quindi avvicinata la possibilità delle sue numerose applicazioni pratiche.

Torino, 14 maggio 1918.

---

[1] Siacci, *Balistica*, ediz. 1888, pag. 365.

L'Accademico Segretario
Carlo Fabrizio Parona

CLASSI UNITE

Adunanza del 9 Giugno 1918

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. COMM. ANDREA NACCARI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti,

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, i Soci Jadanza, Guidi, Parona, Grassi, Panetti, e Majorana;

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche, i Soci S. E. Boselli, Direttore della Classe, De Sanctis, Brondi, Einaudi, Baudi di Vesme, Schiaparelli, Patetta, Vidari, Prato, Cian, Pacchioni, Valmaggi, e Stampini Segretario della Classe, che funge da Segretario delle Classi unite.

È scusata l'assenza dei Soci D'Ovidio e Somigliana.

Si legge e si approva l'atto verbale dell'adunanza a Classi unite del giorno 7 aprile u. s.

Per invito del Presidente, l'Accademico Segretario Stampini legge una circolare a stampa della Società Botanica Italiana con sede a Firenze, presieduta dal nostro collega O. Mattirolo, la quale fa voto perchè il Governo " per l'avvenire provveda a " disciplinare con opportune norme la posizione giuridica degli " eventuali insegnanti di nazionalità straniera in confronto a " quella dei docenti italiani ".

È pure data lettura di una lettera del Dottore Giovanni Carbonelli, il quale fa dono all'Accademia di " una raccolta " di opuscoli e trattati riguardanti le scienze mediche ". E l'Accademia aggiunge i suoi ringraziamenti a quelli già fatti, in nome di essa, dal Presidente all'egregio donatore.

Invitato dal Presidente, il Socio Parona legge, in sostituzione del Socio relatore assente, Pio Foà, la Relazione sul concorso al Premio istituito col lascito del Senatore Giovanni Morelli di Bergamo, nella quale si propone che il Premio sia conferito al Sig. Dott. Ettore Parigi. Nessuno chiedendo di parlare, il Presidente mette ai voti l'approvazione della Relazione, la quale risulta approvata alla unanimità.

Il Presidente invita poscia il Socio Cian a leggere la Relazione della Commissione per il premio Gautieri riservato alla Letteratura per il triennio 1914-1916.

Relazione della Commissione per il Premio Gautieri riservato alla *Letteratura* (triennio 1914-1916)

La Commissione da Voi chiamata a far proposte pel conferimento del Premio Gautieri, da assegnarsi a pubblicazioni letterarie — comprese anche le letterature classiche e le straniere — uscite nel triennio 1914-16, esaurito il proprio mandato, dà conto a Voi, chiarissimi Colleghi, del lavoro compiuto.

E anzitutto essa gode di esprimervi la compiacenza provata nell'osservare come, pur trattandosi d'un premio modesto per l'entità sua materiale e di tempi in gran parte punto propizî alla serena attività intellettuale, non sieno mancate, fra quelle presentate al concorso o segnalate da Socî nazionali, opere per molti riguardi cospicue, le quali attestano ancora una volta quanto persista ormai fra noi, progressivamente tenace e vivace, la tradizione dei buoni studî.

V'ha sì un piccolo gruppo di pubblicazioni — *Lo Spirito della Pietà* di Fabrizio Colamussi, *Il sogno* del Gattuso di Brancaccio, *L'eloquenza volgare di S. Bernardino da Siena* di Cosimo Faggiano — le quali per l'indole loro e per lo scarso valore si appalesano a primo tratto inadeguate alla natura e ai fini del presente concorso.

Ma fra queste non vanno confuse le Introduzioni che Michele Scherillo, insigne maestro e critico operoso, mandò innanzi alle sue edizioni hoepliane del Boccaccio, dell'Ariosto e del Machiavelli; tutte per più motivi degne di nota, sebbene il carattere specialmente scolastico dei volumi pei quali erano scritte, togliesse all'autor loro la possibilità e l'occasione di porgere di quella materia una trattazione larga e più organica.

Invece nel grosso volume di Sebastiano Vento su *Le condizioni della oratoria sacra del Seicento*, alla mole del lavoro, non inutile pel molto materiale raccolto ed esaminato, ma farraginoso e prolisso, mal corrispondono la novità e la solidità

dei resultati, anche per certi preconcetti dai quali l'autore s'è lasciato dominare.

Il volumetto di Anterio Meozzi sul Carducci umanista, più che uno " studio critico „, come s'intitola, è la sola prima parte di esso e in forma d'appunti slegati, e di materiali, che riusciranno tuttavia giovevoli a chi vorrà trattare in séguito il bel tema.

In compenso, abbiamo una serie d'altri lavori variamente pregevoli in campi diversi, e che qui si rassegnano rapidamente.

Ferruccio Ferri, studiando *La giovinezza d'un poeta* — l'umanista Basinio Basini — nei suoi *Carmina*, con sicurezza di nuove indagini e con sagacia di critica storica e filologica, corrobora le conclusioni alle quali egli stesso era giunto in un precedente saggio sul *Liber Isotteus*, da lui rivendicato al poeta parmense.

Il dott. Luigi Russo e la signorina Angela Vesin esordiscono felicemente nell'arringo letterario con due monografie, che sono i migliori lavori complessivi che abbiamo rispettivamente sul *Metastasio* e sul *Tommaseo poeta*; più ampia quella e vigorosa, ma men severa ed equilibrata nella sua struttura e men rifinita e approfondita nella esecuzione delle singole parti e con qualche segno di fretta; più ristretta questa e non priva di ridondanze, ma fina e garbata; l'una e l'altra, indubbiamente, frutto di larga preparazione e animate da un senso vivo dell'arte.

Il volume che Emilio Cecchi — un giovine già noto in questo campo per un eccellente libretto sul Kipling — ha presentato come prima parte d'una *Storia della Letteratura inglese nel sec. XIX*, potrebbe a primo aspetto sembrare soltanto un'opera di larga e geniale compilazione, ispirata a quella del Taine. Ma in realtà essa è un lavoro di prima mano, che mostra l'autore ben preparato a trattare, con vedute personali, la non facile materia, ben preparato non pure sulla letteratura critica dei varî scrittori che viene illustrando nella vita e nella produzione loro, ma anche — e sovrattutto — sull'esame diretto dei testi. Dell'amore intelligente e dello spirito penetrante e del gusto onde il Cecchi ha studiato specialmente l'aurora del Romanticismo inglese — nel Coleridge con particolare efficacia — abbiamo una conferma dai saggi frequenti di traduzioni prosastiche che viene inserendo nelle sue pagine.

La Commissione s'è trovata concorde nel riconoscere che il nuovo volume con cui si fa innanzi il dott. Ezio Levi — *La Storia poetica di Don Carlos* — vivo e interessante volume, pur in un campo nuovo e tanto diverso, segna un progresso nell'attività critica di questo valoroso giovine, al quale, sino dal 1910, questa Accademia assegnò, diviso col Donadoni, uno dei suoi premî Gautieri per l'ampia monografia su Francesco Vannozzo. Ma essa crede di non poterlo prendere in maggiore considerazione pel presente concorso, quantunque non ignori, anzi apprezzi come merita, un altro suo volume, per più riguardi assai notevole, sulla *Poesia di popolo e poesia di Corte nel Trecento* (1915).

. . . .

L'attenzione dei Commissarî si è, infine, fermata su due opere che spiccano incontestabilmente fra le altre (1).

. . . .

Entro un'orbita più circoscritta si aggira il volume di Ettore Bignone su *Empedocle* (Torino, Bocca, 1916), anche se in esso gli elementi forniti dall'indagine storico-filosofica si consertino di necessità, e con molta larghezza, con quelli più propriamente filologici e letterarî. Ma il libro, che è pregevole esempio di monografia critica, cioè filologica e storica ad un tempo, solida e originale, organica e compiuta in ogni sua parte, volge sopra un tema assai più vasto di quanto forse non possa sembrare a primo tratto. Infatti il pensiero filosofico e l'arte di Empedocle vi sono trattati con una profondità che compensa dell'apparente limitazione della materia, dacchè essi vi sono considerati in tutte le loro attinenze più intime col movimento filosofico, scientifico e letterario, anteriore e successivo, sì da offrirci

---

(1) È nominata qui soltanto l'opera di Ettore Bignone, come quella a cui fu assegnato l'intero premio dall'Accademia. La Commissione aveva a maggioranza proposto che il premio fosse diviso in parti uguali tra il Bignone e l'autore dell'altra opera, a cui sopra è accennato e della quale non può essere reso pubblico il giudizio a norma dell'ultimo capoverso dell'art. 5 del *Regolamento interno pel conferimento dei Premi Gautieri*.

Gli Accademici Segretari
Carlo Fabrizio Parona
Ettore Stampini

un'indagine ampia ed accurata e insieme una ricostruzione, in parte congetturale, dell'opera poetica del grande agrigentino; una ricostruzione felice e sicura e tanto più apprezzabile, quanto maggiori erano le difficoltà da superare e i pericoli da evitare.

Ardua impresa, alla quale il giovine filologo s'era venuto preparando coi suoi studi su Lucrezio e su Epicuro e che egli ha affrontato da conoscitore esperto delle manifestazioni più varie e più caratteristiche della vita ellenica, armato dei più delicati stromenti della critica filologica, come attestano anche le versioni che offre dei frammenti empedoclei e le ricche illustrazioni e le appendici che li accompagnano.

Torino, 1° giugno 1918.

Andrea Naccari, *Presidente*
Ettore Stampini
Giovanni Sforza
Luigi Valmaggi
Vittorio Cian, *Segretario e relatore*

Gli Accademici Segretari
Carlo Fabrizio Parona
Ettore Stampini

Jost
Imuttbach
2715
2140
Staffel Alp
2276
46°

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di **C. Frati, A. Baudi di Vesme** e **C. Cipolla.**

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in–f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di **C. Cipolla, G. De Sanctis** e **P. Fedele.**

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in–4° di 70 pagg. e 96 tav.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza del 26 Maggio 1918 . *Pag.* 535

Sacco (Federico). — Il glacialismo antico e moderno del Cervino (Nota I, con una tavola) . . . . „ 536

Guareschi (Icilio). — Ricerche sull'acqua di cristallizzazione, composti con $2H^2O$ e con $3H^2O$ (Nota IV) . . . . . „ 551

Gerbaldi (F.). — Simmetria e periodicità nelle frazioni continue di Halphen (Nota II) . . . . „ 559

Burzio (Filippo). — La 2ª approssimazione della soluzione del 2° Problema balistico . . . . „ 578

Classi Unite.

Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza del 9 Giugno 1918 . *Pag.* 586

Relazione della Commissione per il premio Gautieri riservato alla Letteratura (triennio 1914-1916) . . . . „ 588

Tip. Vincenzo Bona – Torino.

ATTI

DELLA

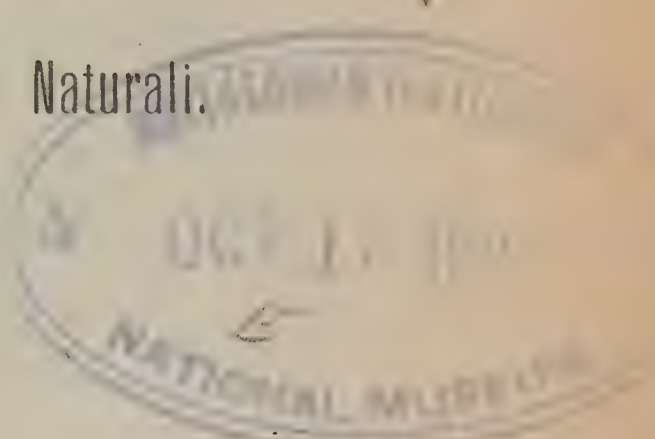
REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. LIII, Disp. **15ª**, **1917-1918**.

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 3.
1918

CLASSI UNITE

Adunanza del 16 Giugno 1918

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. COMM. ANDREA NACCARI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti, della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, i Soci nazionali residenti Segre, Peano, Jadanza, Guidi, Parona, Mattirolo, Grassi, Panetti, Sacco, Majorana, e i Soci corrispondenti Gustavo Colonnetti e Gian Antonio Maggi;

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche, i Soci nazionali residenti Pizzi, De Sanctis, Einaudi, Baudi di Vesme, Schiaparelli, Patetta, Cian, Pacchioni, Valmaggi, e Stampini Segretario della Classe, che funge da Segretario delle Classi unite.

Scusano l'assenza i Soci Brondi e Prato.

Aperta l'adunanza alle ore 10, il Presidente dà subito facoltà di parlare all'Accademico Segretario Stampini, il quale, sicuro di rendersi interprete dell'unanime sentimento degli

illustri Colleghi, sottopone alla loro approvazione il seguente ordine del giorno:

" La Reale Accademia delle Scienze di Torino, raccolta in " adunanza a Classi unite, manda, commossa e reverente, un " saluto caldo di ammirazione e di fede all'Esercito e alla " Marina che, combattendo con impareggiabile ardimento e con " invitta saldezza, si affermano sempre più quale incrollabile " presidio delle terre e dei mari italiani, e dànno alla Patria " arra sicura di giorni gloriosi e di radioso avvenire „.

Quest'ordine del giorno è approvato tra gli applausi.

Il Presidente invita il Socio Cian a leggere il discorso commemorativo in onore di Arturo Graf. Il discorso è vivamente applaudito così dai Soci come dal pubblico presente.

Il Presidente sospende per alcuni minuti l'adunanza. Uscito il pubblico, l'adunanza ha luogo in forma privata per la lettura dell'atto verbale dell'adunanza precedente del 9 corr., che è approvato. Poscia l'Accademico Segretario legge una lettera del Sindaco di Torino, il quale, invitato a presenziare alla solenne commemorazione di Arturo Graf, delega a rappresentarlo l'Assessore municipale, nostro Socio, Prof. Guido Grassi. Legge inoltre una lettera della vedova di Arturo Graf, Sofia Rauchenegger, la quale, dolente di non potere per condizioni di salute essere presente alla commemorazione, ringrazia il Presidente per l'invito fattole. In fine l'Accademico Segretario legge una lettera del Socio nazionale non residente Fraccaroli, il quale dichiara di essere dolente di non poter intervenire all'adunanza del 16 corrente, in cui si conferirà il premio Gautieri, perchè, accettando pienamente la proposta della Commissione, si sarebbe fatto una festa di contribuire anche col suo voto " a rendere giustizia a due libri e a due autori che altamente onorano la scienza italiana „.

Relativamente al conferimento del premio Gautieri riservato alla Letteratura per il triennio 1914-1916, su proposta del Socio Stampini, si rimanda la decisione sulla votazione fatta, non che ogni altro eventuale procedimento, ad una prossima adunanza a Classi unite, che è stabilita per il giorno 23 corr.

Gli Accademici Segretari
Carlo Fabrizio Parona
Ettore Stampini

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 16 Giugno 1918

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. COMM. ANDREA NACCARI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Segre, Peano, Jadanza, Guidi, Mattirolo, Grassi, Panetti, Sacco, Majorana, i Corrispondenti Maggi e Colonnetti e il Socio Segretario Parona.

È scusata l'assenza del Direttore della Classe Senatore D'Ovidio e dei Soci Guareschi e Somigliana.

Si legge e si approva l'atto verbale della precedente adunanza.

Il Socio corrispondente Maggi presenta in omaggio due suoi volumi *Dinamica dei Sistemi*, lezioni sul Calcolo del Movimento dei corpi naturali; *Geometria del Movimento*, lezioni di Cinematica, e si dice lieto dell'occasione che gli si presenta di rinnovare a voce i ringraziamenti per l'onore fattogli dalla R. Accademia colla nomina a Socio. Il Presidente si compiace della presenza del Collega, lo ringrazia del dono assai apprezzato e delle sue espressioni all'indirizzo dell'Accademia.

Il Socio Mattirolo presenta, a nome dell'A., Prof. Costantino Gorini, la commemorazione di Francesco Ardissone, compianto nostro Socio corrispondente.

Il Socio Segre segnala con parole di elogio il volume *Sulla classificazione dei gruppi continui di trasformazioni di contatto dello spazio*, inviato in dono all'Accademia dall'A. Prof. Ugo Amaldi.

Sono presentate e accolte per la stampa negli *Atti* le seguenti Note:

Prof. Gaetano Scorza, *Sopra alcune notevoli matrici riemanniane*;

Prof. Ernesto Laura, *Sopra i moti quasi-liberi di un fluido elastico*;

Prof. Guido Fubini, *Fondamenti della Geometria proiettivo-differenziale di una superficie*.

Queste tre Note sono presentate dal Socio Segre.

Socio O. Mattirolo, *Contribuzione allo studio della* Monilia sitophila (Mont.) Sacc.;

Dott. P. Quarra, *Calcolo delle parentesi*;

Dott. Luisa Viriglio, *Estrazione graduale di radice cubica*.

Queste due Note sono presentate dal Socio Peano.

Socio F. Sacco, *Il glacialismo antico e moderno del Cervino*. Nota II;

Dott. Lorenzo Moschetti, *Sulla probabile identità della "peganite" con la "variscite"*. Nota presentata dal Socio Parona.

Il Presidente nel togliere l'adunanza, che per la Classe chiude l'anno accademico, saluta i colleghi, e, nel momento così grave per la Patria, si fa interprete del sentimento generale mandando un commosso, augurale saluto ai nostri prodi difensori, e fa voti affinchè l'inaugurazione del prossimo anno accademico sia confortata ed allietata dalla sicurezza della pace vittoriosa.

LETTURE

Sopra alcune notevoli matrici riemanniane

Nota del Prof. GAETANO SCORZA

Nella teoria delle matrici riemanniane di genere superiore a 2 il numero degli esempi concreti ben conosciuti è così scarso, che non mi pare inutile indicare qui un teorema atto a fornire esempi notevolissimi di matrici di Riemann di genere qualunque.

1. — Sia

$$a_0 x^{2p} + a_1 x^{2p-1} + \dots + a_{2p-1} x + a_{2p} = 0 \tag{1}$$

un'equazione di grado $2p$ a coefficienti interi, priva di radici multiple, con le radici tutte imaginarie e aventi tutte per modulo la radice quadrata di uno stesso numero razionale (positivo) σ.

Allora si può dimostrare che:

Se $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ *sono* p *radici distinte della* (1), *di cui due non siano mai imaginarie coniugate, la matrice*

$$\omega \equiv \| 1, \alpha_j, \alpha_j^2, \dots \alpha_j^{2p-1} \| \qquad (j = 1, 2, \dots, p)$$

è una matrice riemanniana di genere p, *per i cui indici di singolarità e moltiplicabilità* k *e* h (¹) *si ha*

$$k \gtreqless p - 1, \qquad h \gtreqless 2p - 1,$$

in queste relazioni valendo insieme i segni superiori o insieme i segni inferiori.

(¹) Per la definizione di matrice riemanniana e dei suoi caratteri che qui si considerano vedi la mia Memoria: *Intorno alla teoria generale delle matrici di* Riemann *e ad alcune sue applicazioni* (“ Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo „, t. XLI, 1916), Parte I, nⁱ 5 e 6.

2. — Cominciamo dal far vedere che:

La matrice ω *ammette almeno* p *forme riemanniane* ([2]) *alternate indipendenti.*

Poichè il prodotto di due radici coniugate della (1) è sempre uguale a σ, le radici della (1) coincidono con quelle dell'equazione che si ricava da essa ponendo $\frac{\sigma}{x}$ al posto di x e poi riducendo a forma intera.

Di qua si trae, indicando con ϵ un numero opportuno,

$$a_n = \epsilon \sigma^n a_{2p-n} \qquad (n = 0, 1, \ldots, 2p).$$

Ma è, per le ipotesi fatte,

$$\frac{a_{2p}}{a_0} = \sigma^p,$$

dunque si ha

$$\epsilon = \frac{1}{\sigma^p},$$

ed

$$a_n = \sigma^{n-p} a_{2p-n}.$$

Dopo ciò, l'equazione (1) che, divisa per x^p, diviene

$$a_0 x^p + a_1 x^{p-1} + \ldots + a_p + \frac{a_{p+1}}{x} + \ldots + \frac{a_{2p}}{x^p} = 0,$$

può scriversi

$$\text{(2)} \quad a_{2p}\left(\frac{x^p}{\sigma^p} + \frac{1}{x^p}\right) + a_{2p-1}\left(\frac{x^{p-1}}{\sigma^{p-1}} + \frac{1}{x^{p-1}}\right) + \ldots + a_{p+1}\left(\frac{x}{\sigma} + \frac{1}{x}\right) + a_p = 0.$$

Ora è

$$\frac{x^j}{\sigma^j} + \frac{1}{x^j} = \left(\frac{x^{j-1}}{\sigma^{j-1}} + \frac{1}{x^{j-1}}\right)\left(\frac{x}{\sigma} + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{\sigma}\left(\frac{x^{j-2}}{\sigma^{j-2}} + \frac{1}{x^{j-2}}\right),$$

dunque, mediante la sostituzione

$$\text{(3)} \qquad \frac{x}{\sigma} + \frac{1}{x} = y,$$

l'equazione (2) si può trasformare in un'equazione in y di grado p a coefficienti interi.

([2]) Loc. cit., [1]), I, n° 4.

Indichiamo questa equazione con

$$(4) \qquad b_0 y^p + b_1 y^{p-1} + \dots + b_{p-1} y + b_p = 0,$$

e le sue radici con $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$.

Allora le coppie di radici coniugate della (1) si otterranno risolvendo le p equazioni

$$\frac{x}{\sigma} + \frac{1}{x} = \beta_j \qquad (j = 1, 2, \dots, p),$$

ossia le p equazioni quadratiche

$$(5) \qquad x^2 - \sigma\beta_j x + \sigma = 0,$$

e si può supporre di aver scelte le denominazioni delle radici della (4) in tal maniera che fra le equazioni (5) quella rispondente alla radice β_j abbia per radici la radice α_j dell'equazione (1) e la radice ad essa coniugata $\bar{\alpha}_j$ [3].

Ciò posto, consideriamo gli elementi della riga j^{ma} della matrice ω come le coordinate proiettive omogenee di un punto A_j in uno spazio Σ a $2p-1$ dimensioni, e diciamo $\bar{A}_j$ il punto imaginario coniugato di A_j.

Poichè la (1) è a radici tutte distinte, si vede subito che i $2p$ punti A_j e $\bar{A}_j$ risultano indipendenti; quindi i due spazi a $p-1$ dimensioni, τ e $\bar{\tau}$, congiungenti l'uno i p punti A_j e l'altro i p punti $\bar{A}_j$, risultano due spazi imaginari coniugati indipendenti.

Adesso si consideri, entro la totalità lineare $\infty^{p(2p-1)-1}$ di tutti i sistemi nulli dello spazio Σ, quella, pure lineare, che diremo μ, dei sistemi nulli rispetto a ciascun dei quali risultano coniugate le $2p(p-1)$ coppie di punti del tipo:

$$(6) \qquad (A_j A_l), \quad (A_j \bar{A}_l), \quad (\bar{A}_j \bar{A}_l) \qquad (j \neq l).$$

Si verifica subito (per es., prendendo per un momento i punti A_j e $\bar{A}_j$ come vertici della piramide fondamentale delle

---

[3] Occorre appena avvertire che il ragionamento del testo è perfettamente analogo ad uno ben noto della teoria delle equazioni reciproche; e che le radici della (4) riescono tutte reali.

coordinate in Σ) che la totalità μ ha la dimensione $p-1$; ed è poi chiaro che due punti qualunque di τ, o di $\bar{\tau}$, risultano coniugati rispetto ad ogni sistema nullo di μ.

Si concepisca un sistema nullo di Σ come un punto di uno spazio lineare Σ' a $p(2p-1)-1$ dimensioni, riguardando come coordinate proiettive omogenee di questo punto in Σ' i $p(2p-1)$ coefficienti che compariscono nell'equazione del connesso di punti definito dal sistema nullo; allora la totalità lineare μ si riflette in uno spazio lineare μ' di Σ' di dimensione $p-1$, e, in base a considerazioni ben note ([4]), l'affermazione fatta a principio di questo n° sarà dimostrata appena si sia fatto vedere che μ' è uno spazio *razionale* di Σ', cioè che i mutui rapporti delle coordinate proiettive omogenee di μ' sono numeri razionali.

Per questo si osservi che i sistemi nulli di Σ aventi una coppia di punti coniugati in *una*, comunque fissata, delle $2p(p-1)$ coppie (6) costituiscono una totalità lineare, della dimensione $p(2p-1)-2$, riflettentesi in un iperpiano di Σ', e che μ' è l'intersezione dei $2p(p-1)$ iperpiani indipendenti di Σ', che così si ottengono in corrispondenza alle $2p(p-1)$ coppie (6); quindi i mutui rapporti delle coordinate di μ' sono intanto funzioni razionali a coefficienti interi delle radici dell'equazione (1).

Poichè l'insieme di coppie (6) è simmetrico rispetto ai punti di ciascuna delle coppie di punti imaginari coniugati $(A_j \bar{A}_j)$, questi mutui rapporti dipendono simmetricamente dalle radici di ciascuna delle p equazioni quadratiche (5), quindi essi sono pure funzioni razionali a coefficienti interi delle radici dell'equazione (4).

Ma l'insieme di coppie (6) è anche simmetrico rispetto all'insieme delle p coppie di punti $(A_j \bar{A}_j)$, dunque queste funzioni delle radici dell'equazione (4) sono funzioni simmetriche delle radici stesse, e i nostri mutui rapporti, una volta che i coefficienti della (4) sono numeri interi, sono, come volevasi, dei numeri razionali.

Notisi che, se $p > 1$, la totalità lineare μ contiene p sistemi nulli indipendenti, reali, degeneri, dotati ciascuno di un asse a $2p-3$ dimensioni. Questi assi sono gli spazi congiungenti a $p-1$ a $p-1$ le p coppie di punti imaginari coniugati $(A_j \bar{A}_j)$.

([4]) Cfr. loc. cit., [1]), I, § 2.

3. — Dimostriamo in secondo luogo che:

La matrice ω *è riemanniana,*

facendo vedere che:

Essa possiede delle forme riemanniane alternate principali (5).

Poichè la cosa è evidente se $p = 1$, possiamo supporre $p > 1$, cioè possiamo supporre che la totalità μ considerata nel n° precedente sia infinita.

Allora, poichè entro l'insieme dei sistemi nulli reali di μ i sistemi razionali costituiscono un insieme dovunque denso, per dimostrare che ω possiede forme riemanniane alternate principali, basta far vedere che μ contiene sistemi nulli reali in ciascun dei quali non riescono mai coniugati un punto di τ e il punto imaginario coniugato di $\bar{\tau}$ (6).

Per l'osservazione che chiude il n° 2, ciò potrebbe essere dedotto in modo immediato dall'interpretazione geometrica del teorema di esistenza delle funzioni abeliane che ho sviluppata in una mia Memoria del 1915 (7); ma è forse più comodo per il lettore procedere nel modo che ora sarà indicato.

Si ponga, con le $\xi_{j,r}$ e $\eta_{j,r}$ reali,

$$\alpha_j^{r-1} = \xi_{j,r} + i\eta_{j,r} \qquad (i = \sqrt{-1}\,;\ j = 1, \ldots, p\,;\ r = 1, \ldots, 2p),$$

e si eseguisca nello spazio Σ la trasformazione *reale* (8) di coordinate in cui le antiche coordinate x_r $(r = 1, \ldots, 2p)$ sono legate alle nuove x'_r mediante le formule

$$x_r = \sum_j^{1..p} (\xi_{j,r}\, x'_{2j-1} + \eta_{j,r}\, x'_{2j}).$$

Le nuove coordinate del punto A_l sono tutte nulle, tranne la x'_{2l-1} e la x'_{2l}, date rispettivamente da

$$x'_{2l-1} = 1 \qquad \text{e} \qquad x'_{2l} = i,$$

e quindi lo spazio a $2p - 3$ dimensioni, congiungente tutti i

(5) Loc. cit., 1), I, n° 5.

(6) Cfr. loc. cit., 1), I, n° 12.

(7) Scorza, *Il teorema fondamentale per le funzioni abeliane singolari* [" Memorie della Società ital. delle Scienze (detta dei XL) ", serie 3ª, t. XIX].

(8) È la trasformazione di coordinate che si utilizza anche nel n° 53 della Memoria cit. in 7).

punti A_l diversi da A_j e tutti i punti $\bar{A}_l$ diversi da $\bar{A}_j$, sarà rappresentato, nel nuovo sistema di coordinate, dalle equazioni:

$$x'_{2j-1} = 0\,, \qquad x'_{2j} = 0\,.$$

Ma allora il sistema nullo di μ avente questo spazio come asse sarà rappresentato (come connesso di punti), nel nuovo sistema di coordinate, dall'equazione

$$x'_{2j-1}\, y'_{2j} - x'_{2j}\, y'_{2j-1} = 0$$

dove le y'_r sono, al pari delle x'_r, coordinate correnti di punto; e la totalità μ, indicando con le $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ dei parametri indeterminati, sarà rappresentata dall'equazione

$$(7) \qquad \sum_j^{1..p} \lambda_j \,(x'_{2j-1}\, y'_{2j} - x'_{2j}\, y'_{2j-1}) = 0.$$

Indicando con $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p$ dei numeri non tutti nulli e con $\bar{\rho}_j$ il numero imaginario coniugato di ρ_j, le nuove coordinate di un punto di τ sono della forma

$$x'_{2j-1} = \rho_j \qquad x'_{2j} = \rho_j\, i \qquad\qquad (j = 1, \ldots, p);$$

e per conseguenza quelle del punto imaginario coniugato di $\bar{\tau}$ sono date da

$$x'_{2j-1} = \bar{\rho}_j \qquad x'_{2j} = -\,\rho_j\, i \qquad\qquad (j = 1, \ldots, p),$$

o, come possiamo anche supporre, da

$$x'_{2j-1} = \bar{\rho}_j\, i \qquad x'_{2j} = \bar{\rho}_j \qquad\qquad (j = 1, \ldots, p).$$

Ora il primo membro della (7) per

$$x'_{2j-1} = \rho_j\,, \qquad x'_{2j} = \rho_j\, i\,, \qquad y'_{2j-1} = \bar{\rho}_j\, i\,, \qquad y'_{2j} = \bar{\rho}_j$$

diventa

$$2 \sum_j^{1..p} \lambda_j\, \rho_j\, \bar{\rho}_j\,;$$

dunque perchè la (7) rappresenti un sistema nullo soddisfacente alla condizione posta più sopra basta supporre che in essa le λ_j siano reali, non nulle e tutte dello stesso segno.

4. — Da quanto è stato detto nei n[i] 2 e 3 risulta che ω è una matrice riemanniana (di genere p), con le imagini τ e $\bar{\tau}$ (9) nello spazio rappresentativo Σ, e che per il suo indice di singolarità k si ha

(8) $$k \geqq p-1.$$

Adesso si indichi con h l'indice di moltiplicabilità di ω, e si ricordi (10) che $h-k$ è il massimo numero di polarità razionali indipendenti di Σ in ciascuna delle quali riescono coniugati due punti qualunque di τ (e di $\bar{\tau}$).

Intanto, ragionando come nel n° 2, si riconosce che esistono p polarità razionali indipendenti di Σ in ciascuna delle quali riescono coppie di punti coniugati le $p(p+1)$ coppie di punti (distinti o no)

$$(A_j A_l) \quad \text{e} \quad (\bar{A}_j \bar{A}_l)$$

e le $p(p-1)$ coppie di punti

$$(A_j \bar{A}_l) \qquad (j \neq l),$$

e in ciascuna di codeste polarità riescono coniugati due punti qualunque di τ (e di $\bar{\tau}$), dunque deve essere

(9) $$h-k \geqq p.$$

Di qua e dalla (8) si trae, come volevasi,

(10) $$h \geqq 2p-1.$$

5. — Resta ora da far vedere che nella (8) e nella (10) valgono insieme i segni superiori o insieme i segni inferiori, ossia che se delle due uguaglianze

$$k = p-1 \quad \text{e} \quad h = 2p-1$$

ne sussiste una, sussiste anche l'altra.

Sia in primo luogo $k = p-1$.

Allora ω non ammette sistemi nulli riemanniani all'infuori di quelli contenuti nella totalità μ e quindi, se $p > 1$, non ammette altri pseudo-assi (11) (o, eventualmente, assi) di dimen-

---

(9) Cfr. loc. cit., [1]), I, n° 9.
(10) Loc. cit., [1]), nota [22]), a piè di pagina.
(11) Loc. cit., [1]), I, § 12.

sione 1 all'infuori delle p rette congiungenti le p coppie di punti $A_j \bar{A}_j$. Segue che ogni omografia riemanniana di ω deve lasciar fermi questi pseudo-assi o scambiarli fra di loro. D'altronde si vede subito ([12]) che essa non può scambiarli fra di loro, quindi essa ha necessariamente $2p$ punti uniti nei $2p$ punti A_j e $\bar{A}_j$.

Se $p = 1$ non si può parlare di pseudo-assi (o assi) di ω; ma, in tal caso, la conclusione a cui siamo pervenuti è evidente *a priori.*

Da essa si trae

$$h \leq 2p - 1;$$

e quindi, confrontando con la (10), si ha, come volevasi,

$$h = 2p - 1.$$

Sia, in secondo luogo, $h = 2p - 1$.

Allora la (9) dà

$$k \leq p - 1,$$

e quindi, confrontando con la (8), si ha pure

$$k = p - 1.$$

6. — A complemento del teorema del n° 1, oramai dimostrato, giova tener presenti le osservazioni che seguono:

I. *Se la matrice* ω *è pura* ([13]), *per essa si ha certo* $\mathrm{k} = \mathrm{p} - 1$ *e* $\mathrm{h} = 2\mathrm{p} - 1$.

E infatti, se ciò non fosse, sarebbe $h > 2p - 1$ e ω sarebbe, contro l'ipotesi, impura ([14]).

II. *Se la matrice* ω *è dotata di assi isolati* ([15]), *l'equazione* (1) *è riducibile nel corpo dei numeri razionali*;

per modo che:

III. *Se l'equazione* (1) *è irriducibile nel corpo dei numeri razionali, la matrice* ω *o è pura o è impura ma priva di assi isolati.*

([12]) Loc. cit., [1]), II, n° 11.
([13]) Loc. cit., [1]), I, n° 32.
([14]) Loc. cit., [1]), I, n° 42.
([15]) Loc. cit., [1]) I, n° 41.

Suppongasi infatti che ω ammetta degli assi isolati (cosicchè è certo $p > 1$).

Allora le omografie riemanniane di ω debbono mutare in sè ciascuno di questi assi ([16]). Ma fra codeste omografie quella risultante dal prodotto di un sistema nullo riemanniano generico di ω contenuto nel sistema μ per l'inversa di un altro sistema nullo sì fatto non ammette altri punti uniti che quelli delle p rette $A_j \bar{A}_j$, dunque ciascun asse isolato di ω è uno spazio congiungente un certo numero delle p coppie di punti coniugati $A_j \bar{A}_j$.

Supponiamo, per fissar le idee, che un asse di ω sia lo spazio, della dimensione $2q - 1$, congiungente i punti $A_1, A_2, \ldots, A_q$ e $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots, \bar{A}_q$.

Le coordinate di questo spazio sono i minori di ordine $2q$ estratti dalla matrice

$$(11) \qquad \begin{Vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \ldots & \alpha_1^{2p-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \alpha_q & \alpha_q^2 & \ldots & \alpha_q^{2p-1} \\ 1 & \bar{\alpha}_1 & \bar{\alpha}_1^2 & \ldots & \bar{\alpha}_1^{2p-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \bar{\alpha}_q & \bar{\alpha}_q^2 & \ldots & \bar{\alpha}_q^{2p-1} \end{Vmatrix},$$

dunque, poichè il nostro spazio è un asse di ω, i mutui rapporti di questi minori debbono essere numeri razionali.

Si considerino fra questi minori quello formato dalle prime $2q$ colonne e quelli, in numero di $2q$, che si ottengono sostituendo in esso, successivamente, la $(2q+1)^{ma}$ colonna di (11) alle colonne 1^a, 2^a, ..., $2q^{ma}$. I rapporti di questi $2q$ minori a quello formato dalle prime $2q$ colonne sono, a meno, per alcuni di essi, del segno, le somme dei prodotti a t a t ($t = 1, 2, \ldots, 2q$) dei $2q$ numeri $\alpha_1, \ldots, \alpha_q, \bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_q$ ([17]), dunque queste somme sono numeri razionali e l'equazione (1) si spezza, nel corpo dei numeri razionali, in una equazione di grado $2q$, avente per radici $\alpha_1, \ldots, \alpha_q, \bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_q$, e una equazione di grado $2(p-q)$, avente per radici $\alpha_{q+1}, \ldots, \alpha_p, \bar{\alpha}_{q+1}, \ldots, \bar{\alpha}_p$.

([16]) Loc. cit., [1]), nota [60]), a piè di pagina.

([17]) Vedi, per es., Pascal, *I determinanti* (Hoepli, Milano, 1897), pagine 171 e 172.

Notisi che se l'equazione (1) è riducibile nel corpo dei numeri razionali, poichè le sue radici sono, per ipotesi, tutte imaginarie, le equazioni di grado inferiore a $2p$ in cui essa si spezza sono tutte di grado necessariamente pari; e allora, basta ricordare il teorema sul determinante di VANDERMONDE generalizzato ([18]) di cui or ora è stato invocato un caso particolare, per dedurre che:

IV. *Se l'equazione* (1) *è riducibile nel corpo dei numeri razionali, la matrice* ω *è certo dotata di assi, cioè impura.*

Infine è utile rilevare esplicitamente che le proprietà della matrice ω dipendono non solo da quelle dell'equazione (1), ma anche dal modo come fra le sue radici si scelgono le p radici $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ a due a due non coniugate.

Per es., se l'equazione (1) è l'equazione alle radici primitive settime dell'unità

$$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0,$$

cosicchè nel caso attuale è $p = 3$, e una sua radice si indica con α, prendendo, per costruire ω, una volta la terna di radici $(\alpha, \alpha^2, \alpha^4)$ e un'altra la terna di radici $(\alpha, \alpha^2, \alpha^3)$, si ottiene, nel primo caso, una matrice riemanniana impura a indici massimi, nel secondo caso, una matrice riemanniana *pura* con l'indice di singolarità 2 e l'indice di moltiplicabilità 5.

Di queste due affermazioni la prima risulta da una mia Nota precedente ([19]), l'altra si troverà stabilita in un lavoro di prossima pubblicazione della sig.na RACITI, laureanda dell'Università di Catania.

Del resto sulle matrici riemanniane provenienti nel modo indicato in questa Nota dalle equazioni alle radici primitive dell'unità avrò forse occasione di ritornare in avvenire, per mostrare il legame strettissimo della loro teoria con la teoria gaussiana della divisione del cerchio.

Catania, 5 giugno 1918.

([18]) Loc. cit., [17]), pag. 169.

([19]) SCORZA, *Sulla quartica di* KLEIN *e la quintica di* SNYDER ("Atti dell'Accademia Gioenia di scienze naturali in Catania", serie 5ª, vol. X).

Sopra i moti quasi-liberi di un fluido elastico

Nota di ERNESTO LAURA

In varie Note [1], occupandomi del problema esterno della equazione delle onde sferiche

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \Delta \varphi, \tag{1}$$

notai, che per assicurare la unicità di soluzione di questo problema, si deve supporre che la φ si annulli ad ogni istante sopra il bordo dell'onda che si propaga. In una Memoria, contenuta nel volume pubblicato per le " Onoranze al Prof. D'Ovidio „ (in corso di stampa), dimostrai, come conseguenza di questa condizione, *la non possibilità*, in generale, della propagazione di onde di tipo armonico semplice tutte di uguale periodo all'esterno di una superficie σ convessa. Questo risultato lascia prevedere la esistenza di particolari soluzioni della (1) annullantisi (o la cui derivata normale si annulla) sopra la superficie σ, dai punti della quale si inizia il moto.

Queste soluzioni, d'altra parte, già mi si sono presentate nella determinazione del moto di un fluido all'esterno di una sfera [2].

---

[1] Cfr. in modo particolare *Sopra il problema esterno della Dinamica dei mezzi elastici isotropi*, " Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino „, Serie II, vol. LXIV.

Cfr. pure A. E. H. Love, *The propagation of Ware-motion in an isotropic medium*, " Proc. London Math. Society „, vol. I, 2ª Serie, 1906.

[2] E. Laura, *Sopra il problema della propagazione di moto all'esterno di una sfera, ecc.*, due Note, " Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino „, vol. L, 1915.

Non mi sembra perciò inopportuno definire in questa Nota queste particolari soluzioni, che, a giudicare dal caso trattato della sfera, sembrano avere, nei riguardi del problema esterno della equazione (1), importanza analoga a quella che le vibrazioni libere hanno nello studio delle vibrazioni dei corpi elastici di dimensioni finite.

Nella presente Nota, ammessa *a priori* l'esistenza di queste soluzioni, dimostro la proprietà fondamentale da esse posseduta e cioè *di essere periodiche o aperiodiche, sempre però con carattere smorzato.*

I.

Diremo nel seguito *moti quasi-liberi* di un fluido, propagati all'esterno di una superficie σ convessa, quei moti che ammettono un potenziale di velocità soddisfacente alle proprietà seguenti:

1° È rappresentabile mediante un potenziale ritardato di spazio, o di semplice strato, o di doppio strato:

$$\int_S \mu \frac{e^{k\left(t-\frac{r}{a}\right)}}{r} dS; \qquad \int_\sigma \mu \frac{e^{k\left(t-\frac{r}{a}\right)}}{r} d\sigma; \qquad \int_\sigma \mu \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{k\left(t-\frac{r}{a}\right)}}{r} d\sigma$$

dove S è lo spazio racchiuso da σ, e n è la normale esterna a σ.

In questi integrali k è una quantità reale o complessa e ponendo $\mu = \mu_1 + i\mu_2$ le μ_1, μ_2 sono funzioni continue, reali dei punti del campo di integrazione.

2° Si annulla nei punti di σ per ogni istante $t \geq 0$ (oppure si annulla la sua derivata normale).

3° Se $k = ik_2$ è un imaginario puro, i considerati potenziali sono del tipo (limitandoci ad integrali di spazi):

$$\int_S \frac{\cos k_2 \left(t - \frac{r}{a}\right)}{r} \mu dS$$

essendo la μ una funzione reale e continua dei punti di S. Noi ammetteremo, cioè, che non possa essere identicamente nullo,

nè il coefficiente di $\cos k_2 t$, nè quello di $\operatorname{sen} k_2 t$. In altre parole noi escludiamo dalle considerazioni nostre, soluzioni del tipo [3]:

$$\cos k_2 t \,.\, \varphi \qquad \text{o} \qquad \operatorname{sen} k_2 t \,.\, \varphi$$

essendo la φ soluzione della equazione $\Delta\varphi + k^2\varphi = 0$ annullantesi sopra la σ (o la cui derivata normale si annulla nei punti di σ).

Ammettiamo, *a priori*, che esista una successione di valori di k e una corrispondente successione di funzioni μ, per le quali i potenziali considerati abbiano le proprietà ora postulate; dimostreremo allora, che le quantità complesse k sono tutte con parte reale negativa.

II.

Supporremo nel seguito che i potenziali di velocità dei moti quasi-liberi sieno rappresentati mediante integrali superficiali estesi alla superficie, all'esterno della quale avviene il moto. La dimostrazione che seguirà, con leggiere modificazioni, si potrà adattare ai casi in cui i detti potenziali fossero rappresentati da integrali di spazio o da potenziali di doppio strato. Sia:

$$\psi = \int_\sigma \mu \frac{e^{k\left(t - \frac{r}{a}\right)}}{r} d\sigma$$

uno di questi potenziali. Posto:

$$\psi = \psi_1 + i\psi_2$$

---

[3] Nella Nota già citata [2] questa ipotesi restava implicitamente ammessa dalla forma particolare che io davo alle soluzioni studiate. Tra esse perciò non si presentavano soluzioni quale la seguente:

$$\cos kt \frac{\operatorname{sen} kr}{r}$$

la quale ovviamente si annulla sopra la sfera di raggio $R = \dfrac{2\pi}{k}$ ed è regolare all'esterno della sfera stessa (esclusi al più i punti all'infinito).

saranno le ψ_1, ψ_2 nulle sulla superficie σ (oppure saranno nulle le derivate normali di queste funzioni) per ogni valore di $t \geq 0$. Il potenziale:

$$\psi' = \psi_1 - i\psi_2 = \int_\sigma \mu' \frac{e^{k'\left(t - \frac{r}{a}\right)}}{r} d\sigma$$

nel quale k', μ' sono quantità complesse coniugate delle k, μ, apparterrà perciò ancora alla classe ora considerata.

Si ponga:

$$\psi = e^{kt}\varphi \qquad \psi' = e^{k't}\varphi'.$$

Sicchè:

$$\varphi = \int_\sigma \mu \frac{e^{-k\frac{r}{a}}}{r} d\sigma; \qquad \varphi' = \int_\sigma \mu' \frac{e^{-k'\frac{r}{a}}}{r} d\sigma.$$

Le φ, φ' all'esterno di σ soddisfanno perciò alle equazioni:

$$\Delta\varphi = \frac{k^2}{a^2}\varphi, \qquad \Delta\varphi' = \frac{k'^2}{a^2}\varphi'.$$

Da cui:

$$\varphi'\Delta\varphi - \varphi\Delta\varphi' = \frac{k^2 - k'^2}{a^2}\varphi\varphi'. \tag{2}$$

Sia Σ_1 una superficie tutta esterna a σ, n la normale esterna a σ e ν quella a Σ rivolta verso lo spazio S_1 compreso tra σ e Σ. Integrando la (2) ed estendendo la integrazione allo spazio S_1, si ottiene:

$$-\int_\sigma \left(\varphi' \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial\varphi'}{\partial n}\right) d\sigma - \int_\Sigma \left(\varphi' \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} - \varphi \frac{\partial\varphi'}{\partial\nu}\right) d\Sigma = \\ = \frac{k^2 - k'^2}{a^2} \int_{S_1} \varphi\varphi' dS. \tag{3}$$

Notando che le φ, φ' $\left(\text{oppure le } \frac{\partial\varphi}{\partial n}, \frac{\partial\varphi'}{\partial n}\right)$ sono nulle sopra σ e ponendo:

$$k = k_1 + ik_2; \qquad k' = k_1 - ik_2$$

avremo dalla (3), supponendo $k_2 \neq 0$:

$$4k_1 \int_S \varphi\varphi' dS = \frac{i}{k_2} \int_\Sigma \left(\varphi' \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} - \varphi \frac{\partial\varphi'}{\partial\nu}\right) d\sigma. \tag{4}$$

Si supponga che la Σ sia una superficie sferica di raggio R tendente all'∞^{to}; il limite del 2° membro esiste ed è nullo o negativo [4]. Poichè d'altra parte $\int_{S_1} \varphi\varphi' dS$ è una quantità reale e positiva, si conchiuderà:

$$k_1 \leq 0 .$$

III.

Dimostreremo ora che k_1 non può essere nullo. Se invero k fosse un imaginario puro, il potenziale ψ assumerebbe la forma:

$$\int_\sigma \frac{\cos k_2 \left(t - \frac{r}{a}\right)}{r} \mu \, d\sigma$$

con k_2 e μ reali.

Le funzioni:

$$\varphi = \int_\sigma \mu \frac{\cos k_2 \frac{r}{a}}{r} d\sigma ; \qquad \varphi' = \int_\sigma \mu \frac{\operatorname{sen} k_2 \frac{r}{a}}{r} d\sigma$$

si annullano sopra σ (oppure le loro derivate normali si annullano sopra σ).

E poichè all'esterno di Σ si ha:

$$\Delta\varphi + k^2\varphi = 0 , \qquad \Delta\varphi' + k^2\varphi' = 0 ,$$

se Σ è una superficie tutta esterna a σ si avrà:

$$\int_\Sigma \left(\varphi \frac{\partial \varphi'}{\partial \nu} - \varphi' \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\right) d\Sigma = 0 .$$

E questa eguaglianza sussisterà anche al limite, quando Σ divenga una sfera di raggio infinitamente grande. Con un ragio-

---

(4) *Sopra i potenziali generalizzati di Helmholtz*, 1ª Nota, " R. Istituto Lombardo Scienze e lettere „ (in corso di stampa).

namento analogo a quello del N. 4 della Nota ([4]) già citata, avremo dunque:

$$\int \mu \frac{\operatorname{sen} k_2 \frac{r}{a}}{r} d\sigma = 0$$

per ogni punto dello spazio. Il potenziale assumerebbe in conseguenza quella forma che noi abbiamo esclusa per definizione.

IV.

Nelle precedenti considerazioni è stato implicitamente ammesso che k non fosse reale. Consideriamo a parte questo caso. Si ponga:

$$\psi = \int_\sigma \mu \frac{e^{k\left(t - \frac{r}{a}\right)}}{r} d\sigma$$

con k e μ reali. Ponendo come precedentemente:

$$\psi = e^{kt}\varphi\,; \qquad \varphi = \int_\sigma \mu \frac{e^{-k\frac{r}{a}}}{r} d\sigma$$

la φ soddisferà all'equazione:

$$\Delta\varphi = k^2\varphi\,.$$

Da questa moltiplicando per φ ed integrando ad uno spazio S_1 compreso tra la superficie σ ed una sfera Σ tutta esterna a σ otterremo:

$$-\int_\sigma \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n} d\sigma - \int_\Sigma \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} d\Sigma =$$
$$= \int_S \left[k^2\varphi^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] dS$$

dove ν è la normale a Σ rivolta verso S_1. Il 1° integrale del 1° membro è nullo, poichè sopra σ si ha $\varphi = 0$ oppure $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$. Avremo dunque, il 2° membro essendo sempre positivo:

$$\int_\Sigma \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} d\Sigma < 0 \tag{5}$$

qualunque sia la sup. Σ esterna a σ. Si ha ora ([5]):

$$\int_\Sigma \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} d\Sigma =$$

$$= \int_\Sigma d\Sigma_Q \int_\sigma \int_\sigma d\sigma_{P_1} d\sigma_{P_2} \mu(P_1) \mu(P_2) \left[-\frac{k}{a} + \frac{1}{r_2} \right] \frac{e^{-k\frac{r_1+r_2}{a}}}{r_1 r_2} \frac{\partial r_2}{\partial \nu}.$$

Si ponga $d\Sigma_Q = R^2 d\omega$ dove $d\omega$, è l'elemento di una sfera unitaria; allora, poichè la funzione integranda è continua sia rispetto a R che rispetto alle variabili di integrazione ed i campi di integrazione sono tutti al finito, si avrà ([6]):

$$\lim_{R=\infty} \int_\Sigma \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} d\Sigma =$$

$$= \int_\omega d\omega \int_\sigma \int_\sigma d\sigma_{P_1} d\sigma_{P_2} \mu(P_1) \mu(P_2) \lim_{R=\infty} \left(-\frac{k}{a} + \frac{1}{r_2} \right) \frac{e^{-k\frac{r_1+r_2}{a}}}{r_1 r_2} \frac{\partial r_2}{\partial \nu} R^2 =$$

$$= \frac{k}{a} \lim_{R=\infty} \int_\omega d\omega \int_\sigma \int_\sigma d\sigma_{P_1} d\sigma_{P_2} \mu(P_1) \mu(P_2) e^{-k\frac{r_1+r_2}{a}} =$$

$$= \frac{k}{a} \lim_{R=\infty} \int_\omega d\omega \left[\int_\sigma d\sigma_{P_1} \mu(P_1) e^{-k\frac{r_1}{a}} \right]^2.$$

Dalla (5) discende allora subito:

$$k < 0.$$

Si conclude perciò in definitiva il Teorema seguente: *i moti quasi-liberi di un fluido elastico all'esterno di una superficie* σ *chiusa sono periodici o aperiodici di tipo smorzato.*

Pavia, 7 giugno 1918.

([5]) Essendo $r_1 = |P_1 Q|$, $r_2 = |P_2 Q|$.

([6]) Per i particolari di questo calcolo cfr. la mia nota già citata ([4]).

Contribuzione allo studio della "Monilia sitophila (Mont.) Sacc.„

Nota del Socio naz. resid. O. MATTIROLO

La Guerra (come del resto tutti i grandi rivolgimenti che determinano correnti di scambi e di commerci) si è sempre rivelata agente efficacissimo di trasporto di germi d'ogni specie.

La odierna immane tragedia che insanguina il mondo dovrà, anche per questo riguardo, essere segnalata in un prossimo avvenire, come agente di disseminazione di importanza grande, ed io non dubito di affermare che non tarderanno ad essere numerose le constatazioni di nuove specie importate nel nostro paese coi materiali che vi affluiscono dalle più lontane regioni.

La maggior parte di tali specie appariranno come meteore isolate, vi saranno segnalate per scomparire poi più o meno presto; mentre altre potranno trovare presso di noi condizioni adatte al loro sviluppo e a poco a poco si naturalizzeranno, come hanno fatto prima di loro centinaia di altre specie che ora hanno acquistato il diritto indiscutibile di dimora.

Gli esempi di queste immigrazioni non fanno difetto, nè credo sia qui il caso di trattenermi sopra fatti che ognuno può trovare largamente riferiti e documentati nella infinità di libri che si occupano di tali argomenti (1).

---

(1) Fra questi, interessantissimi sono i lavori di: GODRON, TOUCHY, COSSON, PLANCHON, GRENIER, ZIMMERMANN, BEHRENDSEN, NÆGELI, THELLUNG, FLAHAULT, GILLOT ecc. e la recente opera di TOUSSAINT, *Europe et Amérique (Nord-est) — Flores comparées comprenant tous les Genres Européens et Américains, les espèces communes aux deux contrées, naturalisées et cultivées*, Paris, 1912; e quella di A. BÉGUINOT ed O. MAZZA, *Le avventizie esotiche della Flora ital.*, " Nuovo Giorn. bot. ital. „ (Nuova Serie), vol. XXIII, N. 3, luglio 1916 (V. ivi la bibliografia).

Fra i vegetali che più si adattano a nuovi *habitat*, sono da annoverarsi gli inferiori, *Alghe, Funghi,* ecc., i quali, per la loro scarsa differenziazione, trovano più facilmente degli altri, si può dire quasi ovunque, condizioni convenienti alla loro vita.

È fra i Funghi che si trova il maggior numero di specie cosidette *cosmopolite.*

Sanno, più di tutti, gli agricoltori con quanta facilità i parassiti delle piante coltivate viaggino coll'uomo e si trasportino colle merci, ecc. ecc.

Il caso che io ho l'onore di segnalare oggi è una nuova dimostrazione della facilità dell'introduzione di nuovi germi operata da quel fattore al quale i naturalisti dànno il nome di *Antropico*; e, in questo nostro caso, il trasporto è stato indubbiamente operato dall'uomo, colla importazione dei semi e dei frutti alimentari.

La specie di cui discorrerò mi fu segnalata in quest'anno sopra il pane cosidetto di *munizione* adoperato per la nutrizione dei soldati.

Essa fu infatti già osservata a Torino due volte.

La prima sul pane dei soldati accasermati nei locali del R. Politecnico al Valentino, gettato dalle finestre del Palazzo nelle Ajole del R. Orto botanico della nostra Università.

La seconda sullo stesso *substratum* nella Caserma Lamarmora, ed ivi in quantità inquietante.

Sopra il pane il micelio e gli organi di moltiplicazione del fungo si svolgono in modo che il pane stesso si riveste in pochi giorni come di una muffa fitta di color ranciato di bellissimo aspetto.

Ho coltivato la specie sopra parecchi *substratum* (Gelatina peptonizzata, Agar, Pane, decotto di pane, ecc.) e ne ottenni rigogliosa la riproduzione conidiale in una quantità di culture così che oggi stimo opportuno di segnalarla ai micologi italiani, dopo averla comunicata al mio illustre amico Prof. P. A. SACCARDO, dal quale ebbi gentile eccitamento a scrivere questa breve illustrazione del fungo, che farò precedere da una rapida rivista della storia della specie *nuova* per la Flora italiana.

La prima volta il nostro fungo fu osservato sul pane d'uso militare, nell'anno 1841 dal Sig. M. ROUSSEL, Farmacista-capo a *Val de Grâce* in Francia.

Egli comunicò tale sua scoperta all'insigne micologo Camillo Montagne, che ne curò lo studio di concerto col Magendie.

Prima però che il lavoro di Montagne fosse pubblicato, il Dumas aveva egli pure notata la specie non soltanto sul pane, ma anche sulle farine, come sul frumento immagazzinato nei depositi militari francesi, dove si era riprodotta con inquietante prontezza, così da recare gravi danni.

Il Montagne pubblicò la prima illustrazione della specie negli *Annales des Sciences naturelles* del 1843 (1), descrivendola sotto il nome di:

Penicillum sitophilum. Mont., derivando il nome da *Σίτος*, grano.

Dalla Memoria di Montagne appare, che egli ritenne la specie *esotica*: *antea ut videtur non observatam, nullibi saltem, quod sciam, descriptam.* Egli non riferisce perciò dati relativi all'*Habitat.*

Lo stesso Autore nel 1856 nella *Sylloge* (2) indica invece più esattamente la località di stazione con queste parole:

Hab. in pane praesertim castrensi, nec non in tritico acervato et in similagine. Parisiis. Magendie.

Come sinonimo riferisce l'*Oidium aurantiacum* Lév. *secundum* cl. *Payen.*

Alcuni decenni dopo, nel 1882, P. A. Saccardo in *Michelia* (3) al N. 1531, ricorda e descrive nuovamente il fungillo avuto dal Therry di Lione, *in medulla panis corrupti, specimina pulcherrima* (N. 5090); però correggendo la classificazione del Montagne e indicando il fungillo col nome di:

Monilia sitophila (Mont.). Sacc.

e ricordando la sinonimia ammessa dal suo Autore.

Il Saccardo aggiunse alla descrizione le misure tanto dei portaconidii (120-130. 12 μ) quanto dei conidii (10. 12 μ) diam.

---

(1) Montagne C., *Quatrième Centurie des plantes cellulaires exotiques nouvelles*, Décades VIII, IX, X, " Annales des sciences naturelles ", IIe Série, tom. XX, 1843, pag. 377, N. 99.

(2) C. Montagne, *Sylloge Generis specierumque Cryptogamarum*, Parisiis, 1856, pag. 301.

(3) P. A. Saccardo, *Michelia*, pag. 359, vol. II. Patavii, 1882.

Più tardi, negli anni 1877-1886, per opera dello stesso Saccardo, la specie comparve delineata nei *Fungi italici autographice delineati* (*additis nonnullis extra-italicis asterisco notatis*) al N. 850, colla indicazione dell'*habitat* Lionese.

Finalmente nei volumi della *Sylloge* (1886) P. A. Saccardo elencò la diagnosi della specie colle identiche parole riferite già nella Michelia e mantenendo lo stesso nome.

Ivi alla indicazione dell'*habitat* di *Lione* aggiunse quella di *Parigi*.

Nessun'altra indicazione io ho potuto trovare nei libri di Micologia speciale degli *Hyphomycetes*. La specie non appare citata nè dal Lindau (1), nè dal Ferraris (2).

Riassumendo: il nostro fungo fu osservato sinora soltanto in Francia ed ivi sullo stesso *substratum* sul quale io lo rinvenni a Torino nell'autunno 1917 e nella primavera 1918.

Indicazioni sulla probabile stazione di origine del micete, oltre alle citate, io non ho potuto trovare, per cui, da quanto ho riferito, credo lecito inferire che anche in Francia possa essere stato importato coi grani esteri; perocchè parrebbe cosa impossibile che un fungillo così nettamente caratterizzato, così evidente per il suo rigoglioso sviluppo e per il suo colore notevolissimo, non sia stato prima segnalato dai micologi Europei, ciò che sarebbe certamente avvenuto se la specie fosse indigena dei nostri paesi. Certo è che in Francia apparve due volte sole e tutte e due le volte su grani importati, adibiti ad uso militare.

Mi auguro che il cenno presente possa essere di incitamento a nuove ricerche, dalle quali, spero, potranno risultare indicazioni positive sulla patria della specie, di cui ecco la descrizione.

I conidii germinano colla massima facilità e prontezza, appena poche ore dopo la semina. Dalla sera al mattino i filamenti micelici (che si ramificano rigogliosamente dicotomizzandosi) lasciano già scorgere le aree di semina ad occhio nudo!

---

(1) Lindau, in *Rabenhorst-Kryptogamen Flora*, IX. Abth. *Fungi imperfecti.*

(2) T. Ferraris, *Flora italica cryptogama. Hyphales.* Rocca San Casciano, 1910.

Sotto al microscopio, ho calcolato una velocità di progressione dei filamenti uguale a circa 70 *micra* in un'ora!

La germinazione dei conidii ha luogo secondo le modalità descritte nei trattati, specialmente per il genere *Monilia* così diligentemente illustrate nei classici lavori di Woronin.

Le ife risultanti dai conidii germinanti, si presentano già a poca distanza dal punto vegetativo, *settate*; esse corrono, si può dire, così velocemente sul *substratum* di coltura, dove si intrecciano, si aggrovigliano, riccamente ramificandosi, così da ricoprirlo in breve di uno fitto strato di muffa bianca.

Il diametro dei filamenti varia da 2 a 4-6 e + micra. In generale essi si presentano come bulbosi, presso i punti dove si ramificano, e qua e là rigonfi, a mo' di coroncine. Il contenuto è molto vacuolizzato, i setti assai vicini; la parete molto rifrangente.

I conidiofori cominciano a formarsi dopo uno o due giorni dalla semina; il loro sviluppo ricorda quanto già è stato descritto per le specie del *Genere* dal Woronin e dal De Bary, ecc.

I rametti si erigono verticalmente sul *substratum*; i conidii si originano secondo il tipo acrogeno solito; ma non si formano in generale se non quando il conidioforo si è già ripetutamente ramificato.

Gli articoli conidiferi terminali, che si vanno abbozzando al disotto dell'apice di vegetazione, a poco a poco si rigonfiano, e quindi si separano a guisa di coroncine e finalmente si distaccano, però senza la intromissione di quei " *disjunctores* „ curiosi, che il Woronin ha descritto nelle forme conidiali della maggior parte delle sue *Sclerotiniae*.

Catenule infinite di conidii seriati moniliformi si formano a questo modo ed è appunto alla loro presenza, in numero colossale, che si devono le colorazioni delle aree occupate dal fungo.

I conidii così formati variano assai nei loro contorni, imperocchè, quantunque normalmente dimostrino forma globosa, pure molti di essi assumono parvenze e dimensioni differenti dalle normali.

Alcuni sono ovati, altri trapezoidali, altri limoniformi, quasi triangolari, allungati, rettangolari, ecc., come del resto si osserva nei conidii delle altre specie del Genere e del

Genere *Oidium*. Le misurazioni mi hanno dato una media di 8 a 12 μ di lunghezza per 6 a 8 di larghezza; in genere misurano 10 × 8 μ.

Il contenuto conidiale è molto vacuolizzato, formato da materiali plasmatici e oleosi; accompagnato da un nucleo assai piccolo che si può riconoscere coll'impiego del carmino. La membrana conidiale è netta e rifrangente.

I conidii sono leggerissimamente colorati, e quasi si potrebbero dire incolori. Dapprima, riunendosi i conidiofori in agglomerazioni diffuse, fioccose non compatte, la muffa assume un color roseo, che a poco a poco diventa più carico, poi rosso spiccato e finalmente ranciato. La successione di queste tinte sul *substratum* è di un bellissimo effetto.

Solo in certe condizioni di cultura, come nei tubi da saggio, ove l'accesso dell'aria è limitato, i colori rimangono sbiaditi, mentre invece in queste condizioni ha maggiore sviluppo il micelio sterile bianco.

La *Monilia sitophila* si comporta nelle colture come le specie *saprofite*, ed il suo micelio si estende sulla superficie dei *substrati* di cultura.

Sul pane, il micelio stesso si insinua sulle crepature interne, lungo la superficie delle cavità (che in esso si formano per effetto della lievitazione e della panificazione), e che a poco a poco interseca, invadendo tutta la pasta. I conidiofori si svolgono soltanto in contatto dell'aria, sopra aree talora assai vaste, così che la superficie di rottura del pane assume un bel colore rosso ranciato, e si ricopre di una polvere dello stesso colore, dovuta alla presenza di una massa enorme di conidii e di catenule conidiali che il vento facilmente dissemina.

Il colore rosso-ranciato caratteristico, a poco a poco diminuisce di intensità allorquando le culture si lasciano esposte alla luce diretta.

Tutti i molteplici tentativi intesi ad ottenere una *riproduzione* del fungo, indispensabile per determinare la sua vera posizione sistematica, non ebbero risultato.

Per quante prove io abbia fatto non riescii che ad ottenere la forma conidica, la quale si svolse sempre colle modalità ora ricordate.

Nello stato presente della Scienza (quantunque questa sistemazione sia da ritenersi come transitoria), la *Monilia sitophila* va compresa fra gli *Hyphomycetes*, ordine dei cosidetti *Fungi imperfecti*, nei quali necessariamente, *pro tempore*, i micologi riuniscono forme conidiali o secondarie, specialmente di *Ascomycetes* e di *Basidiomycetes*.

La *Monilia sitophila*, come le sue congeneri, aventi analogo tipo di moltiplicazione conidiale, dovrà certamente prender posto fra gli *Ascomycetes* e più propriamente fra i Generi delle *Pezizaceae*; ma questa sistemazione definitiva non potrà avvenire se non quando sarà nota la forma perfetta, che non ha voluto ancora rivelarsi.

Fondamenti della geometria proiettivo-differenziale di una superficie

Nota di GUIDO FUBINI

§ 1. — In due note di ugual titolo in corso di stampa nei " Rendiconti della R. Accademia dei Lincei „ mi sono occupato dei fondamenti analitici della geometria proiettivo-differenziale di una superficie, cioè dello studio delle proprietà differenziali di una superficie, invarianti per collineazioni.

Qui riassumerò brevemente le prime applicazioni geometriche di tali studî, che ci faranno vedere come al campo proiettivo si possano estendere i concetti di curvatura, e torsione geodetica, di linee di curvatura, di curvatura totale d'una superficie, del triedro mobile di Darboux, Ribaucour e Cesaro, ecc. ecc.

Si escludono le superficie *sviluppabili*, e assai spesso anche le rigate, per cui la teoria è ben più semplice.

Nelle Note cit. abbiamo provato l'esistenza di una forma

$$\varphi_2 = a_{11}\, du^2 + 2\, a_{12}\, du\, dv + a_{22}\, dv^2 \qquad (1)$$

$$\nabla = a_{11}\, a_{22} - a_{12}^2 \neq 0$$

nelle variabili curvilinee $u = u_1$, $v = u_2$, di significato *intrinseco* (cioè indipendente dalla particolare scelta delle linee coordinate) ed *invariante* per collineazioni. Essa, uguagliata a zero, definisce le assintotiche, ed è perciò proporzionale alla ben nota seconda forma di Gauss $D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2$; da cui si deduce, moltiplicando per un fattore N, di cui parleremo più avanti.

Si possono *normare* le coordinate omogenee x, y, z, t di un punto della superficie così che (*)

$$(2) \qquad \frac{1}{\sqrt{\nabla}}(x, x_1, x_2, d^2x) = \varphi_2 .$$

Dalle coordinate *cartesiane* $x, y, z, t = 1$ si passa a tali coordinate *normali*, moltiplicandole per un fattore ρ determinato dalla $\rho^2 = N\sqrt[4]{K}$ (essendo K la curvatura totale della superficie). Una collineazione tra due superficie è determinata da una trasform. lineare a coefficienti *costanti* a determinante *unità* sulle coordinate *normali* (senza bisogno di ricorrere a un fattore di proporzionalità, che *potrebbe essere funzione delle* u, v). In modo simile si definiscono coordinate *normali di piano*, che si deducono dalle *cartesiane* (coseni direttori X, Y, Z, e $-W$, ove W è la distanza dall'origine) moltiplicandole per ρ_1, ove $\rho_1^2 = N : \sqrt[4]{K}$. La forma φ_2 *si può definire anche mediante queste coord. normali di piano*: essa è perciò *invariante* anche per reciprocità.

§ 2. **Metrica proiettiva**. — Ora sorge spontanea l'idea di addottare φ_2 come *elemento lineare di una geometria metrica sulla nostra superficie*: geometria metrica, che sarà *invariante per collineazioni* (ed anche per *reciprocità* e per *deformazioni proiettive*). Non già che questa proprietà sia caratteristica per la geometria definita da φ_2: anche le altre forme quadratiche definite loc. cit. (p. es. la forma ottenuta moltiplicando φ_2 per la sua curvatura) possono servire allo stesso scopo; ma con quanta maggior complicazione!

Si potrebbe considerare anche un'altra geom. metrica, abbastanza semplice, ma ben *differente* dalle geometrie metriche classiche: quella definita assumendo ad elemento lineare ds la $\sqrt[3]{\varphi_3}$, dove φ_3 è la forma cubica definita loc. cit. E si otterrebbe anche qualche semplice risultato: il grave inconveniente

(*) Con (x, x_1, x_2, d^2x) indico il determinante, la cui prima riga è formata dagli elementi x, $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$, d^2x; e le altre righe si ottengono sostituendo ordinatamente y, z, t alla x. Con notazioni analoghe indico determinanti analoghi.

sarebbe però quello che le geodetiche di tale metrica, per cui è minimo lo $\int \sqrt[3]{\varphi_3}$, soddisferebbero a un'equazione differenziale, che avrebbe le assintotiche come linee singolari.

Indicati con $\delta^2 u$, $\delta^2 v$ i differenziali secondi *controvarianti* (loc. cit.) delle u, v, le linee geodetiche nella nostra metrica sono quelle per cui è nulla l'espressione *intrinseca*

$$\sqrt{-\nabla}\,(du\,\delta^2 v - dv\,\delta^2 u). \tag{3}$$

Noi senz'altro, indicando con $\bar{g}_3$ una forma cubica di significato *intrinseco*, scriveremo $\bar{g}_3 = \bar{\psi}_3 + l\varphi_2\bar{g}_1$, ove $\bar{\psi}_3$ è coniugata a φ_2 (cioè ha lo Hessiano proporzionale a φ_2), ed $l\bar{g}_1$ è quindi necessariamente una forma covariante di primo grado. (Con l indico un fattore numerico).

E studieremo tutte le curve, per cui

$$\sqrt{-\nabla}\,(du\,\delta^2 v - dv\,\delta^2 u) = \bar{\psi}_3 + l\varphi_2\bar{g}_1 \tag{4}$$

Essendo questa equazione intrinseca, possiamo (con qualche lieve semplificazione di calcoli) assumere come linee u, v le assintotiche. In tal caso (loc. cit.)

$$\varphi_2 = 2\beta\gamma\,du\,dv\,; \qquad \varphi_3 = 2\beta\gamma\,(\beta\,du^3 + \gamma\,dv^3)\,;$$
$$\bar{\varphi}_3 = 2\beta\gamma\,(\beta\,du^3 - \gamma\,dv^3)\ \text{(*)}$$

sono le forme che definiscono la superficie a meno di una deformazione proiettiva, cosicchè $N = \frac{\beta\gamma}{D'}$. Porremo

$$\bar{\psi}_3 = \lambda_1\,du^3 - \lambda_2\,dv^3 \qquad \bar{g}_1 = h_1\,du - h_2\,dv\,. \tag{5}$$

Per vedere il significato geometrico delle curve che soddisfano a (4) consideriamo il sistema ∞^1 di quelle tra esse che escono da un punto (x, y, z, t) della nostra superficie; e cerchiamo l'in-

(*) Si possono definire β, γ come i valori di $\left\{ {11 \atop 2} \right\}$ e $\left\{ {22 \atop 1} \right\}$ per l'elemento lineare di Gauss (si potrebbe ricorrere anche all'immagine sferica).

viluppo dei loro piani osculatori in A. Indicate con x_{rs} derivate *covarianti* (rispetto a φ_2), un tale piano osculatore contiene i punti (che indichiamo, assegnandone la sola prima coordinata)

$$x,\ dx,\ d^2x = x_1\,\delta^2 u + x_2\,\delta^2 v + x_{11}\,du^2 + 2\,\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\,du\,dv + x_{22}\,dv^2.$$

Indicando con lettere maiuscole le coordinate correnti, ricordando (loc. cit.) che le coordinate normali soddisfano alle

$$(6)\qquad x_{11} = \beta x_2 + n x \qquad x_{22} = \gamma x_1 + \nu x \ (*)$$

troviamo che l'equazione di tale piano osculatore è

$$0 = (X, x, x_1, x_2)\,[(du\,\delta^2 v - dv\,\delta^2 u) + \beta\,du^3 - \gamma\,dv^3] + \\ + 2\,[(X, x, x_1, x_{12})\,du + (X, x, x_2, x_{12})\,dv]\,du\,dv$$

ossia

$$(7)\qquad 0 = T(\overline{\psi}_3 + l\overline{g}_1\,\varphi_2 + \overline{\varphi}_3) + \varphi_2\,(N_1\,du + N_2\,dv)$$

ove

$$T = (X, x, x_1, x_2); \qquad N_1 = (X, x, x_1, x_{12}); \qquad N_2 = (X, x, x_2, x_{12}).$$

Notisi che $T = 0$ è il piano tangente in A alla superficie; i piani $N = 0$ passano ciascuno per una tangente assintotica.

Caso 1°. — È $\overline{\psi}_3 = -\overline{\varphi}_3$. In tale caso i piani (7) formano *un fascio* (come avviene dei piani osculatori alle geodetiche ordinarie). L'asse di tale fascio è dato dall'intersezione dei piani

$$(8)\qquad l h_1 T + N_1 = 0 \qquad -l h_2 T + N_2 = 0$$

ossia

$$(X, x, x_1, x_{12} + l h_1 x_2 + l h_2 x_1) = 0$$
$$(X, x, x_2, x_{12} + l h_2 x_1 + l h_1 x_2) = 0.$$

Perciò tale retta è il luogo dei punti:

$$(8)^{bis}\qquad \lambda x + \mu\,(x_{12} + l h_1 x_2 + l h_2 x_1) \qquad (\lambda,\ \mu \text{ parametri variabili}).$$

Questa retta, al variare di l, *descrive un fascio di rette, il cui piano incontra il piano tangente alla superficie nella retta tangente alla curva* $\overline{g}_1 = 0$.

(*) È superfluo per noi scrivere i valori effettivi di n, ν.

Consideriamo la congruenza formata da queste rette (una per ogni punto A della superficie, quando si dia ad l un valore costante). Le sue sviluppabili sono definite dall'equazione:

$$(x; dx; x_{12} + l h_1 x_2 + l h_2 x_1; d[x_{12} + l h_1 x_2 + l h_2 x_1]) = 0.$$

Tenendo conto di (6), questa equazione diventa:

$$\left(n + \beta \frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial v}\right) du^2 - \left(\nu + \gamma \frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u}\right) dv^2 \tag{9}$$

$$+ l \left\{ \begin{pmatrix} h_2\beta - h_1 \dfrac{\partial \log \beta\gamma}{\partial u} - l h_1^2 \\ + \dfrac{\partial h_1}{\partial u} \end{pmatrix} du^2 - \begin{pmatrix} h_1\gamma - h_2 \dfrac{\partial \log \beta\gamma}{\partial v} - l h_2^2 \\ + \dfrac{\partial h_2}{\partial v} \end{pmatrix} dv^2 \right\}$$

$$+ l \left(\frac{\partial h_1}{\partial v} - \frac{\partial h_2}{\partial u}\right) du\, dv = 0.$$

Il primo termine non è che la terza forma necessaria per determinare una superficie a meno di una collineazione (loc. cit.), *che qui viene ritrovata per nuova via* (indipendente dal valore di $\bar{g}_1$ e di ψ_3). Il terzo termine ci dice: *Le sviluppabili di tale congruenza tagliano la superficie in un sistema coniugato allora e allora soltanto che* $l g_1 = l(h_1 du + h_2 dv)$ *è un differenziale esatto* (*condizione sempre soddisfatta se* $l = 0$, *ossia se* $\bar{g}_3$ *è coniugata di* φ_2).

Tra le forme g_1, $\bar{g}_1$ covarianti del primo ordine più semplici vi è (loc. cit.) quella ottenuta ponendo $h_1 = \frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u}$, $h_2 = \frac{\partial \log \gamma\beta^2}{\partial v}$. Posto $x = \sqrt{\beta\gamma}\, \bar{x}$, e analoghe, la nostra retta diventa il luogo dei punti $\left(\text{supposto } l = -\frac{1}{2}\right)$

$$\lambda \bar{x} + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial u \partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial \log \beta}{\partial u} \bar{x}_v - \frac{1}{2} \frac{\partial \log \gamma}{\partial v} \bar{x}_u\right)$$

che è la *retta di Wilczinsky* (una delle direttrici della congruenza intersezione dei complessi lineari osculatori alle assintotiche) (*).

(*) Cfr. " Trans. of the Amer. Math. Soc. „ tomo 9, pag. 95. Il Wilczynski indica con y il nostro $\bar{x}$, con $-2b$ e $-2a'$ i nostri β, γ.

Queste coordinate di Wilczynski non sono però, come le nostre, di significato intrinseco.

CASO 2°. — Se $\bar{\psi}_3 + \bar{\varphi}_3 \neq 0$, i piani osculatori (7) generano *un cono razionale di terza classe e di quarto grado, la cui equazione si ottiene uguagliando a zero il discriminante del secondo membro di* (7), *pensato come forma cubica nelle* du, dv. Indicando con $\xi N_1 + \eta N_2 + \zeta T = 0$ l'equazione di un piano qualunque della stella di vertice A, le coordinate ξ, η, ζ di un piano tangente al nostro cono sono date da:

$$\zeta = a\,du^3 - b\,dv^3 + 2\beta\gamma\,du\,dv\,(h_1 du - h_2 dv)\,l;$$
$$\xi = 2\beta\gamma\,du^2 dv; \qquad \eta = 2\beta\gamma\,du\,dv^2$$
$$(\text{si è posto } \bar{\psi}_3 + \bar{\varphi}_3 = a\,du^3 - b\,dv^3).$$

L'equazione del nostro cono in coordinate di piano è pertanto:

$$(\zeta - l h_1 \xi + l h_2 \eta)\,\xi\eta = 2\beta\gamma\,(a\xi^3 - b\eta^3). \tag{10}$$

Questo cono ha dunque tre *cuspidi*; *i piani tangenti cuspidali si intersecano sulla retta* $\zeta - l h_1 \xi + l h_2 \eta = 0$, che in coordinate di punto ha per equazioni

$$N_1 + l h_1 T = 0 \qquad N_2 - l h_2 T = 0,$$

che non dipende da $\bar{\psi}_3$, *e che coincide proprio con la retta* (8) *precedentemente studiata! I piani cuspidali del cono incontrano poi il piano tangente alla superficie sulle rette* $a\xi^3 - b\eta^3 = 0$, *che sono le tangenti alle curve definite dalla* $\bar{\psi}_3 + \bar{\varphi}_3 = 0$. *Tali coni poi hanno il piano tangente* $T = 0$ *della superficie come piano bitangente, e lo toccano nelle tangenti assintotiche.*

Posto $\bar{\psi}_3 = 0$, $\bar{g}_1 = 0$, abbiamo che:

I piani osculatori delle geodetiche nella metrica (1) *uscenti da un punto* A *della nostra superficie inviluppano un cono razionale di terza classe e quart'ordine, che è bitangente al piano tangente della superficie lungo le direzioni assintotiche; i tre piani cuspidali tagliano il piano tangente nelle tangenti alle linee definite da* $\bar{\varphi}_3 = 0$ *(secondo sistema di linee di Segre) e si intersecano lungo la retta* $N_1 = N_2 = 0$. *Le sviluppabili della congruenza generata da queste rette tagliano la superficie secondo un sistema*

coniugato ed hanno per equazione quella che si ottiene uguagliando a zero la terza forma fondamentale della superficie

$$\left(n+\beta\frac{\partial\log\beta^2\gamma}{\partial v}\right)du^2+\left(\nu+\gamma\frac{\partial\log\beta\gamma^2}{\partial u}\right)dv^2.$$

Pare dunque che a tale retta si possa dare il nome di retta N (generalizzazione della *normale*) (come vedremo altrove, essa ha molte proprietà della normale ordinaria); a tale sistema coniugato il nome di sistema C (generalizzazione delle linee di *curvatura*).

Se indichiamo con $x+\sigma_r\frac{x_{12}}{\beta\gamma}$ $(r=1,2)$ la prima delle coordinate omogenee dei due fuochi (punti ove la retta N tocca il suo inviluppo), le σ_1, σ_2 hanno significato intrinseco, e sono l'analogo intrinseco dei *raggi di curvatura*. Se chiamiamo *curvatura proiettiva media* la $\frac{1}{\sigma_1}+\frac{1}{\sigma_2}+2$, troviamo facilmente che essa vale $-\frac{2}{\beta\gamma}\frac{\partial^2\log\beta\gamma}{\partial u\,\partial v}$, cioè vale meno *il doppio della curvatura totale della forma* φ_2. Questo teorema ricorda il noto teorema sulla curvatura totale metrica di una superficie come curvatura dell'elemento lineare di Gauss.

La retta N, *la retta di Wilczinsky, insieme alle tangenti assintotiche* (tutte rette *intrinseche*, e di significato invariante per collineazioni) *formano un tetraedro, che è l'analogo nel classico triedro mobile della ordinaria geom. differenziale.*

§ 3. **Curvatura assintotica.** — Il più semplice invariante (per collineazioni) di una curva della superficie, che abbia significato intrinseco e che sia di secondo ordine, è evidentemente

$$\sqrt{-\nabla}\,\frac{du\,\delta^2v-dv\,\delta^2u}{\varphi_2^{\frac{3}{2}}},$$

che noi chiameremo la curvatura assintotica $\frac{1}{\rho_a}$.

Varrà dunque la:

$$\sqrt{-\nabla}\,(du\,\delta^2v-dv\,\delta^2u)=\frac{d\sigma^3}{\rho_a}\qquad(\text{se } d\sigma=\sqrt{\varphi_2}).$$

Esso è l'analogo dell'ordinaria curvatura geodetica; il nome di *assintotica* mi pare ricordi bene che esso è la curvatura geo-

detica della curva su una superficie per cui $d\sigma^2 = \varphi_2$ è l'elemento lineare; (notisi che $\varphi_2 = 0$ definisce le *assintotiche*).

Che relazione passa tra la curvatura assintotica $\frac{1}{\rho_a}$ e la curvatura geodetica $\frac{1}{\rho_g}$? (*)

È facile riconoscere (assumendo le assintotiche a linee coordinate) che:

$$\left(N\sqrt{K}\frac{ds^3}{\rho_g} - \frac{d\sigma^3}{\rho_a}\right) = \beta\gamma\left[\beta\, du^3 - \gamma\, dv^3 - \left(2\frac{\partial \log \rho}{\partial v} dv - 2\frac{\partial \log \rho}{\partial u} du\right) du\, dv\right]$$
$$= \bar{\varphi}_3 - \left(\frac{\partial \log \rho}{\partial v} dv - \frac{\partial \log \rho}{\partial u} du\right)\varphi_2 .$$

Ricordando che φ_2, φ_3 sono invarianti per collineazioni, e che due superficie aventi comuni le forme φ_2 e φ_3 o sono collineari, o sono proiettivamente applicabili, abbiamo che: *Su due superficie collineari la* $\mathrm{N}\sqrt{\mathrm{K}}\frac{ds^3}{\rho_g}$ *ha valori, che differiscono soltanto per una forma divisibile per* φ_2; *cioè la espressione* $\mathrm{N}\sqrt{\mathrm{K}}\frac{ds^3}{\rho_g}$ *ha valori uguali per curve omologhe tangenti alle assintotiche.* Questa condizione (necessaria per la collinearità) è sufficiente per l'applicabilità proiettiva. Perciò: *Due superficie, aventi la stessa forma* φ_2, *sono proiettivamente applicabili se* $\mathrm{N}\sqrt{\mathrm{K}}\frac{ds^3}{\rho_g}$ *ha valori uguali per curve omologhe tangenti alle assintotiche, cioè se i valori di* $\mathrm{N}\sqrt{\mathrm{K}}\frac{ds^3}{\rho_g}$, *calcolati per due curve omologhe qualsiasi,*

(*) Ricordo che, se $\sqrt{H}$ è il discriminante ed $\left\{ {rs \atop t} \right\}$ sono i simboli di Christoffel di seconda specie per l'elemento lineare di Gauss, allora $\left(\text{ricordando il valore di } N = \frac{\beta\gamma}{D'} = \frac{1}{D'}\left\{ {11 \atop 2} \right\}\left\{ {22 \atop 1} \right\}\right)$ è in coordinate assintotiche

$$N\sqrt{K}\frac{ds^3}{\rho_g} = \beta\gamma\left[du\, d^2v - dv\, d^2u + \beta\, du^3 - \gamma\, dv^3 + \right.$$
$$\left. + \left\{\left(\left\{ {22 \atop 2} \right\} - 2\left\{ {12 \atop 1} \right\}\right) dv - \left(\left\{ {11 \atop 1} \right\} - 2\left\{ {12 \atop 2} \right\}\right) du\right\} du\, dv\right].$$

Ricordo che $\rho^2 = N : \sqrt[4]{K}$, cosicchè $-2\rho_u : \rho = \left\{ {11 \atop 1} \right\} - 2\left\{ {12 \atop 2} \right\} - \frac{\partial \log \beta\gamma}{\partial u}$ e che $-2\rho_v : \rho = \left\{ {22 \atop 2} \right\} - 2\left\{ {12 \atop 1} \right\} - \frac{\partial \log \beta\gamma}{\partial v}$.

hanno per differenza una forma divisibile per la seconda forma di Gauss.

Indicati con $\left\{ {ih \atop k} \right\}$ i simboli di Christoffel di 2^a specie per l'elemento lineare di Gauss, si ponga in coordinate curvilinee u, v generiche

$$(11) \quad \begin{cases} \dfrac{\left\{ {11 \atop 2} \right\}}{D} = k, \quad \dfrac{\left\{ {22 \atop 1} \right\}}{D''} = h; \quad \left\{ {11 \atop 1} \right\} - hD = 2\pi'; \quad \left\{ {12 \atop 2} \right\} - kD' = \pi; \\ \left\{ {22 \atop 2} \right\} - kD'' = 2\kappa'; \quad \left\{ {12 \atop 1} \right\} - hD' = \kappa. \end{cases}$$

Il precedente risultato si enuncia: *Condizione necessaria e sufficiente per l'applicabilità proiettiva di due superficie, che hanno proporzionali le seconde forme di Gauss* (cioè che hanno le assintotiche come curve omologhe) *è che le* $\pi - \pi'$ *e* $\kappa - \kappa'$ *abbiano valori uguali in punti omologhi delle due superficie.* In altre parole: *Se per una superficie è data la forma* $F_2 = \frac{\varphi_2}{N} = D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2$ *di Gauss, e sono date le* $\pi - \pi'$ *e* $\kappa - \kappa'$, *ne resta determinata anche la forma* $F_3 = \frac{1}{N}\varphi_3$ (*).

(*) Ciò si può provare direttamente: In virtù di (11) le equazioni di Codazzi dànno:

$$\frac{\partial D}{\partial v} - \frac{\partial D'}{\partial u} - 2(\pi - \pi')D' = D(\kappa - kD'' - hD') - D'(\pi - hD - kD'),$$

$$\frac{\partial D''}{\partial u} - \frac{\partial D'}{\partial v} - 2(\kappa - \kappa')D' = -D'(\kappa - kD'' - hD') + D''(\pi - hD - kD').$$

Quindi, se la superficie non è *sviluppabile*, e perciò $DD'' - D'^2 \neq 0$, se ne possono dedurre $\kappa - kD'' - hD'$ e $\pi - hD - kD'$ espressi mediante le D, e le $\pi - \pi'$, $\kappa - \kappa'$. Ora F_3 non è che $-\delta F_2 + \frac{3}{4} F_2 \log K$ (loc. cit.), ove δF_2 è la derivata covariante di F_2 rispetto all'elemente lineare di Gauss.

Posto $F_3 = \Sigma\, C_{rst}\, du_r\, du_s\, du_t$, è facile, in virtù dell'osservazione precedente, calcolare tutti i coefficienti C_{rst}. Così p. es. si trova

$$C_{111} = \frac{\partial D}{\partial u} + D\left[(\pi - \pi') - \frac{3}{4}\,\frac{\partial \log(DD'' - D'^2)}{\partial u}\right] + \frac{1}{2}\, D(\pi - hD - kD')$$

e analoghe per le altre C_{rst}.

Ne risulta appunto che tutti questi coefficienti sono determinati dalle D e da $\pi - \pi'$, $\kappa - \kappa'$.

§ 4. **Torsione proiettiva e assintotica.** — Per una linea posta sulla superficie la più semplice espressione *intrinseca* del terzo ordine (che cioè dipenda dai differenziali terzi), e che sia invariante per collineazioni, è (cfr. loc. cit.)

$$\frac{S_p}{\varphi_2^3} = \frac{1}{\varphi_2^3} N^2 \sqrt{K} \frac{1}{T} \frac{ds^6}{R^3} = \frac{\sqrt{K}}{N} \frac{1}{T} \frac{R_n^3}{R^3}$$

(K = curvatura totale; $\frac{1}{T}$, $\frac{1}{R}$, $\frac{1}{R_n}$ = torsione, curvatura, curvatura normale).

Essa non è che l'ordinaria *torsione*, moltiplicata per un fattore tale da renderla invariante per *collineazioni*. Io la chiamerei pertanto la *torsione proiettiva* $\frac{1}{T_p}$.

Ricordiamo che dalle formole di loc. cit. segue

$$\frac{1}{T_p} = \frac{1}{\varphi_2^3} \Big\{ -d\left[\sqrt{-\nabla}\,(du\,\delta^2 v - dv\,\delta^2 u)\right]\varphi_2 + \\ + \sqrt{-\nabla}\,(du\,\delta^2 v - dv\,\delta^2 u)\left(\frac{3}{2}\,d\varphi_2 + \varphi_3\right) + P_6 \Big\},$$

dove con P_6 indico un'espressione di primo ordine e sesto grado, la cui importanza è stata riconosciuta al loc. cit. [Ivi essa era indicata con $(x, dx, D_2 x, D_3 x)$]. Quale ne è il significato geometrico? Evidentemente $\frac{P_6}{\varphi_2^3}$ non è che la torsione *proiettiva* della geodetica (nella nostra metrica (1)) tangente alla linea data. Essa non è pertanto che la generalizzazione della *torsione geodetica* e quindi a buon diritto si può chiamare la *torsione assintotica* $\frac{1}{T_a}$ della curva; che sarà invariante per collineazioni, e, come la torsione geodetica, dipenderà dai soli differenziali primi. Essendo P_6 di sesto grado, essa ha per *indicatrice* una curva di sesto ordine.

La formola precedente diventa semplicemente:

$$\frac{1}{T_p} = -\frac{d\left(\frac{1}{\rho_a}\right)}{\sqrt{\varphi_2}} + \frac{1}{\rho_a}\frac{\varphi_3}{\sqrt{\varphi_2^3}} + \frac{1}{T_a}$$

che dà un'espressione semplice di $\frac{1}{T_p}$ espressa mediante le forme fondamentali della superficie.

§ 5. **Considerazioni duali.** — È facilissimo, e interessante, svolgere tutte le considerazioni duali di quelle qui svolte, e confrontarle con queste.

Come una forma $\bar{g}_1 = h_1 du - h_2 dv$ covariante del primo ordine individua una retta r (data dalle $(8)^{bis}$) uscente da ogni punto A della superficie, così essa individua pure una retta r' posta nel piano tangente ad A, come si riconosce con ragionamenti duali. Tale retta r' è definita in *coordinate normali di piano* da formole affatto simili alle $(8)^{bis}$, scritte in coordinate *di punto* (pure normali). Questa corrispondenza duale tra le rette uscenti da A e le rette poste nel piano tangente in A ammette due definizioni, una duale dell'altra, e di cui basterà pertanto scrivere una. Consideriamo tutte le curve Γ tracciate sulla superficie, che escono da A, e i cui piani osculatori passano per r. Consideriamo ora l'elemento reciproco di tali piani osculatori; cioè consideriamo i piani tangenti alla superficie in ogni punto di tale curva, e lo spigolo di regresso della sviluppabile così generata. Il punto A' di tale spigolo di regresso, che corrisponde al punto A, genera, al variare della curva Γ, una cubica razionale posta nel piano tangente in A. La retta r' è la retta, che congiunge i tre flessi di questa cubica. (Nelle pag. precedenti si considerava la retta duale, in cui si incontravano i piani cuspidali di un certo cono di terza classe). Alle sviluppabili di una congruenza di rette r corrisponderanno le sviluppabili della congruenza di rette r': alle quali corrisponderà sulla superficie un sistema coniugato, se g_1 è un differenziale esatto. Ciò, che avviene p. es. se la retta r è la normale alla superficie. La retta duale (assunto il punto A come origine e la normale r come asse delle z) ha come equazione nel piano tangente (adottati i simboli delle classiche *Lezioni di Geom. differenziale* del prof. L. Bianchi e indicate con ξ, η le coordinate correnti):

$$\left[\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}' X_v + \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}' X_u\right]\xi + \left[\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}' Y_v + \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}' Y_u\right]\eta + D' = 0$$

(se le u, v sono assintotiche), ossia

$$\xi \nabla (\log K, x) + \eta \nabla (\log K, y) = 4$$

in coordinate u, v qualsiasi (se ∇ è il noto parametro relativo all'elemento lineare). Questa retta ha notevoli proprietà metriche, che varrà la pena di approfondire: p. es. *essa è all'* ∞ *per tutte e sole le superficie a curvatura costante*; p. es. *la sua posizione sul piano tangente non varia deformando* (in senso metrico) *la superficie.*

La prima di queste proposizioni dà, si può dire, una definizione proiettiva delle superficie a curvatura costante; può essere forse interessante lo studiare in generale la congruenza di queste rette, duali delle normali.

Calcolo delle parentesi

Nota di Dott. PAOLINA QUARRA

In virtù della proprietà associativa, la somma di tre numeri, in dato ordine, si può eseguire in due modi differenti.

$$(a+b)+c=a+(b+c).$$

La somma di 4 numeri si può eseguire in 5 modi e così via.

Invece del segno $+$, si può leggere $-$ o $\times$, ecc. e si avranno, a seconda della posizione delle parentesi, varie formule, che potranno avere lo stesso valore se l'operazione è associativa, o valori in tutto o in parte differenti.

In generale, abbiansi degli enti $a, b, c \ldots$ e supponiamo che l'apposizione di due enti ab indichi un nuovo ente del sistema: per esempio la loro somma. Io mi propongo di calcolare il numero degli aggruppamenti che nell'apposizione di più lettere risultano dalle varie posizioni delle parentesi.

Con uno o due enti, a e ab, le parentesi non si possono usare. Con tre enti si hanno le due decomposizioni: $(ab)\,c$ e $a\,(bc)$.

Con 4 enti si hanno i 5 aggruppamenti:

$$[(ab)\,c]\,d\,, \quad [a\,(bc)]\,d\,, \quad (ab)\,(cd)\,, \quad a\,[(bc)\,d]\,, \quad a\,[(b\,(cd)]$$

e così via.

Sia p_n il numero degli aggruppamenti differenti che colla successione di n lettere possono risultare dalle parentesi. Sarà:

$$p_1=1 \qquad p_2=1 \qquad p_3=2p_1p_2=2$$
$$p_4=2p_3p_1+p_2^2=5 \qquad p_5=2\,(p_4p_1+p_2p_3)=14$$
$$p_6=2\,(p_5p_1+p_4p_2)+p_3^2=42\,\ldots\ldots$$

Un aggruppamento di n lettere si può scindere o nell'aggruppamento delle prime $n-1$ lettere seguìto dall'ultima lettera, o nell'aggruppamento delle prime $n-2$ lettere seguìto dall'aggruppamento delle ultime due, o da un aggruppamento delle prime $n-3$ lettere seguìto da un aggruppamento delle tre ultime, e così via. Si ha così la formula ricorrente:

$$(1) \qquad p_n = p_{n-1}p_1 + p_{n-2}p_2 + p_{n-3}p_3 + \dots + p_1 p_{n-1}$$

dalla quale si possono ricavare i valori già ricavati precedentemente:

$$\begin{aligned} p_4 &= 2\times 1 + 1\times 1 + 1\times 2 = 5 \\ p_5 &= 5\times 1 + 2\times 1 + 1\times 2 + 1\times 5 = 14 \\ p_6 &= 14\times 1 + 5\times 1 + 2\times 2 + 1\times 5 + 1\times 14 = 42 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Volendo la formula che dà esplicitamente p_n considero la serie:

$$fx = p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3 + \dots$$

Elevo a quadrato:

$$\begin{aligned}(fx)^2 = p_1^2 x^2 + (p_1 p_2 + p_2 p_1)\, x^3 + (p_1 p_3 + p_2 p_2 + p_3 p_1)\, x^4 + \dots \\ + (p_{n-1}p_1 + p_{n-2}p_2 + \dots + p_1 p_{n-1})\, x^n + \dots,\end{aligned}$$

ossia, in virtù della formula ricorrente,

$$(fx)^2 = p_2 x^2 + p_3 x^3 + p_4 x^4 + \dots + p_n x^n + \dots$$

ovvero:

$$(fx)^2 = fx - x,$$

essendo $p_1 = 1$.

Dall'equazione $(fx)^2 - fx + x = 0$ di secondo grado in fx ricavo:

$$fx = 1/2 \pm \sqrt{(1/4 - x)}.$$

Siccome $f0 = 0$, debbo scegliere il segno $-$, poichè col segno $+$ si avrebbe $f0 = 1$.

Dunque

$$fx = [1 - \sqrt{(1-4x)}]/2.$$

Sviluppo il radicale con la formula del binomio di Newton:

$$fx = \frac{1}{2}\left(1 - 1 + \frac{1}{2}\,4x + \frac{1}{2.4}\,4^2x^2 + \frac{1.3}{2.4.6}\,4^3x^3 + \dots\right)$$

$$fx = x + x^2 + 2x^3 + \dots \frac{1}{2}\,\frac{1\times3\times\dots\times(2n-3)}{2\times4\times6\times\dots\times2n}\times 4^n x^n + \dots,$$

onde:

$$(2) \qquad p_n = \frac{1}{2}\,\frac{1\times3\times\dots\times(2n-3)}{2\times4\times6\times\dots\times2n}\times 4^n,$$

che si può anche scrivere:

$$(3) \qquad p_n = \frac{1\times3\times\dots\times(2n-3)}{2\times4\times\dots\times2n}\times 2^{2n-1} = \frac{(2n-2)!}{n!\,(n-1)!}$$

$$p_n = \frac{(n+1)(n+2)\dots(2n-2)}{1\times2\times\dots\times(n-1)}.$$

Per $n = 10$, effettuato il calcolo, si trova: $p_{10} = 4862$, cioè: " La somma di 10 quantità in ordine dato si può eseguire in 4862 modi differenti ".

Per n più grande, per es. per $n = 100$, il calcolo sia con la formula ricorrente (1), sia con la esplicita (2) o (3) è quasi impraticabile.

Allora possiamo ricorrere alla formula di Wallis (G. PEANO, *Formulario Mathematico,* t. V, pag. 259).

$$2^{2n}/\sqrt{(n\pi)} > (2n)!/(n!)^2 > 2^{2n}/\sqrt{\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right]}.$$

Siccome

$$p_n = (2n)!/[(n!)^2\times 2\,(2n-1)],$$

si ricava:

$$\frac{2^{2n-1}}{(2n-1)\sqrt{(n\pi)}} > p_n > \frac{2^{2n-1}}{(2n-1)\sqrt{[(n+1/2)\pi]}}$$

$$(4) \qquad \frac{2^{2n-1}}{(2n-1)\sqrt{(n\pi)}} > p_n > \frac{2^{2n-1}}{(2n-1)\sqrt{(n\pi)}}\times\frac{1}{\sqrt{(1+1/2n)}}.$$

Fatto $n = 100$ si ha:

$$\frac{2^{199}}{199\sqrt{(100\pi)}} > p_{100} > \frac{2^{199}}{199\sqrt{(100\pi)}} \times \frac{1}{\sqrt{(1{,}005)}}.$$

Faccio il calcolo con i logaritmi ed ottengo:

$$56{,}35755 > \operatorname{Log} p_{100} > 56{,}35646,$$

onde p_{100} è un numero intero avente 57 cifre. Le prime sono 227 ...

Tanti sono i modi di calcolare la somma di 100 termini, tenendo fisso il loro ordine.

Se poi si permuta l'ordine degli n termini, il numero precedente dovrà ancora essere moltiplicato per $n!$

Il Glacialismo antico e moderno del Cervino

Nota II del Socio nazionale residente Prof. FEDERICO SACCO

(Con una Tavola)

Nel gruppo del Cervino i ghiacciai rimasero per lungo tempo, durante gran parte del Medio Evo, sin verso il secolo XVI, assai arretrati ed impiccioliti rispetto a quello che si verificò in seguito. Infatti abbiamo pure per la Valtournanche leggende di antiche, facili comunicazioni col Vallese, anche per commerci di bestiame.

Così il G. Corona in *Aria di monti. In Valtournanche* (1882, Milano) ricorda la tradizione che nella regione del Cervino già ci fosse una fiorente città; analogamente M. Ulrich, *Die Seitenthäler des Wallis und der M. Rosa* (Zürich, 1850) accenna ad un villaggio di Tiefen Matten, circondato di pascoli, là dove poi discese lo Zmuttgletscher, oltre a ricordare l'antica facilità di comunicazioni, impedite poi dai ghiacciai, tra Zmutt e Zinal. L'A. Heim nel suo *Handbuch d. Gletscherkunde* (Stuttgart, 1885) accenna al ghiacciaio di Zmutt, fra altri che portarono alla loro fronte vecchi tronchi di alberi dimostranti da 200 a 300 anni. Tali tradizioni sono pure riportate da U. Monterin indicando *La leggenda della città di Felik* (" Boll. sez. fior. C. A. I. ", VI, 1915). Veggasi pure in proposito l'interessante nota del Coolidge, *Il colle di S. Théodule nella storia*, " C. A. I. ", 1911.

Dal complesso possiamo ritenere come per un lunghissimo periodo, almeno dal sec. XII al XVI, i ghiacciai del gruppo del Cervino, come delle nostre Alpi in generale, fossero assai meno sviluppati che non in seguito.

Ma più tardi, in complesso negli ultimi tre secoli specialmente, questi vari ghiacciai staccati del Gruppo del Cervino ebbero un nuovo incremento, piccolo rispetto a quello precedente,

dauniano, ma tale da originare depositi morenici anche assai estesi, potenti e lontani dai limiti glaciali attuali; li accenniamo in breve partitamente, cioè:

I. Il **Ghiacciaio italiano della Forca**, che in gran parte scende subtriangolarmente dalla gran costiera calceschistosa ofitifera della Forca (Furggrat), appuntandosi in basso costituì per lungo tempo una stretta ed allungata lingua che giungeva sino alla quota 2453, quasi appoggiandosi a destra ad un affioramento di roccie verdi; depositando così due lunghissime, tipiche morene tuttora di aspetto fresco, appena inerbite alla base, tra loro subparallele, scendenti un po' ondulatamente verso il basso, costituendo nell'assieme un apparato assai curioso ed interessante.

Notisi però che ad Ovest del lungo cordone morenico destro in questione, in basso, ed appoggiantesi verso valle all'indicato affioramento roccioso terminante a quota 2453, esiste ancora un residuo di vecchia morena, ben inerbita, a ciglio subbifido, che potrebbe esser stata depositata fors'anche due secoli fa, ricordando un po' per posizione e *facies* la formazione dell'Anfiteatrino dei trinceramenti di Combal rispetto alla grande morena destra del Miage.

Verso la metà del secolo XIX la sovraccennata lingua (direi quasi proboscide) glaciale andò accorciandosi, pur rimanendo ancora abbastanza notevole come indica l'antica carta dell'Adams-Reilly; ma in seguito, sempre più ritirandosi, essa si ridusse all'attuale forma quasi di triangolo, il cui apice inferiore dista circa un km. dalla punta della precedente lunga lingua sopra accennata.

In quest'ultimo periodo di oltre mezzo secolo, mentre si deponeva abbastanza libera e potente ed anche multipla la morena destra, quasi in continuazione dell'affioramento gneissico di quota 3044, invece la morena sinistra, per la posizione del relativo margine del ghiacciaio (quasi pensile e talora affacciantesi sulla gradinata calceschistosa prasinitifera che lo sostiene) non potè in generale depositarsi regolarmente, salvo un po' verso il basso, venendo il suo materiale detritico precipitato in gran parte in giù da detto ciglione roccioso e confondendosi quindi sia col morenico antico sia col locale detrito di falda.

II. **Ghiacciaio italiano del Cervino** costituente, alle falde immediate della gigantesca piramide elevantesi abruptamente di

oltre 2000 m., quasi una fascia glaciale, la quale deve poggiare sopra una gradinata gneissica che, quasi prolungamento dei banchi analoghi (inclinati a N. N. O.) affioranti presso il colle del Breuil, riaffiora appunto colla testata stratigrafica alla quota 3044 e 3011-2830.

Ma in realtà questo ghiacciaio si collega strettamente con quello della Forca, e gli si collegava tanto più quando, per la maggior potenza della massa glaciale, non compariva l'affioramento gneissico di quota 3044, come (senza parlare delle antiche carte troppo poco minute per simili indicazioni) indicherebbe il foglio Matterhorn della Carta svizzera riveduta da Imfeld nel 1877, che segna quivi morena (come del resto fu ricopiato ancora nella ediz. 1909); qualcosa di analogo sembra indicare la tavoletta Valtournanche dell'I. G. I. levata nel 1884, epoca però in cui probabilmente doveva già apparire più o meno detto spuntone roccioso.

Ad ogni modo lo stretto ed esteso ghiacciaio del Cervino per la sua posizione e costituzione non variò molto, cosicchè mentre il ghiacciaio della Forca si allungava straordinariamente in basso, come sovraccennato, il margine meridionale destro di quello del Cervino solo si estendeva a ricoprire la gradinata gneissica su cui ora esso si affaccia, deponendo così un cordone morenico subondulato a poca distanza dal piede di detta gradinata, oltre ad abbondante materiale morenico sparso a valle di tale cordone semifrontale.

III. **Ghiacciaio del Colle del Leone** (come credetti denominarlo pel Colle a cui soggiace), che, quantunque relativamente piccolo ed altolocato, è interessante sia per il suo braccio destro pensile sopra una gradinata rocciosa (eufotidica), sia per la sua cascata mediana crepacciata, sia per il suo espandimento terminale arrotondato, sia per il suo materiale morenico frontale assai abbondante in relazione coll'intenso sfacelo della estesissima parete occidentale dell'immensa piramide del Cervino.

Le antiche carte, sia il foglio XXII (Valpelline) al 50.000 degli Stati Sardi, sia la carta al 100.000 di Adams-Reilly, indicano che verso la metà del sec. XIX il ghiacciaio in esame, più esteso che non oggi, si collegava lateralmente coi contigui ghiacciai del Cervino, forse talora venendo mascherata la morena intermedia fra di essi.

Del resto anche i depositi morenici frontali o antero-laterali segnano chiaramente tali notevoli espansioni glaciali più o meno antiche, tanto con diversi cordoni concentrici appoggiati alla gibbosità rocciosa (calceschisti prasinitiferi inclinati, come di solito, dolcemente a N. N. O.) dell'Oriondé, quanto coi cordoni laterali di sinistra i quali indicano che quivi il ghiacciaio del Leone, sia perchè deviato da detto ostacolo dell'Oriondé, sia perchè più libero verso S. E., sia pel pendio assai ripido, discese in basso molto notevolmente.

Ma dopo la metà del secolo XIX il ghiacciaio del Col del Leone regredendo, con periodi di posa indicati da detti cordoni morenici, finì anch'esso per ritirarsi (come il contiguo del Cervino) sopra la gradinata rocciosa (rappresentata da Schisti verdastri dolcemente inclinati a N. N. O.) oscillandovi più o meno pensilmente in modo che detta roccia appare più o meno estesamente, secondo le annate, sotto il mobile ammanto glacio-morenico.

IV. **Ghiacciaio del Leone**, il quale si annida nella profonda incassatura semicircolare che, salendo sino al Colle Tournanche, ingracilisce la dorsale del Cervino - Dent d'Hérens.

Notisi incidentalmente che sul lato S. O. della Testa del Leone esiste sempre un ammanto niveo-glaciale abbastanza esteso che si collega con altro analogo del lato settentrionale attraverso la dorsale del Col Tournanche.

Il ghiacciaio del Leone è piuttosto piccolo, subtriangolare, ma esso si estendeva un secolo fa assai più in basso deponendo materiale morenico sia presso i laghetti (originati in parte dagli Schisti prasinitici inclinati dolcemente a N. O.) che segnai sulla cartina; ma ancora verso la metà del sec. XIX detto ghiacciaio discendeva circa 300 m. più a valle che non oggi, giungendo sino a circa 2700 m. s. l. m. come segnano in complesso le antiche carte degli Stati Sardi (foglio XXII, Valpelline) e di Adams-Reilly e più precisamente i due archi morenici concentrici, abbastanza ben conservati, che si osservano tuttora.

Come di solito dopo il 1865 il ghiacciaio in questione andò rapidamente ingracilendosi, per modo che la sua fronte si ritirò (analogamente a quella dei ghiacciai di Col Leone e del Cervino) sopra un gradino roccioso (quotato 2788, alla base di gneiss occhiadini contorti con intercalazioni di schisti verdastri, anfi-

bolici ed epidotici, pure contorti), che presentasi quindi mirabilmente levigato, e sul quale continuò poi a mantenersi pensile, più o meno oscillando secondo le annate ed i periodi dell'anno (1).

Ricordo solo qui incidentalmente l'allungata placca niveoglaciale, pensile sopra una terrazza rocciosa fortemente inclinata, quotata 3144 m.

V. **Ghiacciaio di Chérillon**, relativamente grande, ramificato in alto, molto allungato verso il basso, dove però (in causa del potente ed esteso detrito trasportato ed accumulato in tanti anni) esso fu in parte mascherato, ma contemporaneamente riparato, dal suo potente ammanto morenico, nonchè direi quasi trattenuto o imprigionato dai suoi cordoni morenici laterali e frontali. Ciò ci spiega come anche quando, negli scorsi secoli, questo ghiacciaio era più sviluppato che non oggi, non avesse una lunghezza frontale molto più grande dell'attuale, solo raggiungendo il ciglione della roccia (Calceschisti prasinitiferi inclinati di pochi gradi verso O. N. S.) sovraincombente alla regione di Batzé - Château du Breuil, facendovi rotolare abbondante detrito morenico, che vedesi infatti largamente sparso lungo il pendio roccioso e nelle sovraccennate sottostanti regioni pianeggianti.

Però se nel suo antico sviluppo, sin verso la metà del secolo XIX, il ghiacciaio di Chérillon non era molto più allungato in basso che non oggi, pur essendo giunto a spingere la sua lingua terminale penzolante verso la regione del Breuil, come mostra il suo terreno morenico terminale, esso era invece molto più gonfio in modo da poter deporre alte e complesse morene, fra cui specialmente importante quella sinistra, di andamento ondulato, multipla, cioè a cresta subbifida (per due principali momenti di deposito), ormai inerbita nella parte esterna, ma presentantesi tuttora d'aspetto fresco sul fianco interno, alle cui falde formaronsi poi altri cordoncini morenici più recenti; morena complessivamente assai importante, anche alta 70, 80 e più metri.

---

(1) Il foglio Matterhorn della Carta Svizzera nelle sue varie edizioni, come pure la Carta geol. d'Italia al 100.000, foglio M. Rosa, 1912, segnano il Ghiacc. del Leone troppo esteso, specialmente verso Est (dove invece sonvi soli nevati) e con un margine non corrispondente al vero.

È pure anche assai alta la morena corrispondente (inerbita in ambo i lati), subrettilinea, di destra, alla cui deposizione però contribuì pure il vicino ghiacciaio del M. Tabel o Tabor o di Hérens.

La spiccata tendenza antica ed attuale del ghiacciaio di Chérillon di scendere specialmente sul lato destro contro la gigantesca muraglia o gradinata divisoria fra esso e il contiguo ghiacciaio di Hérens, dipende in gran parte dalla pendenza del sottostante fondo roccioso, costituito da banchi gneissico-granitici inclinati, come di solito, verso O. all'incirca; ciò ci spiega come anche oggi sia appunto sul lato destro della fiumana glaciale terminale che esce il torrente subglaciale principale frammezzo al detrito mascherante la fronte del ghiacciaio.

Ma fin verso la metà del secolo XIX quando il ghiacciaio di Chérillon era più grandioso e potente, come accennano anche sia le carte topografiche di quel periodo (per quanto assai imperfette), sia i depositi morenici, la sua parte sinistra si espandeva notevolmente, scavalcava e copriva la costiera rocciosa (costituita dai banchi gneissico-granitici, colla solita dolce inclinazione ad ovest circa, di quota 2902-2870-2678), discendendo assai in basso e costituendo così un ramo laterale sinistro, obliquamente subtriangolare, del ghiacciaio di Chérillon.

È allora che fu depositata la bella morena sinistra, lunga circa 1 km., che vedesi scendere regolarmente dalla quota 2902 a 2500 circa, mentre se ne deponeva un'altra meno lunga a destra, ambedue tuttora con aspetto fresco.

Un recente residuo di tale antica espansione glaciale lo troviamo ancora in un piccolo arco morenico soggiacente alla relativa linguetta glaciale che pende dal margine sinistro del ghiacciaio di Chérillon a monte dello sperone roccioso quotato 2678.

Un'analoga lingua glaciale laterale, contemporanea al sovraccennato ramo sinistro del ghiacciaio di Chérillon, scendeva dal fianco sinistro del ghiacciaio di Hérens (attraverso la depressione di quota 2922) collegando assieme tali due ghiacciai, come mostrano le antiche carte degli Stati Sardi e di Adams-Reilly; ciò che contribuì a formare i grandiosi, caotici depositi morenici collinosi che mascherano gran parte della massa terminale del ghiacciaio di Chérillon nell'ultimo chilometro di sviluppo.

In seguito anche tale lingua glaciale del ghiacc. di Hérens, pel regresso generale dei ghiacciai, dopo il 1870, si ingracilì, si ritrasse, riducendosi a quella linguetta triangolare che vedesi pendere sulle roccie presso la quota 2922, allungandosi ed accorciandosi di qualche metro secondo le stagioni e le annate.

Nello stesso tempo il ghiacc. di Chérillon pure si ingraciliva e si ritraeva alquanto, si individualizzava del tutto e specialmente si abbassava molto per modo che la sua parte terminale (ultimo chilometro) crepacciata trasversalmente nella sua parte superiore, si ridusse quasi ad una vasta area di ghiaccio fossile (ben distinta dalla soprastante area di ghiaccio vivo terminante in frastagliatura seraccata verso 2700-2650 m. circa), apparente solo qua e là sotto alla potente e proteggente massa sedimentaria morenica, sia allineata in grandi e piccoli cordoni longitudinali di aspetto fresco, caotico e spesso frananti in basso (1), sia sparsa largamente; spesso sotto le morenule ed i depositi morenici vedesi apparire il ghiaccio più o meno sporco.

Tutto ciò ricorda alquanto la terminazione dei ghiacciai del Miage, del Triolet, ecc., e ci prova sempre più la poca sensibilità relativa di questi ghiacciai di poca pendenza e quindi di grande lentezza, per cui il materiale morenico man mano trasportato lentamente da monte a valle va sempre più accumulandosi, accatastandosi, e quindi proteggendo sempre meglio il ghiaccio sottostante finchè questo fonde (tanto più se in lento regresso), e così il materiale delle morene mobili, viaggianti, viene a costituire parte delle morene fisse, stabili, laterali ed anteriori o frontali.

Come osservazione di dettaglio che segnala i movimenti odierni del ghiacc. vero di Chérillon, ricordo che mentre l'ultimo piccolo affioramento roccioso (tra le linee di quota 2625 e 2650

---

(1) Nell'ora che rimasi, il 25 agosto 1916, studiando tale fronte seraccata assistetti a 4 scariche o rovinii della parte anteriore della cascata glaciale in esame ed a fenomeni analoghi della lingua sinistra del ghiacciaio di Hérens, per cui si comprende come si possa costituire sotto detta vera fronte glaciale viva ed attiva un ghiacciaio di seconda formazione o fossile, quello cioè che costituisce la lunga e larga fiumana glaciale di Chérillon compresa tra due alte, tipiche morene laterali e coperta da cordoni morenici e da materiale analogo sparso.

a S. E. dell'affioramento maggiore quotato 2678) della grandiosa gradinata gneissica sostenente il margine sinistro del ghiacciaio, appariva abbastanza bene nell'agosto 1916; invece nell'agosto del seguente anno 1917 tale spuntone era più nascosto dalla massa glaciale sovraincombente ed avvolgente, tanto che vi si presentava nel ghiaccio quasi una cavernosità subtriangolare (in fondo a cui appariva ancora la roccia nereggiante) che pareva quasi vomitare una quantità di materiale morenico allineantesi poscia lentamente a costituire una morena sublaterale poi obliquamente submediana (e sempre maggiore per continuo accumulo) del ghiacc. terminale di Chérillon.

VI. **Ghiacciaio del M. Tabel o di M. Tabor o d'Hérens**, un po' analogo a quello di Chérillon, ma più piccolo, più stretto, irregolarmente ovoide-subellittico. Come si accennò sopra, esso per mezzo di un notevole ramo laterale sinistro scendeva ad unirsi con quello di Chérillon (come indicano le antiche carte topografiche), portandovi un forte contributo di ghiaccio e di morene colle conseguenze già accennate specialmente riguardo ai depositi morenici.

Nello stesso tempo l'asse principale o ramo sinistro del ghiacc. di Hérens, si sviluppava allora notevolissimamente, scendendo per oltre 700 m. più che non oggi e spingendo così la sua fronte arcuata sin sulle roccie (calceschistose-prasinitifere dolcemente inclinate a N. O. circa) di C. Crot (2365 m. s. l. m.); quivi troviamo infatti sia massi erratici angolari sparsi sin sul ciglione della balza che precipita sul piano del Breuil, sia due concentrici ma innestantisi semicerchi od archi morenici (a grossi elementi sparsi fra terriccio ben inerbito) collegantisi colla grandiosa morena sinistra (mediana col ghiacc. di Chérillon e relativamente antica, come mostra il suo inerbimento da ambi i lati) e sperdentisi invece nella morena destra alquanto guasta e mascherata da depositi di falda e simili, ma pure in parte inerbita.

Ma dopo il 1860 circa anche il ghiacciaio di Hérens si ingracilì (ritirando il suo grande sovraccennato ramo sinistro, già fluente nel ghiacc. di Chérillon, su cui ora deietta solo più pseudo frane o valanghe glacio-nevose, come indica la fotografia), si deprimette (lasciando apparire sempre più estesamente i banchi gneissici di quota 3136) e regredì abbastanza rapidamente

nella sua regione frontale, abbandonandovi abbondante ma sparso materiale detritico.

Anzi, mentre il ghiacciaio di Chérillon, dopo la regione di cascata seraccata, continua tuttora a presentare una lunga (quasi un km.) ed estesa formazione glaciale, per quanto pseudofossile, invece il ghiacc. di Hérens, perchè più piccolo e quindi meno alimentato, perdette, per graduale fusione e regresso, l'analoga formazione glaciale (già spingentesi sino a 2365 m.), arrestandosi dopo la regione di cascata poco sotto i 2700 m., con variazioni annue e di stagione; notisi però che una precisa indicazione in proposito è difficile, sia per dette variazioni continue, sia perchè un po' di ghiaccio semi-fossile può ancora restar nascosto sotto il detrito morenico franoide tanto abbondante in questa regione.

Verso il 1878-80 il ghiacciaio di M. Tabel era tanto ingracilito ed abbassato che nella sua parte medio-inferiore ne sporgevano due affioramenti rocciosi, come mostra la fotografia presa, dal Geomein, dal Besso in quell'epoca; più tardi esso andò di nuovo ingrossandosi (come gli altri ghiacciai alpini in generale) sin verso la fine del secolo XIX, tanto che lo spuntone inferiore fu coperto dal ghiacciaio, come mostra la fotografia dell'avv. G. Bobba presa il 1° settembre 1899 dalle alture di Pian Torrette sopra il Geomein; in seguito il ghiacciaio in esame subì un nuovo periodo di ingracilimento, per cui lo spuntone inferiore riapparve; ma ora il ghiaccio crescendo ed avanzando tende nuovamente a mascherare completamente detto spuntone, che nell'agosto 1916 (vedi fot. Sacco) appena più si intravedeva sotto la crepacciata massa glaciale sovrincombente, attorniante e montante.

VII. **Ghiacciaio di Cors**, che è ora quasi scomparso (giacchè sonvi appena, come residui, piccoli ammassi glaciali o nevoso-glaciati, in angoli riparati o su alti piani inclinati un po' ampi), ancora nel periodo dauniano occupava la gran conca scavata nella parete orientale della catena montuosa, gneissico-granitica, di Punta des Cors-Jumeaux, ecc., scendendo colla sua fronte terminale sino a circa 2300 m. e depositando allora un arco morenico ancora in parte conservato.

In seguito questo ghiacciaio, per la forma ed esposizione del suo bacino, ecc., scomparve quasi completamente, rimanen-

done solo come residuo piccoli ghiacciai-nevati nelle depressioni più riparate, come ancora accennano le antiche carte degli Stati Sardi e di Adams-Reilly.

Ma anche ciò sparì nella seconda metà del secolo scorso, ed oggi esistono solo più limitate aree nevoso-glaciali nei ripiani rocciosi più elevati.

VIII. **Ghiacciaio di Creton**, anch'esso ormai in massima parte scomparso, ma ancora nel periodo dauniano era abbastanza importante, giacchè occupava tutta l'ampia depressione scavata nella parete orientale dell'alta dorsale gneissico-granitica di Becca Creton - Château des Dames, formando una massa glaciale subtriangolare; questa era tanto imponente da scendere sino al fondo della valle principale, spingendosi (in un periodo di maggior espansione) sull'opposta parete (fianco sinistro di Valtournanche) nonchè volgendosi a sud ed occupando il fondo della valle, cioè la conca di Les Pères; è allora che fu depositata una gran quantità di materiale morenico a grossi massi gneissici sin oltre un centinaio di metri sul fondo della vallata, nonchè potenti formazioni moreniche fin verso il Cret ed altresì una lunga e complessa morena (caratteristica per i suoi grandi massi sparsi), su cui sale tortuosamente la stradicciuola della Valtournanche.

È allora che vennero pure depositati materiali morenici sui fianchi montuosi di C. Bayettes e di C. Vofrède.

In un'ultima fase di arresto alla fine del periodo dauniano il ghiacc. di Creton, essendosi già ritratto dal fondo di Valtournanche, dovette limitare la sua fronte alla strettoia rocciosa esistente circa mezzo chilometro dal fondo della valle principale, deponendo forse allora un arco morenico verso i 2200 m. s. l. m.; arco facilmente sbrecciato in seguito dal T. Creton, ma di cui esiste tuttora un residuo nella piccola dorsale laterale di C. Vofrède.

In seguito il ghiacciaio di Creton scomparve quasi completamente e non potè neppur ricostruirsi col grande incremento glaciale dei secoli scorsi, solo rimanendone come ricordo alcune piccole aree glaciate o glacio-nivali nelle incassature più riparate, come segnano le carte degli Stati Sardi e di Adams-Reilly, che indicano lo stato delle cose verso la metà del secolo XIX; ma anche tali aree glaciate scomparvero o si restrinsero molto, dopo il 1878, restandone solo più placche appollaiate nelle parti più

riparate (p. es. alle falde di Becca Creton) e sulle gradinate più alte (come per es. presso il colle Creton di passaggio in Valpelline).

Però nella profonda ed alta incassatura rivolta a N. E. che scende dall'elevata cresta di Château des Dames-M. Rouss potè naturalmente conservarsi un vero ghiacciaio, che è ben segnato sulla Carta al 100.000 di Adams-Reilly (rilevata nel 1865) col nome di *Glacier de Mont Rouss* (mentre altri l'indica come *Ghiacciaio di Vofrède*), largo circa un km. in alto e lungo quasi 2 km., in modo che la sua fronte giungeva allora sino ad affacciarsi sul gran salto roccioso che sovrasta a les Vorpilles.

Ma, come in generale, dopo il 1865 questo ghiacciaio si restrinse alquanto, ritirò la sua fronte terminale di circa 300 m., come indicano le sue morene laterali residue, mentre intanto appariva più estesamente la cresta rocciosa che divide in alto il vero ghiacciaio di Vofrède dalla zona glaciata (più alta e meno inclinata) che fascia le falde del Château des Dames, quasi a foggia di vedretta o terrazza inclinata di ghiaccio che sale al colle di Bella Tza, e si potrebbe denominare *Vedretta del Château des Dames*.

La fotografia (n° 101 di Catalogo) fatta da V. Sella il 29 luglio 1882, indicata col nome di " Jumeaux de Valtournanche „ e presa dalla sommità del Cervino, mostra assai bene (oltre al ghiacciaio di M. Tabor o di Hérens) questi ghiacciai ultimamente indicati del gruppo di Château des Dames, il ghiacciaio di Vofrède (dietro cui campeggia il ghiacciaio della Roisetta sotto la Punta di Cian), mentre più a destra appaiono i ghiacciai di Cian e di Livournea ed infine quello della piramidale Becca Luseney (ghiacciai pure visibili nella fotografia n° 17 presa da V. Sella il 16 settembre 1887 dal Château des Dames), ma già in gran parte fluenti in Valpelline. È notevole come, confrontando la fotografia presa da V. Sella il 29 luglio 1882, dal Cervino, con una presa da me il 25 agosto 1916, appaiano solo differenze minime sia glaciali, sia nivali, indicandoci che dopo un trentennio, nel quale si era verificata una fase di avanzamento dei ghiacciai, questi erano regrediti sino a riprendere ad un dipresso lo sviluppo di prima.

A chiusa dei cenni sui fenomeni quaternari dell'alta Valtournanche è opportuno ricordare:

1° Il grande sviluppo dei materiali detritici derivanti dall'intensità delle azioni climatiche (specialmente gelo) che decompongono le roccie superficialmente originando un'importante coltre di frammenti che o rimangono in sito nelle regioni pianeggianti (come per es. sugli altipiani inclinati della Vieille tra 2500 e 2700 m. s. l. m.), oppure si accumulano nella parte inferiore dei fianchi montuosi in forma di detriti di falda, talora confondendosi con quelli morenico-franoidi, come per es. sulle falde settentrionali del gruppo di Gran Sommetta-Motta di Pleté, sulle falde meridionali del Furggen Grat, sulle falde orientali della gigantesca, dirupata costiera di Cors-Creton-Château des Dames, specialmente nella parte media dei canaloni di Cors, Creton, ecc.

2° Locali conoidi di deiezione, come quella piccola del T. Chérillon, quelle grandiose del vallone di Cors nel piano di Breuil, del T. Creton allo sbocco del vallone omonimo, ecc.

3° I pianori alluvionali, come: quello lungo ed irregolare dell'alta val Cervino, circa $^1/_2$ km. sopra Batzè; quello mirabile, rotondeggiante (quasi chiuso da un depresso cerchio morenico di giganteschi massi erratici) di Planet di Breuil ed altri minori in fondo di Valtournanche; il piano alluvio-torboso che va avanzandosi e riempiendo la depressione del Lago meridionale di Goillet, ecc.

Particolarmente interessante è il lungo piano della bassa Val Barmaz-Vieille, sopra N. D. des Héremites di Breuil, giacchè esso per la sua forma e la sua caratteristica terrazzatura su ambi i fianchi della valle (specialmente ben visibile con 4 o 5 gradini nella regione di Bardoney-Museroche e delle falde della collinetta dell'Albergo Giomein) mostra la bassa Val Vieille che fu già una regione di parziale arresto acqueo o pseudo-lacustre, in causa dello sbarramento roccioso (schisti prasinitici, inclinati a O. N. O., di N. D. des Héremites) e morenico (morena *dauniana* del Giomein).

In seguito il livello di detto lago paludoso (che potrebbe denominarsi di Bardoney), copiosamente alimentato d'estate per la fondita del ghiacciaio di Valtournanche l. s., tratto tratto dovette abbassarsi per sbrecciatura, sventratura del suo sbarramento, derivandone la terrazzatura delle sponde sino al completo svuotamento dell'area pseudolacustre, cioè finchè esso raggiunse l'attuale fisionomia torrenziale.

Fotografie dei Ghiacciai del Cervino.

Innumerevoli sono naturalmente le fotografie state fatte da ogni lato della mirabile piramide del Cervino e quindi dei ghiacciai che ne rivestono i fianchi e circondano le basi, ma, dato il loro scopo alpinistico, generalmente non servono a quello glaciologico, oltre che quasi tutte sono private e non acquistabili, oppure in commercio ma senza data, ciò che toglie gran parte del loro valore scientifico rispetto agli studi glaciologici.

Ne ebbi in esame un gran numero, così dei sig[i] V. Besso (1878-80), Gugliermina (1908), G. Bobba (1899), E. Gallo (1909), E. Camoletti (1901), I. Brocherel (che sperasi rediga il catalogo delle sue fotografie), ecc. Ma, limitandomi ad indicare le fotografie pubblicate od in commercio, quindi confrontabili con facilità, ricordo:

Pel versante svizzero, le fotografie di V. Sella: N° 124, Cervino dal Vallone Zmutt; N° 127 (luglio 1883) Cervino, Matterhorngl., ecc.; N° 377 (luglio 1883) Cervino e Dent d'Hérens dal Gabelhorn; N° 252 (ag. 1885) Ghiacc. di Ferpècle; N° 399 Cervino dal ghiacc. di Tiefenmatten, ed altre numerose fatte dal Sella nelle estati del 1881-82-83-85 e 87 (V. Catalogo, Serie E). Veggasi pure l'Atlante " Alpinen Majestäten „; I (1901), N° 69-70 (über Theodul-Gletscher) e Furgg Gletscher; III (1903), N° 223 (Theodulgl. e Furgg-Gletscher); N° 239 (Parte alta destra dello Zmuttgl.); IV (1904), N° 230 (Furgg-Gletscher); nonchè l'Album " Zermatt „ pubblicato dal Vehrli di Zurigo con varie fotografie dei ghiacciai del Cervino del lato svizzero, fra cui la terminazione dello Zmuttgletscher.

Pel versante italiano: le fot. di Vittorio Sella, cioè: N° 77 (22 agosto 1881) Ghiacciai di Ventina, di Valtournanche e di S. Théodule dal picco Tyndall sul Cervino; N° 78 (4 settembre 1881) Ghiacc. italiani del Cervino; N° 101 (22 luglio 1882) (dalla vetta del Cervino) Ghiacciai di M. Tabel o di Hérens, le placche nevoso-ghiacciate della grande muraglia gneissica sino

al ghiacc. di Valfroide (1); N° 111 (luglio 1882) Ghiacciai di Valtournanche, della Gran Sommetta e di Roisetta, dalla punta del Cervino; N° 416 (16 settembre 1887) Ghiacciai ital. del Cervino dal Château des Dames, ed altre fatte dal Sella in diverse annate dal 1881 al 1887 (V. suo Catalogo, Serie E).

Inoltre le fotografie fatte dal Col^lo^ Celesia nell'estate del 1913, cioè (del Catalogo J. Neer) N° 684 coi ghiacciai e loro apparati morenici fascianti le basi italiane del Gruppo del Cervino; N° 776 coi ghiacciai Chérillon e Leone (e loro morene frontali) sino alla Punta Bianca; N° 791 con vista analoga al 684 ma più di lontano.

Nell'agosto del 1916 e 1917 studiando i ghiacciai del gruppo del Cervino ne trassi varie fotografie a scopo documentario.

(1) Per questa regione vedi anche N. 417 (16 sett. 1887), Ghiacciai di Colle Valcournera, colle tipiche morene a collana sino alla punta di Cian (La Roisetta).

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA FOTOTIPICA

1. Da destra a sinistra: Ghiacciai del Cervino, del Colle del Leone, del Leone e di Chérillon (Fotografia di V. Sella, presa dal Châteaux des Dames il 16 settembre 1887).
2. Ghiacciaio del M. Tabel o d'Herens; in alto la cresta dei Cors (Fot. di V. Besso, estate del 1879?).
3. Idem (Fot. di G. Bobba, 1° settembre 1899).
4. Idem (Fot. di F. Sacco, 25 agosto 1916).
5. Ghiacciai italiani del Cervino e loro apparati morenici (Fot. di G. Celesia, estate del 1913).
6. Ghiacciai di S. Teodulo e di Val Tournanche o Plan tendre (Fot. di V. Sella, presa dal Pic Tyndall il 22 agosto 1881).
7. Da sinistra a destra: Ghiacciai di Matterhorn, di Tiefemmatten e gran colata glacio-morenica dello Z'Muttgletscher, del Cervino e della Dent d'Herens (Fot. di V. Sella, presa dal versante svizzero nel luglio 1883).
8. Apparato morenico del Ghiacciaio del Cervino (Fot. di G. Bobba, 1° settembre 1899).

Sulla probabile identità della peganite con la variscite [1]

Nota del Dott. LORENZO MOSCHETTI

Nel 1830 A. Breithaupt (2) distinse, sotto il nome di peganite, un fosfato idrato di alluminio, cristallino, trovato, sotto forma di una sottile e compatta incrostazione verde, su roccie silicee, in una collina situata tra Langen-Strigis e Frankenberg in Sassonia. Sulla peganite si trovava della wavellite in belli e numerosi cristalli.

Breithaupt distinse il suo minerale dalla wavellite sopratutto per l'aspetto esterno: i cristallini di peganite non permisero misure precise, e l'angolo del prisma risultò di 52°-53°, vicinissimo a quello del prisma }110{ della wavellite (53° 34 $^2/_3$) secondo Senff (3). Se cristallograficamente la peganite sembrava identica alla wavellite, se ne differenziava, però, per i caratteri chimici, contenendo una minore quantità di acqua (23 $^1/_2$ a 24 $^0/_0$ invece del 27 $^0/_0$ circa della wavellite), e presentando un rapporto $P_2O_5 : Al_2O_3$ diverso da quello di quest'ultimo minerale.

I dati di Breithaupt erano troppo sommarî perchè la peganite potesse essere considerata come una specie minerale ben definita, sicchè essa fu per vario tempo considerata come wavellite, finchè nel 1844 R. Hermann (4) pubblicò un'analisi del materiale di Strigis (II della tabella seguente), in base alla quale la peganite risultò possedere una composizione ben diversa da quella della wavellite, esprimibile mediante la for-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Torino, diretto dal Prof. F. Zambonini.

(2) A. Breithaupt, " Journ. f. Ch. u. Ph. " (Schw.), *60*, 308, 1830.

(3) Senff, " Pogg. ", *18*, 474, 1830.

(4) R. Hermann, " Journ. prakt. Chem. ", *33*, 287 (1844).

mula $2Al_2O_3 . P_2O_5 . 6H_2O$, la quale richiede i numeri della colonna I.

Dopo il lavoro di Hermann, la peganite fu generalmente ritenuta un minerale ben definito ed accolta come tale nei trattati più riputati, come, per esempio, in quello di Dana.

Anche minerali di altre località furono, in progresso di tempo, riferiti alla peganite, ma risultarono, però, quando furono esaminati più accuratamente, sempre diversi dalla peganite tipica. Così CHESTER (1) dimostrò che la pretesa peganite dell'Arkansas era, in realtà, variscite, e, quanto al minerale di Nobrya, presso Albergharia velha nel Portogallo, che anche il DANA ha riunito alla peganite sassone, è da notare che le analisi di LICHTENBERGER (2) e di FRENZEL (3) (III e IV) differiscono molto da quella di Hermann, e sono, in realtà, molto più prossime alla composizione della wavellite, la quale, secondo la formula di GROTH (4), confermata da ZAMBONINI (5), è riferita nella colonna V.

	I	II	III	IV	V
(CuO)	—	Traccie	0,64	0,83	—
(BaO)	—	—	0,43	0,39	—
Al_2O_3	44,97	44,49	38,90	39,62	36,8
Fe_2O_3	—	Traccie	—	—	—
P_2O_5	31,25	31,28	36,14	34,33	33,9
H_2O	23,78	22,82	23,14	23,53	27,0
F	—	—	—	—	2,3
Ganga	—	2,20	—	—	—
	100,00	100,79	99,25	98,70	100,00

(1) A. N. CHESTER, "Am. Journ. „, III, *13*, 295 (1877).
(2) LICHTENBERGER, "N. JB. Min. „, etc., 1872, 819.
(3) A. FRENZEL, "N. JB. Min. „, etc., 1872, 819.
(4) P. GROTH, "Z. Kryst. „, *26*, 108 (1896).
(5) F. ZAMBONINI, "R. Acc. d. Linc. „ (5 *a*), *11*, 123 (1902).

È, del resto, facile vedere che nel minerale portoghese il rapporto $P_2O_5 : Al_2O_3$ è precisamente quello della wavellite: i rapporti molecolari

	P_2O_5	: Al_2O_3	: H_2O
I	0,50	1	3,00
II	0,51	1	2,91
III	0,65	1	3,30
IV	0,62	1	3,37
V	0,66	1	4,16

mostrano, appunto, che il minerale di Nobrya è del tutto diverso dalla peganite tipica, e rappresenta piuttosto una wavellite lievemente disidratata. A questo proposito merita di essere ricordato che, secondo le esperienze di Church (1), la wavellite subisce già a 100° una perdita di peso uguale a 2,28 %, sicchè, data questa facilità di emissione di una parte dell'acqua, appare probabile che il minerale analizzato da Lichtenberger e da Frenzel non sia stato altro che della wavellite, un poco disidratata in seguito ad alterazione.

In complesso, perciò, di vera peganite non rimane che quella originaria di Strigis, fondata, a prescindere da caratteri esteriori poco decisivi, sull'unica vecchia analisi di Hermann. Nuove ricerche sulla peganite apparivano, perciò, assai desiderate.

Per consiglio del Prof. Zambonini, io ho sottoposto ad analisi un campione di peganite del Museo di Torino, proveniente da Frankenberg, in Sassonia, che ha tutti i caratteri della peganite tipica di Breithaupt.

In esso, infatti, la peganite si presenta, come nei campioni descritti da Breithaupt, sotto forma di una crosta cristallina verdastra, su una roccia silicea; sulla peganite si osserva della wavellite giallognola in aggruppamenti raggiati.

---

(1) A. H. Church, " Am. Journ. Chem. Soc. ", *26*, 110 (1873).

Dato questo complesso di caratteri e la provenienza dalla stessa località che fornì il materiale studiato da Breithaupt, appare assai probabile che il minerale del Museo di Torino sia identico a quello sul quale il Breithaupt fondò la sua specie.

Il campione non si prestava ad uno studio cristallografico, perchè i rari cristalli verdognoli esistenti erano così piccoli, così mal conformati e così tenacemente aderenti alla crosta, nella quale erano immersi, da non poter essere misurati con esattezza.

Dalla crosta, dello spessore di $^1/_2$ millimetro, potei isolare gr. 0,1979 di minerale puro, e su questa quantità, disciolta in acido nitrico, determinai il fosforo secondo il metodo di Woy, e, dopo aver eliminato il molibdeno mediante l'idrogeno solforato sotto pressione, dosai l'alluminio ed il calcio.

I risultati da me ottenuti sono riuniti in I nella tabella che segue:

	I	II
(CaO)	0,65	—
Al_2O_3	31,63	32,32
Fe_2O_3	traccie	—
P_2O_5	44,99	44,90
H_2O	23,20	22,78
Residuo insolubile	0,01	—
	100,48	100,00

Furono pure trovate traccie minime di manganese.

Questi risultati sono del tutto inattesi, perchè dimostrano che il minerale di Frankenberg da me analizzato possiede una composizione ben diversa da quella indicata da Hermann, ed identica, invece, a quella della variscite, la cui formula $AlPO_4 . 2H_2O$ richiede i numeri della colonna II.

Che si tratti veramente di variscite, è confermato dal comportamento rispetto all'acido cloridrico ed al riscaldamento. Infatti, la polvere, bianco-verdastra, era insolubile in acido clori-

drico bollente; riscaldata a 110° essa diventò grigia, a 120° lilla, a 150° bleu-lavanda, e solo dopo questo cambiamento spiccato di colore si sciolse con grande facilità in acido cloridrico diluito, caldo. Ora, le proprietà da me osservate stanno in buon accordo colle esperienze fatte da W. T. SCHALLER (1) a varie temperature sulla variscite dello stato di Utah.

Per il peso specifico io ho trovato 2,56-2,57, col metodo della sospensione, in buon accordo con il valore trovato da SCHALLER per la variscite cristallizzata (2,54).

Poichè il minerale da me analizzato possiede tutti i caratteri di quello descritto da BREITHAUPT, è assai probabile che la peganite originaria di Sassonia non sia stata che *variscite*. Certamente, per risolvere il problema in modo definitivo occorrerebbe poter studiare i campioni originali del BREITHAUPT; ad ogni modo è da osservare che la quantità di acqua trovata dal mineralista sassone coincide con quella trovata da me, il che conferma la probabile identità dei due materiali. Si può aggiungere che il valore dato da BREITHAUPT per il peso specifico (2,492-2,496) è molto vicino a quello trovato da SCHALLER per la variscite dello stato di Utah (2,54) (2).

Mi sembra, perciò, di poter concludere che la peganite originaria di Sassonia è da ritenersi identica alla variscite.

Quanto all'analisi di HERMANN è da notare che, se si ammettesse un errore di trascrizione per il quale fossero stati scambiati i valori dell'allumina e del pentossido di fosforo, essa diverrebbe praticamente identica alla mia. Un errore di trascrizione del genere non è difficile ad ammettersi, e non sarebbe unico nella letteratura chimica mineralogica.

Nel chiudere questo mio breve lavoro, credo doveroso porgere i miei più vivi ringraziamenti al Prof. ZAMBONINI per i consigli datimi e per avermi concesso di analizzare, nel Laboratorio da Lui diretto, un materiale, in questo momento, rarissimo.

---

(1) W. T. SCHALLER, " Z. Kryst. ", *50*, 341 (1912) e " Bull. geol. Surv. U. S. ", 509, *64* (1912).

(2) Per la variscite del Voitgland, TH. PETERSEN (" N. JB. Min. ", ecc., 1871, 537) dà per il peso specifico un valore molto più basso di quello trovato da SCHALLER, e, cioè, 2,41.

Estrazione graduale di radice cubica

Nota di Dr. LUISA VIRIGLIO
(R. Scuola Normale Domenico Berti di Torino)

Mi propongo di esporre l'estrazione graduale della radice cubica di un numero.

I fondamenti del calcolo graduale si trovano nelle Note del Prof. Peano: " Approssimazioni numeriche „, e " Interpolazione nelle tavole numeriche „ (" Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino „, 1917 e '18). Farò qui uso delle notazioni di questa seconda Nota, cioè:

$V_r a$ è il valore con r cifre decimali del numero a.

$T_r a$ è il termine di grado r di a; r essendo un numero intero, positivo, nullo o negativo.

$a \times_r b$ è il prodotto di grado r di a per b.

Indico con $P_r(a, b)$ la somma di tutti i prodotti di un termine T_s di a per un termine T_{r-s} di b tali che la somma dei loro gradi valga r; s può assumere tutti i valori interi da $-\infty$ a $+\infty$; la somma però consta di un numero finito di termini non nulli. In simboli:

$$a, b \in Q \,.\, r \in n \,.\, \supset \,.\, P_r(a, b) = \Sigma\,[T_s a \times T_{r-s} b \,|\, s, n] \qquad \text{Def.}$$

Si avrà:

$$a \times_r b = a \times_{r-1} b + P_r(a, b),$$

ossia " il prodotto di grado r di due numeri si ottiene aggiungendo al loro prodotto di grado $r-1$ il prodotto P_r „.

Come esempio, estrarrò la radice cubica, con dieci cifre decimali, del numero 7. Il calcolo si dispone come segue:

				7·000000
$v = \mathbf{1{\cdot}91}$			$v^3 =$	6·967871
	$d_2 =$	10·9443	$r_2 =$	32129
$T_3 = \mathbf{2}\, X^{-3}$	$P_3 =$	10	$d_2 \times_4 t_3 =$	218
	$d_3 =$	10·9543	$r_3 =$	1032
		2	$\mathfrak{d}_5 =$	10
			$r_3' =$	1022
$T_4 = \mathbf{9}\, X^{-4}$	$P_4 =$	59		981
	$d_4 =$	602	$r_4 =$	419
		29	$\mathfrak{d}_6 =$	74
			$r_4' =$	345
$T_5 = \mathbf{3}\, X^{-5}$	$P_5 =$	84		327
	$d_5 =$	104	$r_5 =$	180
		293	$\mathfrak{d}_7 =$	47
			$r_5' =$	133
$T_6 = \mathbf{1}\, X^{-6}$	$P_6 =$	57		109
	$d_6 =$	97	$r_6 =$	240
		2931	$\mathfrak{d}_8 =$	27
			$r_6' =$	213
$T_7 = \mathbf{1}\, X^{-7}$	$P_7 =$	57		109
	$d_7 =$	1027	$r_7 =$	1040
		29311	$\mathfrak{d}_9 =$	124
			$r_7' =$	916
$T_8 = \mathbf{8}\, X^{-8}$	$P_8 =$	143		872
	$d_8 =$	413	$r_8 =$	440
		293118	$\mathfrak{d}_{10} =$	128
			$r_8' =$	312
$T_9 = \mathbf{2}\, X^{-9}$	$P_9 =$	127		218
	$d_9 =$	10·961104257	$r_9 =$	940
		2931182	$\mathfrak{d}_{11} =$	81
			$r_9' =$	859
$T_{10} = \mathbf{7}\, X^{-10}$				763
			$r_{10} = 7 - v^3 - d_9 \times_{11} z =$	96

$$V_{10} \sqrt[3]{7} = 1{\cdot}9129311827$$

Per calcolare un prodotto P è utile disporre, sotto le cifre di uno dei due numeri, le cifre dell'altro in ordine inverso, in modo che la somma dei termini rappresentati da due cifre in colonna sia costantemente eguale al grado del prodotto. La somma dei prodotti di due cifre in colonna dà il numero che rappresenta P.

$P_r(a, b)$ si potrà perciò chiamare " il prodotto trasversale, di grado r, di a e b ".

La disposizione opportuna delle cifre può ottenersi facilmente scrivendo il secondo numero sopra una striscia mobile, e facendolo scorrere capovolto sotto il primo. Così suggerirono Fourier, Cauchy, ecc. Se i prodotti parziali sono pochi, si sommano facilmente a memoria; se invece sono numerosi, la loro somma si effettua più comodamente mediante l'*Abaco*, specie di pallottoliere, usato già dai Romani e tuttora dai Cinesi.

Le varie operazioni eseguite si possono così spiegare:

Scrivo il numero di cui si vuol calcolare la radice cubica:

$$7{\cdot}000000$$

Nelle tavole comuni dei cubi dei numeri da 1 a 1000 leggo il valore con due cifre decimali della radice, e sia

$v = \mathbf{1{\cdot}91}$ e $\qquad v^3 = 6{\cdot}967871$

Posto $r_2 = 7 - v^3$, sarà $\qquad r_2 = 0{\cdot}032129$

Posto $d_2 = 3v^2$, servendomi delle tavole dei quadrati, ho:

$$d_2 = 10{\cdot}9443$$

Divido $V_4 r_2 = 0{\cdot}0321$ per $V_1 d_2 = 10{\cdot}9$; ho per quoziente:

$T_3 = \mathbf{2}\, X^{-3}$, $\qquad d_2 \times_4 T_3 = 218$

e per resto $r_3 = r_2 - d_2 \times_4 T_3 = 7 - v^3 - 3v^2 \times_4 T_3$:

$$r_3 = 0{\cdot}010329$$

Calcolo: $3v = 5{\cdot}73$

e $P_3(3v, T_3) = 5 \times 2\, X^{-3} = \qquad 10$

Posto $d_3 = d_2 + P_3(3v, T_3) = 3v^2 + 3v \times_3 T_3$, sarà:

$$d_3 = 10{\cdot}9543$$

Pongo $\delta_5 = d_3 \times_5 T_3 - d_2 \times_4 T_3 = (10{\cdot}95 - 10{\cdot}9) \times 2\, X^{-3} =$
$5\, X^{-2} \times 2\, X^{-3}$: $\qquad \delta_5 = 10$

Pongo $r_3' = r_3 - \delta_5 = 7 - v^3 - d_2 \times_4 T_3 - \delta_5 = 7 - v^3 - d_3 \times_5 T_3$:
$r_3' = 0{\cdot}010229$

Divido $V_5 r_3' = 0{\cdot}01022$ per $V_1 d_3 = 10{\cdot}9$; ho per quoziente:
$T_4 = \mathbf{9}\, X^{-4}$, $d_3 \times_5 T_4 =$ 981

e per resto $r_4 = r_3' - d_3 \times_5 T_4 = 7 - v^3 - d_3 \times_5 T_3 - d_3 \times_5 T_4$:
$r_4 = 0{\cdot}000419$

Pongo $z_3 = T_3$ e $z_4 = T_3 + T_4$; sarà $r_4 = 7 - v^3 - d_3 \times_5 z_4$.
Calcolo $P_4(3v, z_4) =$ 59

Pongo $d_4 = d_3 + P_4(3v, z_4) = 3v^2 + 3v \times_4 z_4$:
$d_4 = 10{\cdot}9602$

Pongo $\delta_6 = d_4 \times_6 z_4 - d_3 \times_5 z_4 = (10{\cdot}960 - 10{\cdot}95) \times 2\, X^{-3} +$
$(10{\cdot}96 - 10{\cdot}9) \times 9\, X^{-4}$: $\delta_6 =$ 74

Pongo $r_4' = r_4 - \delta_6 = 7 - v^3 - d_3 \times_5 z_4 - d_4 \times_6 z_4 + d_3 \times_5 z_4 =$
$7 - v^3 - d_4 \times_6 z_4$: $r_4' = 0{\cdot}000345$

Divido $V_6 r_4' = 0{\cdot}000345$ per $V_1 d_4 = 10{\cdot}9$; ho per quoziente:
$T_5 = \mathbf{3}\, X^{-5}$: $d_4 \times_6 T_5 =$ 327

e, posto $z_5 = z_4 + T_5$, il resto sarà: $r_5 = r_4' - d_4 \times_6 T_5 = 7 - v^3 -$
$d_4 \times_6 z_4 - d_4 \times_6 T_5 = 7 - v^3 - d_4 \times_6 z_5$: $r_5 = 0{\cdot}0000180$

Calcolo $P_5(3v, z_5) =$ 84

Pongo $d_5 = d_4 + P_5(3v, z_5) = 3v^2 + 3v \times_5 z_5$:
$d_5 = 10{\cdot}96104$

Pongo $\delta_7 = d_5 \times_7 z_5 - d_4 \times_6 z_4 = 10\, X^{-4} \times 2\, X^{-3} + 1\, X^{-3} \times 9\, X^{-4} +$
$6\, X^{-2} \times 3\, X^{-5}$: $\delta_7 =$ 47

Pongo $r_5' = r_5 - \delta_7 = 7 - v^3 - d_5 \times_7 z_5$: $r_5' = 0{\cdot}0000133$

Divido $V_7 r_5' = 133\, X^{-7}$ per $V_1 d_5 = 109\, X^{-1}$; ho per quoziente:
$T_6 = \mathbf{1}\, X^{-6}$: $d_5 \times_7 T_6 =$ 109

e, posto $z_6 = z_5 + T_6$, e $r_6 = r_5' - d_5 \times_7 T_6 = 7 - v^3 - d_5 \times_7 z_6$,
si avrà: $r_6 =$ 240

Calcolo $P_6(3v + z, z)$, ove con z intendo la frazione $0{\cdot}002931\ldots$ che andiamo determinando; i punti indicano cifre ancora incognite, ma che non si presentano nel calcolo che facciamo; invece di z si può leggere z_6, se si vuole. Si ha che

$P_6(3v+z, z) = P_6(3v, z) + P_6(z, z)$. $P_6(3v, z) = \left\} \begin{matrix} 573 \\ 981 \end{matrix} \right\{ X^{-6}$ è il prodotto trasversale, e $P_6(z, z) = \} 2 \{ X^{-6} = 4 \times X^{-6}$ (*).

Quindi $P_6(3v+z, z) = (53+4) X^{-6} = 57$

$d_6 = d_5 + P_6(3v+z, z) = 3v^2 + (3v+z) \times_6 z =$ 10·961097

$\mathfrak{d}_8 = d_6 \times_8 z_6 - d_5 \times_7 z_5 =$ 27

$r_6' = r_6 - \mathfrak{d}_8 = 7 - v^3 - d_6 \times_8 z_6 =$ 213

Divido $V_8 r_6' = 213 X^{-8}$ per $V_1 d_6 = 109 X^{-1}$; trovo

$T_7 = \mathbf{1} X^{-7}$ $d_6 \times_8 T_7 =$ 109

$r_7 = r_6' - d_6 \times_8 T_7 = 7 - v^3 - d_6 \times_8 z_7 =$ 1040

$P_7(3v+z, z) = P_7(3v, z) + P_7(z, z) = \left\} \begin{matrix} 573 \\ 811 \end{matrix} \right\{ X^{-7} + \} 29 \{ X^{-7} =$

$(21 + 36) X^{-7} =$ 57

$d_7 = d_6 + P_7(3v+z, z) = 3v^2 + (3v+z) \times_7 z =$ 10·9611027

$\mathfrak{d}_9 = d_7 \times_9 z_7 - d_6 \times_8 z_7 =$ 124

$r_7' = r_7 - \mathfrak{d}_9 = 7 - v^3 - d_7 \times_9 z_7 =$ 916

$T_8 = \mathbf{8} X^{-8}$ $d_7 \times_9 T_8 =$ 872

$r_8 = r_7' - d_7 \times_9 T_8 = 7 - v^3 - d_7 \times_9 z_8 =$ 440

$P_8(3v+z, z) =$ 143

$d_8 = d_7 + P_8(3v+z, z) = 3v^2 + (3v+z) \times_8 z =$ 10·96110413

$\mathfrak{d}_{10} = d_8 \times_{10} z_8 - d_7 \times_9 z_8 =$ 128

$r_8' = r_8 - \mathfrak{d}_{10} = 7 - v^3 - d_8 \times_{10} z_8 =$ 312

$T_9 = \mathbf{2} X^{-9}$ $d_8 \times_{10} T_9 =$ 218

$r_9 = r_8' - d_8 \times_{10} T_9 = 7 - v^3 - d_8 \times_{10} z_9 =$ 940

$P_9(3v+z, z) =$ 127

$d_9 = 3v^2 + (3v+z) \times_9 z =$ 10·961104257

$\mathfrak{d}_{11} = d_9 \times_{11} z_9 - d_8 \times_{10} z_9 =$ 81

$r_9' = r_9 - \mathfrak{d}_{11} = 7 - v^3 - d_9 \times_{11} z_9 =$ 859

$T_{10} = \mathbf{7} X^{-10}$ $d_9 \times_{11} T_{10} =$ 763

$r_{10} = r_9' - d_9 \times_{11} T_{10} = 7 - v^3 - d_9 \times_{11} z_{10} =$ 96

(*) Con: $\}2\{$; $\}29\{$; ... si intendono i prodotti trasversali: $\left\} \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \right\{$; $\left\} \begin{matrix} 29 \\ 92 \end{matrix} \right\{$; ecc.

Abbiamo dal calcolo, posto $z = z_{10}$:

$$7 = v^3 + [3v^2 + (3v + z)\times_9 z]\times_{11} z + 96\,X^{-11}.$$

In conseguenza

$$7 < v^3 + [3v^2 + (3v + z)\times_9 z]\times_{11} (z + X^{-10}).$$

Il prodotto di due numeri è maggiore del loro prodotto graduale: se nel secondo membro poniamo i prodotti ordinari, e inoltre scriviamo anche nel primo prodotto $z + X^{-10}$ in luogo di z, sarà *a fortiori*:

$$7 < v^3 + [3v^2 + (3v + z + X^{-10})\times(z + X^{-10})]\times(z + X^{-10}),$$

ossia

$$7 < (v + z + X^{-10})^3,$$

e perciò

$$\sqrt[3]{7} < v + z + X^{-10}.$$

D'altra parte il prodotto di due numeri, di cui il secondo ha un numero finito di cifre, è minore del prodotto graduale dei numeri stessi aumentato di tante unità dell'ultimo ordine quante ne indica la somma delle cifre del secondo numero; e quindi il prodotto graduale è minore dell'ordinario diminuito della stessa somma:

$$a\times b < a\times_r b + (\Sigma \text{ cifre } b)\,X^{-r}\,; \qquad a\times_r b > a\times b - (\Sigma \text{ cifre } b)\,X^{-r}.$$

Se quindi nell'eguaglianza data dal calcolo sostituisco ai prodotti graduali i prodotti ordinari, avrò

$$7 > v^3 + [3v^2 + (3v + z)\times_9 z]\times z + 96\,X^{-11} - (\Sigma \text{ cifre } z)\,X^{-11}.$$

E poi:

$$7 > v^3 + [3v^2 + (3v + z)\times z - (\Sigma \text{ cifre } z)\,X^{-9}]\times z + 96\,X^{-11} - \\ - (\Sigma \text{ cifre } z)\,X^{-11},$$

ovvero:

$$7 > v^3 + [3v^2 + (3v + z)\times z]\times z + 96\,X^{-11} - \\ - [(\Sigma \text{ cifre } z)\,X^{-9}\times z + (\Sigma \text{ cifre } z)\,X^{-11}].$$

Nel primo prodotto del termine da sottrarre, a z sostituisco $X^{-2} > z$; avrò:

$$7 > (v + z)^3 + 96\, X^{-11} - 2\, (\Sigma \text{ cifre } z)\, X^{-11}.$$

E, poichè Σ cifre $z = 33$, sarà infine

$$7 > (v + z)^3,$$

e quindi $$\sqrt[3]{7} > v + z.$$

Poichè abbiamo trovato

$$v + z < \sqrt[3]{7} < v + z + X^{-10},$$

sarà $V_{10} \sqrt[3]{z} = v + z = 1{\cdot}9129311827$.

Per determinare con 10 cifre decimali la radice cubica di un numero, che suppongo maggiore di 1, il metodo comunemente usato nelle nostre scuole spinge il calcolo a 30 cifre decimali; mentre si sa che, conoscendo n cifre decimali del numero, con altrettante cifre si può determinare la sua radice cubica a meno di una unità dell'ultimo ordine.

Col metodo di " estrazione abbreviata della radice cubica ", spiegato in alcuni libri, trovate colla regola ordinaria 5 cifre decimali della radice, si ottengono le rimanenti dividendo il resto, che ha 15 cifre decimali, per il triplo quadrato della radice trovata; e, poichè si scrive accanto al resto una nuova cifra per ognuna di quelle del quoziente, le cifre decimali introdotte sono 20.

Il calcolo graduale, per giungere alla decima cifra decimale della radice cubica di 7, limita le operazioni a 11 cifre decimali.

Estrarrò come secondo esempio la radice cubica di π (*).

Comincio a calcolarne il valore con 5 cifre decimali, $V_5 \sqrt[3]{\pi}$.

(*) Nel " Bulletin de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux Arts de Belgique ", 1875, tome 40, pag. 137, Houzeau ha calcolato $\sqrt[3]{\pi}$ con 19 cifre decimali. Egli usa il metodo di " estrazione abbreviata ", di cui sopra abbiamo detto, e calcola le parti della radice e le prime cifre dei successivi quozienti e prodotti mediante le tavole dei logaritmi.

Pongo $v = V_2\sqrt[3]{\pi}$, e $v + z = V_5\sqrt[3]{\pi}$; e scrivo $V_6\pi =$ 3·141592
$v = \mathbf{1{\cdot}46}$ $v^3 =$ 3·112136

$3v = 4{\cdot}38$	$d_2 = 3v^2 = 6{\cdot}3948$		$\pi - v^3 = r_2 =$	29456
$T_3 = \mathbf{4}\,X^{-3}$ ㄣ	$P_3(3v, z) =$	16	$d_2 \times_4 T_3 =$	252
	$d_3 =$	4108	$r_3 =$	425
		ㄣ	$\delta_5 =$	44
			$r_3' =$	381
$T_4 = \mathbf{5}\,X^{-4}$ ϛㄣ	$P_4 =$	32	$d_3 \times_5 T_4 =$	320
	$d_4 =$	40	$r_4 =$	616
		ϛㄣ	$\delta_6 =$	21
			$r_4' =$	595
$T_5 = \mathbf{9}\,X^{-5}$			$d_4 \times_6 T_5 =$	576

$$\pi - v^3 - [3v^2 + (3v + z)\times_4 z]\times_6 z = r = \quad 19$$

Qui la somma delle cifre di z vale 18; il suo doppio, 36, supera il resto, 19; quindi non si può conchiudere come prima che tutte le cifre scritte sono giuste. Però se al posto dell'ultima cifra 9 pongo 8, il resto sarà $19 + 64 = 83 > 2\,\Sigma$ cifre z; perciò conchiudo come prima $\pi > (1{\cdot}46458)^3$, e $V_5\sqrt[3]{\pi} \geqq 1{\cdot}46458$; siccome d'altra parte $V_5\sqrt[3]{\pi} \leqq 1{\cdot}46459$, tutte le cifre trovate saranno giuste, salvo l'ultima che forse si deve diminuire di 1 unità.

Volendo risolvere questa ambiguità, basta continuare il calcolo. Troverò $\pi - (1{\cdot}46459)^3$.

Era $3\times 1{\cdot}46^2 + (3\times 1{\cdot}46)\times_4 0{\cdot}00459 =$			6·4140	
Per avere $3\times 1{\cdot}46^2 + (3\times 1{\cdot}46)\times 0{\cdot}00459$				
mancano:	$P_5(3v, z)$	$=$	83	8372
	P_6	$=$	67	67
	P_7	$=$	72	
Avrò $3v^2 + 3v\times z =$			6·4149042	
A questo debbo ancora aggiungere z^2,				
che leggo nelle tavole:	z^2	$=$	210681	
Ottengo $3v^2 + (3v + z)\times z = d =$			6·4149252681	

Il prodotto $d \times_6 0{\cdot}00459$ è già stato calcolato e sottratto da π; occorre togliere ancora i prodotti trasversali di grado superiore al sesto, che disporrò come più sopra a destra:

$$\begin{array}{ll} & 6591190879 \\ & \;\;8157897 \\ & \;\;1 \\ \hline \text{La somma dei prodotti è} & 7506980579\,X^{-15} \end{array}$$

Sottraggo:

$$r = V_{15}\pi - (1{\cdot}46459)^3 = X^{-6}(19{\cdot}653589793 - 7{\cdot}506980579)$$
$$= 0{\cdot}000012146609214$$

Lo stesso resto si può ottenere calcolando direttamente$(1{\cdot}46459)^3$ e sottraendolo da $V_{15}\pi$.

Poichè questo resto è positivo, conchiudiamo: $V_5 \sqrt[3]{\pi} = 1{\cdot}46459$.

Siccome $v + z = 1{\cdot}46459$, calcolo $3(v+z) = 4{\cdot}39377$, e $3(v+z)^2 = 3v^2 + 6vz + 3z^2$.

$$\begin{array}{lcl} \text{Era } 3v^2 + 3vz + z^2 & = & 6{\cdot}4149252681 \\ \text{Aggiungo } 3vz & = & \left\{\begin{array}{l} 162372 \\ 3867 \end{array}\right. \\ \qquad \text{e } 2z^2 & = & 421362 \\ \hline \text{Sarà } 3(v+z)^2 & = & 6{\cdot}4350716043 \end{array}$$

Pongo ora v al posto di $v + z$; chiamo d il nuovo divisore che si va successivamente formando, e il cui primo valore è $3v^2$; e indico con z il numero decimale che segue il nuovo v.

Le differenze δ, di cui negli esempi precedenti, qui si riducono a $P(d, z)$ perchè le cifre che si usano ogni volta non variano più nel seguito. Tutte le altre operazioni procedono come nei detti esempi.

Scrivo dunque $\pi - v^3 = r$; divido per $3v^2, \ldots$; e il calcolo si presenterà nel modo seguente.

$$\pi = 3{\cdot}14159265358979\,3$$
$$v^3 = 1{\cdot}46459^3 = 3{\cdot}141580506980579$$

$r = \pi - v^3 = 12146609214$

$1 \times^{-6}$		643
		5716
	$P_9(z, d) =$	5
$8 \times^{-7}$		5144
		5676
	$P_{10}(z, d) =$	40
$8 \times^{-8}$		5144
		4920
	$P_{11} =$	47
$7 \times^{-9}$		4501
		3729
	$P_{12} =$	100
$5 \times^{-10}$		3215
		4142
	$P_{13} =$	161
$6 \times^{-11}$		3858
		1231
	$P_{14} =$	224
$1 \times^{-12}$		643
		3644
	$P_{15} =$	246
$5 \times^{-13}$		3215
		18323846
	$P_{16} =$	304
$2 \times^{-14}$		1286
		2423
	$P_{17} =$	295
$3 \times^{-15}$		1929

$d = 3v^2 = 6{\cdot}4350716043 \qquad 3v = 4{\cdot}39377$

$P_6(z, 3v) =$	4
	5
$P_7(z, 3v) =$	35
	91
$P_8(z, 3v) =$	65
	75
$P_9(x, 3v) =$	127
	881
$P_{10}(z, 3v) =$	144
	957
$P_{11}(z, 3v) =$	189
	759
$P_{12}(z, 3v+z) =$	201
	791
$P_{13}(z, 3v+z) =$	213
	8123
$P_{14} =$	214
	444
$P_{15} =$	285

$$
\begin{array}{lll}
 & & 1998 \\
 & P_{18} = & 277 \\
2\ X^{-16} & & 1286 \\
\hline
 & & 4354 \\
 & P_{19} = & 269 \\
6\ X^{-17} & & 3858 \\
\hline
 & & 2276 \\
 & P_{20} = & 300 \\
3\ X^{-18} & & 1929 \\
\hline
 & & 4726433 \\
 & P_{21} = & 307 \\
0\ X^{-19} & & 0 \\
\hline
 & & 1656 \\
 & P_{22} = & 317 \\
2\ X^{-20} & & 1286 \\
\hline
 & & 534 \\
 & P_{23} = & 402 \\
0\ X^{-21} & & 0 \\
\hline
 & & 1323 \\
 & P_{24} = & 365 \\
1\ X^{-22} & & 643 \\
\hline
 & & 3153 \\
 & P_{25} = & 375 \\
4\ X^{-23} & & 2572 \\
\hline
 & & 20683279 \\
 & P_{26} = & 400 \\
2\ X^{-24} & & 1286 \\
\hline
 & & 3823 \\
 & P_{27} = & 391 \\
5\ X^{-25} & & 3215 \\
\hline
\end{array}
$$

$$\pi - v^3 - V_{25}\, z \times_{27} d = \quad 217 > (\Sigma \text{ cifre } z) \times 1{\cdot}01$$

$$
\begin{array}{ll}
 & 725 \\
P_{16} = & 285 \\
\hline
 & 535 \\
P_{17} = & 309 \\
\hline
 & 659 \\
P_{18} = & 333 \\
\hline
 & 923 \\
P_{19} = & 296 \\
\hline
 & 526 \\
P_{20} = & 297 \\
\hline
 & 557 \\
P_{21} = & 263 \\
\hline
 & 833 \\
P_{22} = & 285 \\
\hline
 & 615 \\
P_{23} = & 228 \\
\hline
 & 378 \\
P_{24} = & 300 \\
\hline
 & 4080
\end{array}
$$

Il resto dell'operazione è $217\,X^{-27}$; e Σ cifre $V_{25}z = 71$.

L'errore che si commette sostituendo in d il prodotto di grado 24 di $(3v + z)$ per z al prodotto ordinario è minore di $71\,X^{-24}$. Il prodotto di grado 27 di d per z introduce un altro errore, minore di $71X^{-27}$; essendo $z < X^{-5}$, sarà $71X^{-24} \times z < 71X^{-29}$. E quindi l'errore di $V_{25}z \times_{27} d < 71 \cdot 71\,X^{-27} < 217\,X^{-27}$.

In conseguenza tutte le cifre trovate sono cifre esatte di $\sqrt[3]{\pi}$. E si può scrivere:

$$V_{25}\sqrt[3]{\pi} = 1\cdot4645918875615232630201425.$$

Questo valore è stato ottenuto usando nei calcoli 27 cifre decimali.

L'Accademico Segretario
CARLO FABRIZIO PARONA

CLASSI UNITE

Adunanza del 23 Giugno 1918

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. COMM. ANDREA NACCARI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti,

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, i Soci Segre, Peano, Jadanza, Guidi, Parona, Grassi, Fusari, Panetti, Sacco, Majorana;

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche, i Soci Pizzi, De Sanctis, Einaudi, Baudi di Vesme, Schiaparelli, Patetta, Vidari, Prato, Cian, Pacchioni, Valmaggi, e Stampini Segretario della Classe che funge da Segretario delle Classi unite.

Scusa l'assenza il Socio Mattirolo.

Si legge e si approva l'atto verbale della precedente adunanza del giorno 16 corr.

Risolto dalla Accademia un quesito posto a riguardo della votazione fatta nella precedente adunanza del giorno 16 corr., il Presidente invita l'Accademia a votare, mediante schede segrete, per il conferimento del Premio Gautieri per la Letteratura (triennio 1914-1916), il quale viene aggiudicato al Prof. Ettore Bignone, autore dell'opera *Empedocle. Studio critico, traduzione e commento delle testimonianze e dei frammenti.*

Il Presidente dice commosse parole a riguardo del recentissimo lutto che ha colpito la nostra Accademia per la morte del Socio Icilio Guareschi, caduto anzi tempo sulla breccia come un soldato per la Scienza e per la Patria, per la quale

aveva in questi ultimi tempi raddoppiata la già meravigliosa attività scientifica, logorando la salute con immane pertinace lavoro attorno a vari problemi e ricerche relative ai gas asfissianti ed alla alimentazione. Soggiunge che di lui farà speciale commemorazione il Socio Ponzio, e intanto propone che l'Accademia mandi alla famiglia dell'illustre Collega estinto le sue condoglianze. La proposta è approvata alla unanimità.

L'Accademico Segretario legge il seguente telegramma del Generale Diaz in risposta a quello inviatogli dal Presidente a nome dell'Accademia: " Accolgo con animo grato il fidente " auspicio rivolto in quest'ora di ardente fede e di fiera lotta " ai prodi combattenti. Generale Diaz. „

A nome del Socio assente Sforza, l'Accademico Segretario Stampini legge un breve preambolo alla commemorazione, che lo Sforza sta redigendo, dell'insigne storico, già Socio nazionale della nostra Accademia, Pasquale Villari, con l'aggiunta dell'indice di detta commemorazione, la quale sarà stampata negli *Atti*.

Si passa alla votazione per la nomina della Commissione da costituirsi per il Premio Bressa (internazionale), relativo al quadriennio 1915-1918, secondo le norme stabilite dall'art. 1 del Regolamento interno pel conferimento di detto Premio.

La Commissione riesce composta

per la Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali dei Soci Parona, Segre e Grassi;

e per la Classe di Scienze morali, storiche e filologiche dei Soci De Sanctis, Patetta e Stampini.

Gli Accademici Segretari
Carlo Fabrizio Parona
Ettore Stampini

INDICE
DEL VOLUME LIII.

PRESIDENTI della Reale Accademia delle Scienze di Torino dalla sua fondazione . . . . Pag. III
ELENCO degli Accademici residenti, Nazionali non residenti, Stranieri e Corrispondenti al 31 Dicembre 1917 . . . . . „ V
PUBBLICAZIONI periodiche ricevute dall'Accademia dal 1° Gennaio al 31 Dicembre 1917 . . . . „ XXXI
PUBBLICAZIONI ricevute dall'Accademia dal 18 Novembre 1917 al 23 Giugno 1918 . . . . „

ADUNANZE:

Sunti degli Atti verbali delle Classi Unite. . . . . „ 207, 277, 309, 586, 593, 669.
Sunti degli Atti verbali della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali . . . . „ 1, 59, 89, 147, 163, 205, 209, 210, 235, 279, 319, 361, 457, 535, 596.

ELEZIONI:

Elezione del Presidente . . . . „ 207
Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali:
Elezioni di Soci nazionali residenti . . . . . . „ 236
„ di Soci corrispondenti . . . . „ 211 212, 213.

ORDINE del Giorno, presentato dal Socio Mattirolo e approvato dalla Classe che plaude al progetto della Federazione *Pro Montibus* per l'istituzione di un Parco nazionale nell'Abruzzo . „ 210

PREMIO BRESSA:

Lettura della Relazione sulle opere presentate e delle proposte per il XX Premio (1913-1916) . . . . „ 277
Relazione sulle opere o proposte per il XX Premio . . . „ 311
Conferimento del XX Premio . . . . „ 310
Nomina della Commissione per il Premio Bressa pel quadriennio 1915-1918 . . . . „ 470

Premio Gautieri:

Nomina della Commissione per il premio destinato alla Letteratura (triennio 1914-1916) . . . . *Pag.* 60
Avviso del premio destinato alla Filosofia pel triennio 1915-1917 „ 145
Lettura della Relazione della Commissione per il premio riservato alla Letteratura per il triennio 1914-1916 . . „ 587
Conferimento del premio di Letteratura . . . . . „ 669
Relazione della Commissione per il premio riservato alla Letteratura (triennio 1914-1916) . . . . „ 588

Premio Morelli:

Nomina della Commissione esaminatrice dei lavori presentati dai concorrenti . . . . „ 278
Lettura della Relazione sul concorso al premio . . . „ 587

Premio Vallauri:

Elezione di un Socio per integrare la Commissione . . „ 458

Albenga (G.). — Eletto Socio corrispondente . . . . . „ 311
— Ringrazia per la sua nomina . . . . „ 279
Albertoni (P.). — Eletto Socio corrispondente . . . . . „ 212
— Ringrazia per la sua nomina . . . . „ 279
Angeli (A.). — Eletto Socio corrispondente . . . . . „ 212
— Ringrazia per la sua nomina . . . . „ 319
Artini (E.). — Eletto Socio corrispondente . . . . . „ 212
— Ringrazia per la sua nomina . . . . „ 279
Berzolari (L.). — Eletto Socio corrispondente . . . . . „ 311
— Ringrazia per la sua nomina . . . . „ 279
Bignone (Ettore). — Gli è conferito il premio Gautieri riservato alla Letteratura (triennio 1914-1916) . . . . „ 669
Blaserna (Pietro). Vedi D'Ovidio (E.).
Boselli (Paolo) — Parole pronunziate in occasione dell'elezione del Socio Naccari a Presidente dell'Accademia . . . . . „ 310
Bottasso (Matteo). — Generalizzazione della trasformazione di Combescure per le curve . . . . „ 419
Boverio (Ernesto). — Sopra la derivazione dei canali . . . „ 104
Bovero (Alfonso). — Eletto Socio corrispondente . . . . „ 212
— Ringrazia per la sua nomina . . . . „ 535
Bower (F. O.). — Eletto Socio corrispondente . . . . . „ 212
— Ringrazia per la sua nomina . . . . „ 319
Brugnatelli (L.). — Eletto Socio corrispondente . . . . „ 212
— Ringrazia per la sua nomina . . . . „ 279
Burali-Forti (C.). — Alcuni sistemi di linee su di una superficie „ 91
— Linea in ogni cui punto è assegnata una direzione invariabilmente collegata al triedro principale . . . . „ 213
Burzio (Filippo). — Sopra alcune formole del Mayevski relative al 2° problema balistico fondamentale . . . . „ 335
— La 2ª approssimazione della soluzione del 2° Problema balistico „ 578

CAMERANO (Famiglia). — Ringrazia per le condoglianze inviatele *Pag.* 90
— (Lorenzo). Vedi CHIRONI (G.).
CAMPETTI (Adolfo). — Conducibilità ed assorbimento dei vapori di sodio (parte I-II) 297, 340
CARLE (Famiglia). — Ringrazia per le condoglianze pervenutele pel lutto che l'ha colpita . . . . „ 89
— (Giuseppe). Vedi D'OVIDIO (E.), CHIRONI (G.).
CHIANTORE (Giuseppina). — Sulla struttura della tasca faringea di " Helobdella stagnalis „ L. (con 1 tavola) . . . . . „ 281
CHIARUGI (G.). — Eletto Socio corrispondente . . . . . „ 212
— Ringrazia per la sua nomina . . . . „ 319
CHIRONI (Giampietro). — Rileva con parole di plauso l'alto significato dell'elezione a Presidente dell'Accademia del Socio Naccari „ 208
— Con parole di vivo compianto comunica alla Classe la morte del Socio Antonio Manno, ricordandone brevemente le insigni benemerenze scientifiche . . . . „ 277
COLONNETTI (Gustavo). — Un singolare esempio di lesioni in un anello di acciaio temprato (con 1 tavola) . . . . . . „ 55
— e Pozzo (Alberto). — Le proprietà magnetiche degli acciai e la loro utilizzazione nel collaudo dei proietti (con due Tavole) „ 225
— Eletto Socio corrispondente . . . . „ 211
— Ringrazia per la sua nomina . . . . „ 279
CORBINO (O. M.). — Eletto Socio corrispondente . . . . . „ 211
— Ringrazia per la sua nomina . . . . „ 279
DAL PIAZ (G.). — Eletto Socio corrispondente . . . . . „ 212
— Ringrazia per la sua nomina . . . . „ 279
DE STEFANI (C.). — Eletto Socio corrispondente . . . . „ 212
— Ringrazia per la sua nomina . . . . „ 279
DE TONI (G. B.). — Eletto Socio corrispondente . . . . „ 212
— Ringrazia per la sua nomina . . . . „ 279
DE VRIES (Hugo). — Eletto Socio corrispondente . . . . „ 205
— Ringrazia per la sua nomina . . . . „ 319
— Vedi MATTIROLO (O.).
D'OVIDIO (Enrico). — Parole pronunziate annunziando la morte del Socio residente G. Carle, del Socio corrispondente G. Veronese, del Socio straniero F. R. Helmert e dà notizia della infermità del Presidente L. Camerano . . . . „ 1
— Comunica la morte del Socio corrispondente Pietro Blaserna „ 235
— Comunica i ringraziamenti del Socio V. Volterra per le congratulazioni della Classe per la sua nomina a Socio straniero dell'Istituto di Francia . . . . „ 235
EINAUDI (Luigi). — Esposizione finanziaria dell'esercizio del 1917 e bilancio preventivo in corso. Gestione delle eredità Bressa, Gautieri, Pollini e Vallauri . . . . „ 310
FOÀ (Pio). Vedi MATTIROLO (O.).
FRISONE (Rosetta). — Le varie definizioni di prodotto . . . „ 246

Fubini (Guido). — Fondamenti della Geometria proiettivo-differenziale di una superficie . . . . Pag. 622
Gerbaldi (F.). — Simmetria e periodicità nelle frazioni continue di Halphen (Note I-II) . . . . „ 459
Grassi (G. B.). — Eletto Socio corrispondente . . . . . „ 212
— Ringrazia per la sua nomina . . . . „ 279
Grassi (Guido). — A proposito di due Note del Prof. Guglielmo: "Sulla legge di Poisson e sull'esperienza di Clément e Desormes " „ 74
Guareschi (I.). — I leucoderivati solfitici del triaminotrifenilmetano quali reattivi dell'alcalinità e della dissociazione dei sali (Comunicazione I) . . . . „ 237
— Gli anelli-vortici di Tait e il solfo colloidale. Con esperienze di lezione . . . . „ 321
— Nuovi acidi ββ dialchilglutarici (Nota II) . . . . . „ 523
— Ricerche sull'acqua di cristallizzazione composti con $2H^2O$ e con $3H^2O$ (Nota IV) . . . . „ 551
— Presenta in omaggio un suo lavoro intitolato: *Frumento, pane, notizie storiche e critiche di chimica alimentare e bromotologica* riassumendo i risultati del lavoro stesso . . . . . „ 3
— Ricorda che nel corrente anno si compie il centenario della nascita dei chimici Francesco Selmi e Adolfo Vurtz e ne parla „ 60
— Propone, e la Classe fa sua la proposta, d'inviare al Socio nazionale V. Volterra congratulazioni per la sua nomina a Socio straniero dell'Accademia delle scienze di Francia . . „ 210
— Offre in dono una sua memoria stampata che ha per titolo: *Sulla più razionale utilizzazione dei cereali con esperienze ed osservazioni sulla alimentazione col riso sbramato o naturale*, ecc.. . „ 280
— Offre i ritratti del fisico O. F. Mossotti, che fu Socio dell'Accademia, e di D. Guglielmini . . . . „ 280
Guidi (Camillo). — Sulle deformazioni delle dighe a volta . „ 37
— Sul calcolo dell'arco elastico senza cerniere . . . . . „ 129
Helmert (Federico Roberto). Vedi D'Ovidio (E.).
Issoglio (Giovanni). — La composizione chimica del riso naturale e del riso brillato italiano (Nota I) . . . . „ 433
Jadanza (Nicodemo). — Cenni necrologici su Paolo Pizzetti . „ 363
— Determinazione Geodetica del Castello di Trana e del Campanile del Comune . . . . „ 379
Lagneau. — Logique des propositions . . . . „ 254
Laura (Ernesto). — Sopra i moti quasi-liberi di un fluido elastico „ 608
Le Chatelier (E. L.). — Eletto Socio corrispondente . . „ 212
Lombardi (L.). — Eletto Socio corrispondente . . . . . „ 211
— Ringrazia per la sua nomina . . . . „ 279
Maggi (G. A.). — Eletto Socio corrispondente . . . . . „ 211
— Ringrazia per la sua nomina . . . . „ 279
Maggi (Gian Antonio) Socio corrispondente. — Presenta in omaggio all'Accademia due sue opere, cioè *Geometria dei Sistemi* e *Geometria del Movimento* . . . . „ 596

Majorana (Quirino). — Influenza del movimento di uno specchio o della sorgente sulla propagazione della luce . . . *Pag.* 485
— Eletto Socio nazionale residente . . . . „ 236
— Ringrazia per la sua nomina . . . . „ 458
Manno (Antonio). Vedi Chironi (G.).
Marcolongo (R.). — Eletto Socio corrispondente . . . . „ 211
Marconi (G.). — Eletto Socio corrispondente . . . . . „ 211
— Ringrazia per la sua nomina . . . . „ 279
Mattirolo (Oreste). — Contributo allo studio della *Monilia sitophila* (Mont.) Sacc. . . . . „ 615
— Presenta due sue pubblicazioni, una col titolo: *Come la Città di Torino onora i botanici piemontesi*, e ne discorre; alle proposte sue si associa il Socio Senatore P. Foà . . . . . „ 60
— Onoranze al Prof. Hugo De Vries dell'Università di Amsterdam „ 99
— Legge l'indirizzo che sarà trasmesso al Prof. Hugo de Vries „ 205
— Propone e la Classe approva un Ordine del Giorno di plauso alla Federazione *Pro Montibus*, iniziatrice del progetto del Parco Nazionale nell'Abruzzo . . . . „ 210
— Offre in omaggio uno Studio fatto col Dr. Issoglio intorno ad una specie di pane . . . . „ 280
Mori Breda (Gilda). — Estrazione graduale della radice quadrata „ 165
Moschetti (Lorenzo). — Sulla probabile identità della *peganite* con la *variscite* . . . . „ 652
Naccari (A.). — Eletto Presidente dell'Accademia . . . . „ 207
— Presiedendo per la prima volta l'Accademia a Classi unite ringrazia per l'onore tributatogli nominandolo Presidente . . „ 309
— Con commosse parole ricorda il lutto che colpì l'Accademia colla morte del Socio I. Guareschi . . . . „ 669
Nasini (R.). — Eletto Socio corrispondente . . . . . „ 212
— Ringrazia per la sua nomina . . . . „ 279
Orsi (Paolo). — Gli è conferito il XX Premio Bressa (1913-1916) „ 310
— Ringrazia pel conferitogli premio . . . . „ 361
Palazzo (L.). — Eletto Socio corrispondente . . . . . „ 211
— Ringrazia per la sua nomina . . . . „ 279
Parona (C. F.). — Offre la Necrologia del Presidente Camerano pubblicata nella “ Rivista del Club Alpino Italiano „ . . . „ 320
— Ragguagli sopra gli ossami fossili trovati in una tomba presso Anteopolis (Monti di Gau, Alto Egitto) . . . . . „ 511
— Eletto a far parte della Commissione per il premio Vallauri per il quadriennio 1915-1918 . . . . „ 458
Peano (Giuseppe). — Interpolazione nelle tavole numeriche . „ 395
Pensa (Angelo). — Su alcune omografie speciali e sugli operatori omografici C, R . . . . „ 23
— Sull'operatore omografico R' . . . . „ 63
Pincherle (Salvatore). — Sulle catene di radicali quadratici . „ 447
— Eletto Socio corrispondente . . . . „ 211
— Ringrazia per la sua nomina . . . . „ 279

PIROTTA (Romualdo). — Espone nella sua pubblicazione *Il Parco Nazionale dell'Abruzzo* l'importanza del progetto d'iniziativa della Federazione *Pro Montibus* . . . . *Pag.* 209
PIUTTI (A.). — Eletto Socio corrispondente . . . . . „ 212
— Ringrazia per la sua nomina. . . . . „ 319
PONZIO (G.). — Eletto Socio nazionale residente . . . . „ 236
— Ringrazia per la sua nomina. . . . . „ 361
— Incaricato di commemorare il Socio I. Guareschi . . „ 670
QUARRA (Paolina). — Calcolo delle parentesi . . . . . „ 634
REINA (V.). — Eletto Socio corrispondente. . . . . . „ 211
— Ringrazia per la sua nomina. . . . . „ 361
RICCI-CURBASTRO (G.). — Eletto Socio corrispondente. . . „ 211
— Ringrazia per la sua nomina. . . . . „ 279
ROSA (D.). — Eletto Socio corrispondente. . . . . . „ 212
— Ringrazia per la sua nomina. . . . . „ 279
— Incaricato dalla Classe di commemorare il compianto Socio Presidente Senatore Prof. L. Camerano . . . . . . „ 320
ROSATI (Carlo). — Sulle valenze delle corrispondenze algebriche fra i punti di una curva algebrica . . . . „ 5
ROSSI (A. G.). — Un trasformatore dinamico per correnti alternate (Note IV-V) 135, 287
SACCO (Federico). — Il glacialismo antico e moderno del Cervino (Note I-II, con due tavole) 536, 638
— Eletto Socio nazionale residente . . . . „ 236
— Ringrazia per la sua nomina. . . . . „ 361
SANNIA (Gustavo). — Le serie di potenze di una variabile sommate col metodo di Borel generalizzato (Note I-II) . . . 115, 148
SCORZA (Gaetano). — Sopra alcune notevoli matrici riemanniane „ 598
SEGRE (Corrado). — Commemora brevemente il collega G. Veronese, Socio corrispondente . . . . „ 2
— Comunica che l'Istituzione Morelli in Bergamo ha trasmesso i lavori scientifici per il Concorso del 1917, l'esame dei quali spetta in quest'anno all'Accademia . . . . . . „ 163
SEVERI (F.). — Eletto Socio corrispondente . . . . . „ 211
SOMIGLIANA (C.). — Sulle onde di Rayleigh . . . . . „ 321
— Presenta il 1° volume delle opere di A. Volta, pubblicazione intrapresa sotto gli auspici del Reale Istituto Lombardo e della Reale Accademia dei Lincei, e accenna anche alla partecipazione dell'Accademia per la collaborazione speciale del collega Naccari che fu il consulente scientifico nella scelta degli scritti inediti „ 2
— Riferendosi a quanto disse nell'adunanza del 18 novembre 1917 fa omaggio di un esemplare del 1° vol. delle opere di A. Volta „ 235
STAMPINI (Ettore). — Comunica una Circolare della Società botanica italiana che fa voto perchè il Governo disciplini con opportune norme la posizione giuridica degli insegnanti di nazionalità straniera in confronto a quella dei docenti italiani . . . „ 586
— Dà lettura di una lettera del Dr. G. Carbonelli che accompagna

il dono all'Accademia di " una raccolta di opuscoli e trattati riguardanti le scienze mediche " . . . . *Pag.* 586
Stampini (Ettore). — Ordine del giorno approvato unanimente dall'Accademia di calda ammirazione e fede all'Esercito e alla Marina d'Italia . . . . „ 593
— Comunica gli inviti fatti per assistere alla commemorazione di Arturo Graf . . . . „ 594
— Legge una lettera del Socio nazionale non residente G. Fraccaroli che si scusa di non poter intervenire all'adunanza del conferimento del premio Gautieri . . . . „ 594
Straneo (Paolo). — Relazioni generali fra teorie fisiche e costanti universali . . . . „ 185
Tanturri (Alberto). — Sui prodotti infiniti $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots$ e $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\ldots$ . . . . „ 477
Vercelli (Francesco). — Sul valore meccanico e fisico delle differenze e delle tendenze barometriche . . . . . . „ 177
Veronese (Giuseppe). Vedi D'Ovidio (E.), Segre (C.).
Vialleton (L.). — Eletto Socio corrispondente . . . . . „ 212
— Ringrazia per la sua nomina . . . . „ 279
Viriglio (Luisa). — Estrazione graduale di radice cubica . „ 657
Volterra (V.). — Ringrazia per le congratulazioni espressegli dalla Classe per la sua nomina a Socio straniero dell'Accademia delle Scienze di Francia . . . . „ 235
Zambonini (F.). — Sulla identità della spangite con la phillipsite (con 1 tavola) . . . . „ 47
— Leucite pseudomorfa di nefelite di Parco Chigi, presso Ariccia, nei Monti Albani . . . . „ 271
Indice del volume LIII . . . . „ 671

Dal 23 Giugno al 25 Novembre 1917.

Biadego (G.). Gian-Luigi Panighetti. Verona, 1917; 8° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

Boselli (P.). La Patria negli scritti e nei discorsi. Firenze, 1917. 1 vol. 8° (*Dono della Società nazionale " Dante Alighieri "*).

Blocco (Il) economico degli Alleati contro gli Imperi centrali. Giugno 1917 (*Dal Comando Supremo dell'Esercito. Servizio informazioni*).

Cesari (A.). Ragione del bello poetico, illustrata con esempi singolarmente di Dante. Dialogo. Reggio Emilia, 1917; 1 vol. 8° (*Dono della Tipografia Edit., Collezione Storico-Letteraria*).

Cian (V.). Bibliografia 1883-1913. Pavia; 8° (*dall'A. Socio nazionale residente dell'Accademia*).

Corpus Scriptorum Latinorum Paravianum:

Ciceronis (M. T.) Pro Milone — Pro Archia. Recensuit, praefatus est, appendice critica et indicibus instruxit Sixtus Colombo.

Taciti (Cornelii) Dialogus de oratoribus. Recensuit, praefatus est, appendice critica et indicibus instruxit Fridericus Carolus Wick. Vol. 10° (*Dono della Ditta G. B. Paravia e C.*).

Del Lungo (I.). Per la nuova autentica edizione della " Storia d'Italia " di Francesco Guicciardini. Roma, 1917; 8° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

Donati (G.). La Psicologia scientifica. Saggio costruttivo. Forlì, 1917; 8° (*dall'A.*).

** **Muratori** (L. A.). Rerum italicarum scriptores. Fascicoli 151–154.

Nallino (C. A.). Appunti sulla natura del " Califfato " in genere e sul presunto " Califfato ottomano ". Roma, 1917 (*dall'A.*).

Pascal (C.). Per la risurrezione del Latino come lingua scientifica internazionale. Milano, 1917; 8° (*dall'A.*).

Rasi (P.). I carmi latini di Giovanni Pascoli. Padova, 1917; 8° (*dall'A.*).

Sforza (G.). Uno storico del Risorgimento italiano. Nicomede Bianchi. Roma, 1917; 8° (*dall'A. Socio nazionale residente dell'Accademia*).

— Le trame di Enrico Misley e di Francesco IV. Roma, 1917; 8° (*id.*).

** **Treitschke** (H. v.). History of Germany in the 19th Century. Vol. III. London, 1917; 8°.

Dal 18 Novembre 1917 al 24 Febbraio 1918.

Amar (J.). Organisation physiologique du travail. Préface de H. Le Chatelier. Paris, 1917; 8° (*dall'A.*).

Berlese (A.). Su una nuova specie di Trombidide. Firenze, 1918; 8° (*dall'A.*).

Biazzi (F.). Cenni sulla teoria del navigare presso gli antichi. Intra, 1913; 8° (*dall'A.*).

— Timoni plurimi sulle barche fluvio-lacuali del Lago Maggiore. Milano, 1914; 8° (*id.*).

Boccardi (G.). Previsioni astronomiche a lontana scadenza. Torino, 1917; 8° (*dall'A.*).
— A proposito di Tavole di logaritmi. S. l. a.; 8° (*id.*).
** **Brehm** (A. E.). La vita degli animali. Torino, 1893-1907; 10 vol. 4°.
Crivelli (E.). Sulla origine inorganica o sintetica del Litantrace. Torino, 1917; 4° (*dall'A.*).
— Pietre preziose degli antichi. Torino, 1917; 1916 (*id.*).
Guareschi (I.). Frumento e pane. Notizie storiche e critiche di chimica alimentare o bromatologica. Torino, 1917; 4° (*dall'A. Socio nazionale residente dell'Accademia*).
— Sul riso nella chimica dell'alimentazione. Torino, 1917; 8° (*id.*).
— Osservazioni intorno ad alcuni problemi riguardanti i progressi della nostra agricoltura. Torino, 1918; 8° (*id.*).
Guidi (C.). Grandes Voûtes, par Paul Séjourné. Bibliografia. Torino, 1917; 8° (*dall'A. Socio nazionale residente dell'Accademia*).
Issel (A.). Le selci enigmatiche di Breonio. Genova, 1917; 8° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).
Mattirolo (O.). Come la Città di Torino onora i botanici piemontesi. Firenze, 1917; 8° (*dall'A. Socio nazionale residente dell'Accademia*).
— Sulla natura della colorazione rosea della calce dei muri vetusti e sui vegetali inferiori che danneggiano i monumenti e le opere d'arte. Como, 1917; 8° (*id.*).
Musiacco (A.). L'ingrandimento degli astri verso l'orizzonte ed una insospettata funzione della retina oculare umana. Lecce, 1917; 8° (*dall'A. per il premio Vallauri per le scienze fisiche, quadriennio 1915-1918*).
— La materia raggiante nella formazione delle nebulose. Lecce, 8° (*id. id.*).
Oberholser (H. C.). A review of the subspecies of the Leach Petrel, Oceanodroma Leucorhoa (Vieillot). Washington, 1917; 8° (*dall'A.*).
Panetti (M.). Un apparecchio per la misura simultanea della spinta e della potenza dei gruppi moto-propulsori nel Laboratorio di aeronautica del R. Politecnico di Torino. Roma, 1917; 8° (*dall'A. Socio nazionale residente dell'Accademia*).
Pirotta (R.). Il Parco Nazionale dell'Abruzzo. Roma, 1917; 8° (*dall'A. Socio nazionale non residente dell'Accademia*).
Pottier (J.). Sur la dissymétrie de structure de la feuille du *Mnium spinosum* (Voit.) Schwagr. Berne, 1917; 8° (*dall'A.*).
Revelli (P.). Il viaggio in Oriente di Vitaliano Donati (1759-1762). Ricerche e studi. Roma, 1894-1896; 8° (*dall'A.*).
— Il lago di Co' di Lago (Dévero; Ossola). Firenze, 1908; 8° (*id.*).
— Saggio di bibliografia geografica siciliana. La contea di Mòdica. Torino, 1910; 8° (*id.*).
— Il Trattato della Marea di Jacopo Dondi. Firenze, 1911; 8° (*id.*).
— Le fronti di 7 ghiacciai del versante italiano del Monte Bianco nel 1910. Torino, 1911; 8° (*id.*).
— Id., id. Torino, 1912; 8° (*id.*).
— Fronti glaciali della Valpellina (Val d'Aosta) 1912-1916. Roma, 1917; 8° (*id.*).

Teixeira (F. G.). Duas allocuções lidas no Congresso de Sevilha. Coimbre, 1917; 8° (*dall'A.*).

— Obras sobre mathematica, vol. VI-VII. Coimbre, 1912-1915; 2 vol. 4° (*id.*).

Dal 25 Novembre 1917 al 3 Marzo 1918.

Annali bibliografici e catalogo ragionato delle edizioni di Barbèra, Bianchi e Comp. di G. Barbèra (1854-1880). Addenda e Corrigenda. Firenze, G. Barbèra editore, MCMXVIII; 4° (*dono della Ditta editrice*).

** **Bignone** (E.). I poeti filosofi della Grecia. Empedocle. Studio critico. Torino, Fratelli Bocca, 1916; 8° (*acquistato dalla Commissione per il premio Gautieri per la Letteratura 1915-1916*).

Billia (M.). Sulle più riposte armonie fra l'economia e la morale. Firenze, 1916 (*dall'A.*).

— L'uno e i molti, l'illimitato e il limitato. Genova, 1916; 8° (*id.*).

** **Cabrol** et **Leclercq**. Dictionnaire d'archéologie chrétienne et de liturgie. Fasc. 1-37. Paris, 1908-1916; 8°.

Callegari (E.). Il pensiero religioso nell'età dei Severi. Firenze, 1918; 8° (*dall'A.*).

Capis (G.). Memorie della Corte di Mattarella o sia del Borgo di Duomo D'Ossola, di G. C., ripubblicate a cura del Prof. Guido Bustico. Novara, 1918; 8° (*dal Prof. G. Bustico per il premio Pollini*).

Cessi (R.). Nota per la storia delle Società di commercio nel medio evo in Italia. Roma, 1917; 8° (*dall'A.*).

Cocito (F.). Commento alla legge degli infortuni sul lavoro. Testo unico 31 gennaio 1904, n. 51, e Regolamento 13 marzo 1904, n. 141. 3ª edizione riveduta e messa a giorno dall'Avv. Gino Olivetti. Torino, Unione Tip. Ed. Torinese, 1918; 1 vol. 8° (*dono del sig. Avv. G. Olivetti*).

Corpus scriptorum latinorum: [*P. Vergili Maronis*] Catalepton (Priapea et Epigrammata) Maecenas Priapeum " Quid hoc novi est „. Recensuit, praefatus est, appendicem criticam et indicem verborum addidit Rem Sabbadini. Augustae Taurinorum, 1917; 8° (*dono della Ditta G. B. Paravia e Comp.*).

— *P. Ovidii Nasonis* Tristia. Recensuit, praefatus est, brevi appendice critica instruxit Carolus Landi. Augustae Taurinorum, 1917; 8° (*id.*).

— L. Annaei Senecae Thyestes-Phaedra. Recensuit, praefatus est, appendicem criticam addidit Humbertus Moricca. Augustae Taurinorum, 1 vol. 8°.

Della Giacoma (F.). Precursori della Croce rossa. Torino, 1916; 8° (*dall'A.*).

** **De Sanctis** (G.). Storia dei Romani. Torino, 1907-1917; 4 vol. 8°.

Drei (G.). La politica di Pio IV e del cardinale Ercole Gonzaga (1559-1560). Roma, 1917; 8° (*dall'A.*).

Donati (G.). La morale. Forlì, 1918; 8° (*dall'A.*).

** **Farinelli** (A.). La vita è un sogno. Torino, 1916; 2 vol. 8° (*acquistato dalla Commissione per il premio Gautieri per la Letteratura 1914-1916*).

Lugaro (E.). La Psichiatria tedesca nella storia e nell'attualità. Firenze, 1917; 8°.

Memoria (In) dei fratelli Ferruccio e Enrico Salvioni nel primo anniversario della loro morte. Milano, 1917; 8° (*dal Socio corrispondente dell'Accademia Carlo Salvioni*).

Omaggio (L') della dottrina e della coltura italiana alla Memoria di Igino Petrone per l'inaugurazione del suo monumento in Limosano. Campobasso, 1917; 8° (*dono dell'arciprete Prof. Silvio Petrone col Comitato*).

** **Orsi** (P.). Gli ultimi cento anni di Storia Universale, vol. II. Torino, 1917; 16°.

Osier (J.). Pierre II de Savoie le Petit-Charlemagne (1203-1268) et le droit de succession à la couronne en Savoie du XII[e] au XIV[e] siècle. Paris, 1917; 8° (*dall'A.*).

Piccoli (V.). Estetica di Vincenzo Gioberti. Milano, 1917; 8° (*dall'A. per il premio Gautieri per la Filosofia*).

Sforza (G.). Muǵâhid (Il re Mugetto de' cronisti italiani) e la sua scorreria contro la città di Luni. Torino, 1917; 8° (*dall'A. Socio nazionale residente dell'Accademia*).

— Silvio Pellico a Venezia (1820-1822). Venezia, 1917; 8° (*id.*).

Stampini (E.). Per onorare Paolo Boselli. Bergamo, Officina arti grafiche, 1917; 4° (*dall'A. Socio nazionale residente dell'Accademia*).

— *Lucretiana*. V. Torino, 1917. Estratto dalla " Rivista di Filologia e di Istruzione classica „ (*id.*).

** **Treitschke's** History of Germany in the nineteenth Century, translated by Eden & Cedar Paul, with an Introduction by William Harbutt Dawson. Vol. Four. London, 1918; 8°.

Vidari (G.). Giuseppe Mazzini e l'ora presente. Torino, 1918; 8° (*dall'A. Socio nazionale residente dell'Accademia*).

Zanobini (G.). La pubblicazione delle leggi nel diritto italiano. Torino, 1917; 8° (*dall'A.*).

Zocco-Rosa (A.). Rassegna sintetica di studi monografici, III. Roma, 1917; 8° (*dall'A.*).

— Ai suoi gloriosi caduti per la patria. Discorso commemorativo. Catania, 1917; 8° (*id.*).

Dal 24 Febbraio al 16 Giugno 1918.

Berlese (A.). Centuria quarta di Acari nuovi. Firenze, 1918; 8° (*dall'A.*).

Bovero (A.). Per uno scomparso di ieri: Lorenzo Camerano. S. Paolo (Brasile), 1918; 16° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

De Toni (G. B.). Contributo alla conoscenza delle relazioni del patrizio veneziano Pietro Antonio Michiel con Ulisse Aldrovandi. Modena, 1908; 8° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

— Catalogo delle Alghe raccolte a Punta Licosa e in Sardegna. Pavia, 1915; 8° (*id.*).

De Toni (G. B.). Osservazioni sulla costituzione dei cistoliti del *Ficus elastica* Roxb. Venezia, 1915; 8° (*dall'A. Socio corrisp. dell'Accademia*).

— La flora marina dell'isola d'Elba e i contributi di Vittoria Altoviti-Avila Toscanelli. Padova, 1916; 8° (*id.*).

— Annotazioni di Floristica marina. Venezia, 1917; 8° (*id.*).

— *Schizostoma montellicum* Sacc. Venezia, 1915; 8° (*id.*).

— e **Forti** (Achille). Seconda contribuzione alla flora algologica della Libia italiana. Venezia, 1914 (*id.*).

— — Catalogo delle Alghe raccolte nella regione di Bengasi dal R. P. D. Vito Zanon. Venezia, 1916; 8° (*id.*).

Enriques e **Chisini**. Teoria geometrica delle equazioni. Vol. 2°. Bologna (*dagli AA.*).

Guareschi (I.). Sulla più razionale utilizzazione dei cereali, con esperienze ed osservazioni sulla alimentazione col riso sbramato o naturale e a diversi gradi di depauperamento o brillatura. Torino, 1918; 8° (*dall'A. Socio naz. residente dell'Accademia*).

— Di alcuni errori sulla localizzazione dei composti chimici nei semi di frumento e di riso e sul cosidetto aleurone. Torino, 1918; 8° (*id.*).

Guidi (C.). Sulla sicurezza delle dighe di sbarramento. Torino, 1918; 8° (*dall'A. Socio nazionale residente dell'Accademia*).

— Sulle dighe a volta. Nota II, III. Roma, 1918; 8° (*id.*).

Lacroix (A.). Les gisements de l'or dans les colonies françaises. Paris, 1918; 8° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

Mascart (J.). Remarques sur l'hiver de 1917. Lyon, 1918; 8° (*dall'A.*).

Mattirolo (O.). I bulbi del *Muscari comosum* Mill. (Cipollaccio col fiocco) proposti come alimento anche alle popolazioni dell'Italia settentrionale. Torino, 1918; 8° (*dall'A. Socio nazionale residente dell'Accademia*).

— e **Issoglio** (G.). Ricerche analitiche sopra un pane preparato colla pasta di frumento. Torino, 1918; 8° (*dagli AA.*).

Morandi (L.). Frencuencia, cantidad y modalidades de la lluvia y del granizo en Villa Cólon (Montevideo) en el período 1884-1914. Washington, 1917; 8° (*dall'A.*).

Parona (C. F.). Il Prof. Senatore Lorenzo Camerano. Necrologia. Torino, 1918; 8° (*dall'A. Socio nazionale residente dell'Accademia*).

Sacco (F.). Prof. Carlo Bruno. Roma, 1916; 8° (*dall'A. Socio nazionale residente dell'Accademia*).

— La pianura di Alessandria. Torino, 1917; 8° (*id.*).

— L'evoluzione del fiume Tanaro durante l'êra quaternaria. Pavia, 1917; 8° (*id.*).

— Il Ghiacciaio ed i Laghi del Ruitor. Roma, 1917; 8° (*id.*).

— Conte Luigi di Rovasenda. Roma, 1918; 8° (*id.*).

Teodoro (G.). Il ciclo di sviluppo dell'*Akamushi*, secondo le ricerche dei giapponesi Miyajima e Okumura. Firenze, 1918; 8° (*dall'A.*).

Volta (A.) - (Le opere di). Edizione nazionale. Vol. I; 1918 (*Dono della Commissione*).

Dal 3 Marzo al 23 Giugno 1918.

Aliotta (A.). La guerra eterna e il dramma dell'esistenza. Napoli (senza data); 8° (*dall'A. per il premio Gautieri di Filosofia, triennio 1915-17*).

— Il nuovo realismo in Inghilterra e in America. Prato, 1915; 8° (*id.*).

— Il pluralismo contemporaneo. Prato, 1917; 8° (*id.*).

— Il principio d'identità nella filosofia del Corleo. Roma, 1917; 8° (*id.*).

— Verso il nuovo realismo. Roma, 1915; 8° (*id.*).

— La vita del pensiero. Corso di filosofia ad uso dei Licei. Parte I. Psicologia della conoscenza (*id.*).

Biadego (G). Pasquale Villari. Verona-Ostiglia, 1918; 8° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

Carbonelli (G.) e **Ravasini** (R.). Commenti sopra alcune miniature e pitture italiane a soggetto medico. Roma, 1918; 4° (*Dono del Dott. G. Carbonelli*).

Casanova (E.). Antonio Manno. Roma, 1918; 8° (*dall'A.*).

Cerrato (L.). Le Odi di Pindaro, testo e versione. Sestri Ponente, 1915-18; 3 parti in 8° (*dall'A.*).

Coreni (T.). Lo spiritismo in senso cristiano. Torino, 1889; 8° (*dono della signora Eugenia Ingaramo-Dalmazzo*).

Corpus scriptorum latinorum Paravianum (T. Macci Plauti), Captivi, recensuit, praefatus est, appendicem criticam et testimonia adiecit Carolus Pascal. Aug. Taurinorum; 8° (*dono della Ditta G. B. Paravia e C.*).

Edgar (C. C.). On the dating of early Ptolemaic Papyri (*dono del Professore E. Schiaparelli socio nazionale residente dell'Accademia*).

Ferroglio (G.). Il crimine tedesco nell'epoca di Roma imperiale. Roma, 1917; 8° (*dall'A.*).

Gonella (E.). Relazione sull'amministrazione della giustizia nel distretto della Corte d'Appello di Torino esposta nell'Assemblea generale del 10 gennaio 1918. Saluzzo, 1918; 8° (*dall'A.*).

Montalcini (C.). Prefazione ai Discorsi parlamentari di Ruggero Bonghi pubblicati per deliberazione della Camera dei Depuati. Roma, 1918; 8° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

** **Muratori** (L. A.). Rerum italicarum Scriptores. Fasc. 155, T. XV, P. IV; Fasc. 156, T. III, P. I; Fasc. 157-158, T. XXXIV, P. I; Fasc. 159, T. XV, P. V; Fasc. 160, T. XV, P. I.

— Archivio Muratoriano, NN. 19-20.

Stampini (E.). Curiosità Alliane. I. Duo... amantes. II. infamis. Torino, 1918; 8° (*dall'A. Socio nazionale residente dell'Accademia*).

Vidari (G.). Elementi di Pedagogia. II. La teoria della educazione. Milano, 1918; 1 vol. 24° (*dall'A. Socio nazionale residente dell'Accademia*).

Zanobini (I.). I poteri regi nel campo del diritto privato. Torino, 1917; 1 vol. 8° (*dall'A.*).

Fig.3

Fig.4

Fig.6

Fig. 1

Fig. 2

Fig. 3

Fig. 4

Fig. 5

Fig. 6

Fig. 7

Fig. 8

ELIOT. CALZOLARI & FERRARIO-MILANO

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona. Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di C. Frati, A. Baudi di Vesme e C. Cipolla.

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in-f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di C. Cipolla, G. De Sanctis e P. Fedele.

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in-4° di 70 pagg. e 96 tav.

SOMMARIO

Classi Unite.

Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza del 16 Giugno 1918 . *Pag.* 593

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza del 16 Giugno 1918 . *Pag.* 596
Scorza (Gaetano). — Sopra alcune notevoli matrici riemanniane „ 598
Laura (Ernesto). — Sopra i moti quasi-liberi di un fluido elastico „ 608
Mattirolo (Oreste). — Contributo allo studio della *Monilia sitophila* (Mont.) Sacc. . . . . „ 615
Fubini (Guido). — Fondamenti della Geometria proiettivo-differenziale di una superficie . . . . „ 622
Quarra (Paolina). — Calcolo delle parentesi . . . . . . „ 634
Sacco (Federico). — Il glacialismo antico e moderno del Cervino (Nota II, con 1 tavola) . . . . „ 638
Moschetti (Lorenzo). — Sulla probabile identità della *peganite* con la *variscite* . . . . „ 652
Viriglio (Luisa). — Estrazione graduale di radice cubica . „ 657

Classi Unite.

Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza del 23 Giugno 1918 . *Pag.* 669
Indice del volume LIII . . . . „ 671

Tip. Vincenzo Bona — Torino